

ЗГИН ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПАРАЛЕЛЬНИХ ЗСУНУТИХ ТРІЩИН ЗА ТЕОРІЄЮ РЕЙСНЕРА

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Роман МОКРИК, Роман СЕЛІВЕРСТОВ

Львівський національний університет імені Івана Франка

вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Львівський науково-практичний центр

вул. Кривоноса, 10 79000 Львів, Україна

У цій праці, використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної, задачу про напружений стан пластини Рейснера, яка ослаблена періодичною системою паралельних зсунутих наскрізних розрізів, зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Проведений числовий аналіз задачі для випадку, коли до берегів розрізів прикладено самозрівноважені згинальні моменти. Досліджено вплив товщини пластини та розташування тріщин на величини коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів. У часткових випадках одержано відомі результати [5].

Ключові слова: пластина, тріщина, згин.

1. Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину завтовшки h , яка містить систему наскрізних паралельних тріщин, до берегів яких прикладено самозрівноважене навантаження. В серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxyz$. Вважаємо, що центри тріщин мають координати $(-sj; dj)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при цьому тріщини паралельні до осі Ox . Із кожною тріщиною пов'яжемо локальні системи координат $O_j x_j y_j$ (рис. 1). Окрім цього вважатимемо, що під час деформування пластини береги тріщин не контактують.

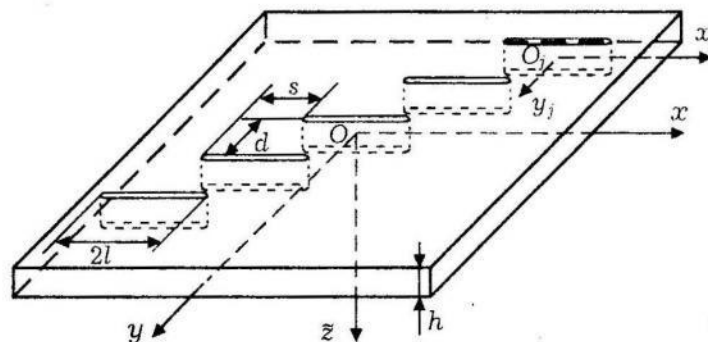


Рис. 1. Схема розміщення тріщин у пластині

Граничні умови задачі можна подати у вигляді

$$M_y^+ - M_y^- = 0, \quad H_{xy}^+ - H_{xy}^- = 0, \quad Q_y^+ - Q_y^- = 0, \quad |x_j| < l; \quad (1)$$

$$M_y^+ + M_y^- = q_1(x_j), \quad H_{xy}^+ + H_{xy}^- = q_2(x_j), \quad Q_y^+ + Q_y^- = q_3(x_j), \quad |x_j| < l, \quad (2)$$

де $q_i(x_j)$, $i = \overline{1,3}$ — відомі функції; значками '+' та '-' позначено граничні значення функцій при $y_j \rightarrow \pm 0$.

Зауважмо, що залежності (1) виражають самозрівноваженість навантаження, а умови (2) задають розподіл згинних моментів M_y , крутних моментів H_{xy} та поперечних сил Q_y уздовж розрізів.

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини та коефіцієнти інтенсивності силових і моментних чинників задачі.

2. Зведення розв'язку задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Для розв'язання сформульованої задачі скористаємось комплексним поданням визначальних співвідношень теорії згину пластин Рейснера [1,7], які в нашому випадку матимуть вигляд

$$M_y + iH_{xy} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2m \operatorname{Re} \Phi_j(z_j) + n \left[z_j \overline{\Phi_j'(z_j)} + \overline{\Psi_j(z_j)} \right] + \rho \left[2\overline{\Phi_j''(z_j)} + i \frac{\partial^2 \Omega_j(z_j, \bar{z}_j)}{\partial z_j^2} \right] \right\}, \quad (3)$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(2\Phi_j'(z_j) - i \frac{\partial \Omega_j(z_j, \bar{z}_j)}{\partial z_j} \right),$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість пластини, E — модуль пружності матеріалу пластини, ν — коефіцієнт Пуассона;

$$m = -D(1+\nu), \quad n = D(1-\nu), \quad \rho = \frac{4D}{k^2}, \quad k = \frac{\sqrt{10}}{h},$$

$$z_j = x_j + iy_j = (x - sj) + i(y + dj), \quad i = \sqrt{-1};$$

$\Phi_j(z_j)$, $\Psi_j(z_j)$ — комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі, а функція $\Omega_j(z_j, \bar{z}_j)$ — розв'язок рівняння Гельмгольца $\Delta \Omega_j - k^2 \Omega_j = 0$.

Функції $\Phi_j(z_j)$ та $\Omega_j(z_j, \bar{z}_j)$ виберемо у вигляді [3]

$$\Phi_j(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{f(t)}{t - z_j} dt, \quad \Omega_j(z_j, \bar{z}_j) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_{-l}^l \frac{w_j K_1(w_j)}{t - z_j} \omega(t) dt \right], \quad (4)$$

де $w_j = k|t - z_j|$, $K_i(w_j)$ — функція Макдональда i -го порядку, $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, $\omega(t) = \gamma(t) - i\mu(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$ — невідомі дійсні функції.

Проробивши перетворення, як це зроблено в [3], та задовольняючи граничні умови (1) і (2), одержимо систему СІР для знаходження невідомих функцій $u_1(t) = f_1(t)$, $u_2(t) = f_2(t)$, $u_3(t) = \mu'(t) - 2f_1'(t)$ ($\gamma(t) = 2f_2(t)$)

$$\sum_{i=1}^3 \int_{-l}^l K_{ki}(t, x) u_i(t) dt = -\pi P_k(x), \quad |x| < l, \quad k = \overline{1,3}, \quad (5)$$

де $P_1(x) = \frac{q_1(x)}{n}$, $P_2(x) = \frac{q_2(x)}{n}$, $P_3(x) = \frac{q_3(x)}{kD}$;

$$K_{11}(t, x) = 2d \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{r_j^3} \left\{ \frac{r_j^2 - 2(dj)^2}{r_j} + \right. \\ \left. + m_1 \left[\frac{\tilde{K}_2(kr_j)}{r_j} (3r_j^2 - 4(dj)^2) + k(r_j^2 - (dj)^2) \tilde{K}_1(kr_j) \right] \right\};$$

$$K_{12}(t, x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j^2} \left\{ n_1 - 4 \left(\frac{dj}{r_j} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{m_1}{r_j} \left[\frac{\tilde{K}_2(kr_j)}{r_j} (r_j^2 - 4(dj)^2) - k(dj)^2 K_1(kr_j) \right] \right\};$$

$$K_{13}(t, x) = m_1 d \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j^2} j \tilde{K}_2(kr_j);$$

$$K_{23}(t, x) = m_1 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(dj)^2}{r_j^2} \right) \tilde{K}_2(kr_j);$$

$$K_{21}(t, x) = 2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j} \left\{ \frac{q}{r_j} - \frac{2(dj)^2}{r_j^3} + \right. \\ \left. + m_1 \left[\frac{\tilde{K}_2(kr_j)}{r_j^3} (r_j^2 - 4(dj)^2) + k \left(\frac{1}{2} - \frac{(dj)^2}{r_j^2} \right) K_1(kr_j) \right] \right\};$$

$$K_{22}(t, x) = 2m_1 d \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{r_j} \left\{ \frac{1}{2r_j} + \frac{r_j^2 - 2(dj)^2}{m_1 r_j^3} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\tilde{K}_2(kr_j)}{r_j^3} (3r_j^2 - 4(dj)^2) + k \left(\frac{1}{2} - \frac{(dj)^2}{r_j^2} \right) K_1(kr_j) \right] \right\};$$

$$K_{31}(t, x) = 4k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_j^2} \left[\tilde{K}_1'(kr_j) (r_j^2 - 2(dj)^2) - (dj)^2 K_0(kr_j) \right];$$

$$K_{32}(t, x) = 4kd \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j \frac{t-x+sj}{r_j^2} \tilde{K}_2(kr_j); \quad \tilde{K}_1(x) = K_1(x) - \frac{1}{x};$$

$$K_{33}(t, x) = -2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j} K_1(kr_j); \quad \tilde{K}_2(x) = K_2(x) - \frac{2}{x^2};$$

$$m_1 = \frac{4}{1-\nu}; \quad n_1 = 2 \frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad r_j = \sqrt{(t-x+sj)^2 + (dj)^2}.$$

Систему (5) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-l}^l u_1(t) dt = 0, \quad \int_{-l}^l u_2(t) dt = 0, \quad \int_{-l}^l (tu_1(t) - k^{-2}u_3(t)) dt = 0, \quad (6)$$

які виражають однозначність прогину та усереднених кутів повороту нормалі [6] до серединної площини під час обходу контурів тріщин.

Систему СІР (5), (6) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [4].

Розподіл зусиль та моментів поблизу вістря тріщини матиме вигляд [9]

$$\begin{aligned} M_x + M_y &= \frac{2}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left\{ (K_M - iK_H) e^{-i\frac{\theta}{2}} \right\} + O(1), \\ M_x - M_y - 2iH_{xy} &= \frac{1}{2\sqrt{2r}} \left\{ (K_M - iK_H) e^{-i\frac{5\theta}{2}} - (K_M + 3iK_H) e^{-i\frac{\theta}{2}} \right\} + O(1), \\ Q_x - iQ_y &= -\frac{iK_Q}{\sqrt{2r}} e^{-i\frac{\theta}{2}} + O(1), \end{aligned}$$

де (r, θ) — полярні координати точки з початком координат у вершині тріщини, K_M , K_H та K_Q — коефіцієнти інтенсивності моментів та поперечних сил.

3. Аналіз числових результатів. Провели числовий аналіз задачі у випадку, коли до берегів тріщин прикладені сталі згинальні моменти M . На рис. 2–4 зображено графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів та поперечних сил $[K_M^*, K_H^*, K_Q^*] = [K_M, K_H, K_Q] / (M\sqrt{l})$ від параметрів $\tilde{s} = s/l$, $\tilde{d} = d/l$, $\lambda = h/(l\sqrt{10})$ для $\nu = 0, 3$. Зведені коефіцієнти інтенсивності силових і моментних чинників обчислені за відповідними значеннями невідомих функцій $u_i(x)$ за допомогою формул

$$(K_M^*)^\pm = \mp 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \tilde{u}_2(\pm 1), \quad (K_H^*)^\pm = \mp 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \tilde{u}_1(\pm 1), \quad (K_Q^*)^\pm = \pm \frac{2\lambda}{1-\nu} \tilde{u}_3(\pm 1), \quad (7)$$

де $\tilde{u}_i(x) = \sqrt{1-x^2} u_i(lx)$, знаки '+' та '-' відповідають значенням у правій та лівій вершині розрізу відповідно.

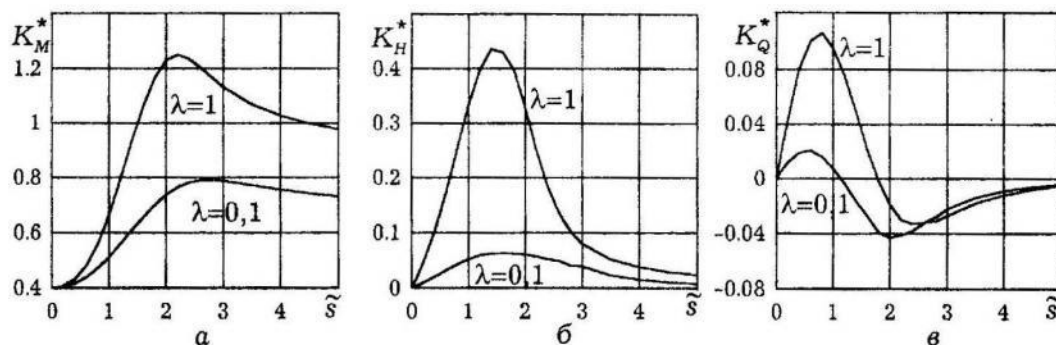


Рис. 2. Залежність зведених коефіцієнтів інтенсивності від зсуву тріщин для $\nu = 0, 3$ і $\tilde{d} = 1$

Зауважмо, що в часткових випадках, коли $\tilde{s} \rightarrow 0$ (паралельні незсунуті тріщини) та $\tilde{d} \rightarrow 0$ і $\tilde{s} > 2$ (колінеарні тріщини), результати збігаються з числовими значеннями, які одержав О. Тамате [9, 10], та з поданими в довіднику [1]. Крім того, для цих випадків система рівнянь (5), (6) розпадається на дві незалежні системи: одна для знаходження функції $u_2(t)$, а друга — функцій $u_1(t)$ та $u_3(t)$ і має тривіальний розв'язок. У випадку, коли $\tilde{s} \rightarrow \infty$ або $\tilde{d} \rightarrow \infty$, отримані числові результати задачі про згин пластини Рейснера з однією ізольованою тріщиною [8].

Зазначмо, що кількість вузлів методу механічних квадратур, яка необхідна для досягнення певної точності результатів, залежить лише від параметра λ . У

випадку 40 вузлів і $\lambda > 0,04$ похибка обчислень не перевищує 1%, а для $\lambda \rightarrow 0$ результати для K_H^* і K_Q^* розбіжні, що можна пояснити їх нескінченно малими значеннями.

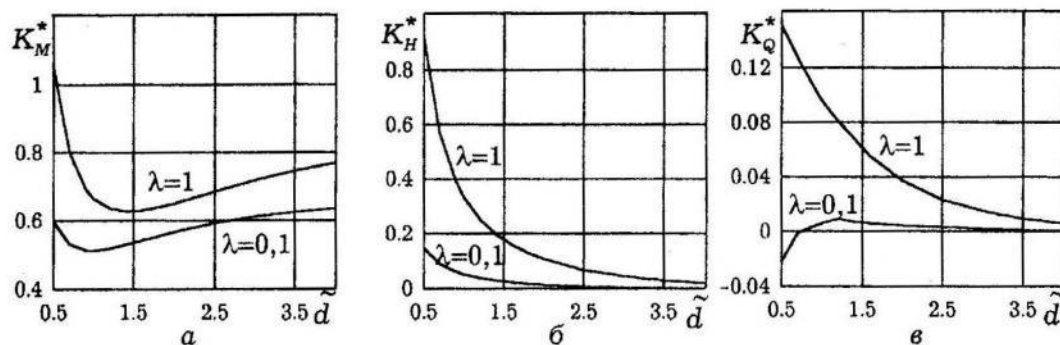


Рис. 3. Залежність зведених коефіцієнтів інтенсивності від відстані між лініями розташування тріщин для $\nu = 0,3$ і $\tilde{s} = 1$

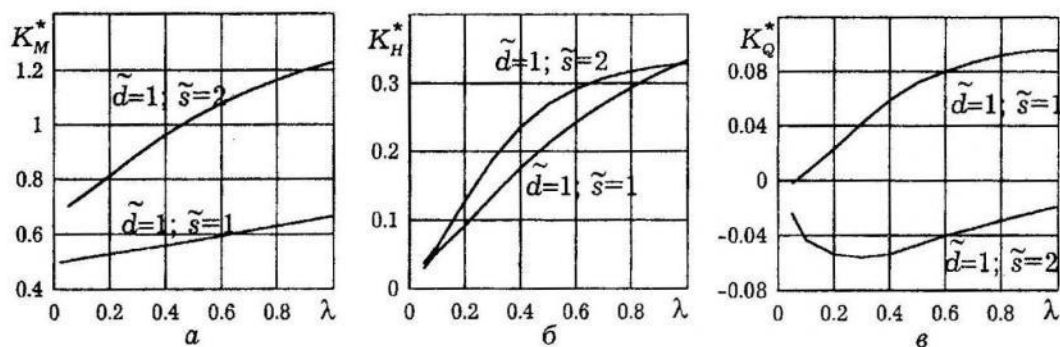


Рис. 4. Залежність зведених коефіцієнтів інтенсивності від параметра λ для $\nu = 0,3$

Як видно з рис. 4, збільшення товщини пластини спричиняє ріст величини зведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів. На підставі рис. 3, б можна зробити висновок, що вплив параметра $\tilde{d}$ на абсолютну величину K_H^* і K_Q^* однозначний — з його зменшенням вони зростають. Однак такої однозначності немає для коефіцієнта K_M^* (рис. 3, а), бо при $\tilde{d} \rightarrow 0$ він теж стрімко зростає, проте з віддаленням тріщин одна від одної коефіцієнт інтенсивності згинних моментів менший за відповідне значення для пластини з ізольованою тріщиною.

На рис. 2 чітко видно значення зсуву тріщин, за яких зведені коефіцієнти інтенсивності моментів і поперечних сил досягають найбільшої величини, причому спочатку досягають максимального значення K_Q^* , потім — K_H^* , і ще пізніше — K_M^* , коли величина зсуву перевищить довжину тріщини.

Зауважмо також, що вплив коефіцієнта Пуассона на зведені коефіцієнти інтенсивності силових і моментних чинників незначний порівняно з геометричними характеристиками задачі.

1. Бережницький Л. Т., Делявський М. В., Панасюк В. В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. К., 1979.

2. Мазурак Л. П., Бережницький Л. Т. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. К., 1990.
3. Опанасович В. К., Селіверстов Р. Г. Кручення пластини Рейснера з двома паралельними зсунутими тріщинами однакової довжини. // XVI Відкрита науково-технічна конференція молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка АН України. Мат. конф. Львів, 2001. С. 19–22.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дачишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К., 1976.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х т./ Под ред. Ю. Мураками. М., 1990.
6. Тимошенко С. П., Войновски-Кригер. Пластины и оболочки. М., 1966.
7. Угодчиков А. Г., Соболев В. А. Концентрация напряжений около отверстий в плитах по теории Рейсснера // Прикл. механика. 1972. 8. N 6. С. 58–66.
8. Knowles J. K., Wang N. M. On the bending of an elastic plate a crack // J. Math. and Phys. 1970. 39. N 3. P. 223–236
9. Tamate O. An infinite row of parallel cracks in an elastic plate under flexure // Trans. JSME. 1977. 43. N 376. P. 4363–4371.
10. Tamate O. Periodic collinear cracks in an elastic plate under plane bending // Trans. JSME, 1978. 44. N 379. P. 785–789.

BENDING OF A REISSNER'S PLATE CONTAINING PERIODIC SYSTEM OF PARALLEL SHIFTED CRACKS

Viktor Opanasovych, Roman Mokryk, Roman Seliverstov

*Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine
Scientific and Practical Center of Lviv
10 Kryvonosa Str. 79000 Lviv, Ukraine*

In the paper the problem about bending of constant thickness isotropic plate with infinite row of parallel shifted cracks is investigated. It is assumed that the selfequilibrium bending moments are applied to the banks of the cracks. Using the method of the theory of functions of complex variable the solution of this problem is reduced to system of three singular integral equations. This system is numerically solved by mechanical quadratures method. Numeric analysis of stress intensity factors is realized. In particular cases results from the scientific literature are obtained.

Key words: plate, crack, bending.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002