

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ

Юрій ПИР'ЄВ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто математичну модель фрикційного термопружного контакту тіла з рухомим навколишнім середовищем. Робота продовжує дослідження впливу фрикційного тепловиділення і теплового розширення [3-4] на рух тіла (можливо і хаотичного) у циліндричному спраженні.

Ключові слова: фрикційне теплоутворення, функція Мельнікова.

Формулювання задачі. Розглянуто одновимірну модель термопружного контакту обертаючого циліндра радіуса R_1 з бандажем (втулкою, суцільним вкладишем, колодкою з коефіцієнтом взаємного перекриття близьким до одиниці, зажимом Проні [1]) який має внутрішній радіус R_1 (рис.1). У початковий момент часу температура бандажа підвищується згідно з законом $T_*h(t)$. Між циліндром і бандажем відбувається теплообмін за законом Ньютона. Внаслідок теплового розширення циліндра бандаж і циліндр починають контактувати.

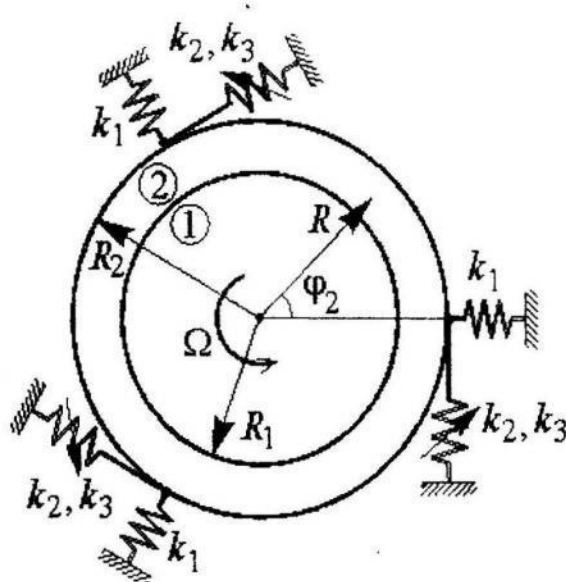


Рис. 1. Схема задачі

Вважаймо, що бандаж має зовнішній радіус R_2 і є абсолютно жорстким з моментом інерції I_2 . Бандаж з'єднаний з корпусом за допомогою радіальних пружин жорсткостями k_1 і пружин з нелінійними характеристиками (типу Дуфінга [5]), які мають жорсткості k_2, k_3 . Припустімо, що циліндр обертається з невеликою

кутовою швидкістю $\Omega(t) = \Omega_* \omega_1(t)$ такою, що можна знехтувати відцентровими силами інерції і ця швидкість змінюється: $\omega_1 = \omega_* + \zeta \sin \omega' t$. Припустимо, що між циліндром і бандажем діє сила тертя $F_t(V_w)$, яка є функцією відносної швидкості бандажа і циліндра $V_w = \Omega R_1 - \dot{\varphi}_2 R_1$. Згідно з законом Амонтона $F_t = f(V_w)N(t)$, де $f(V_w)$ — кінематичний закон тертя. Внаслідок дії сил тертя $F_t(V_w)$ на поверхні контакту відбувається теплоутворення. Треба визначити температуру $T(R, t)$ циліндра, радіальні переміщення $U(R, t)$, радіальні напруження $\sigma_R(R, t)$, контактний тиск $P(t) = N(t)/2\pi R_1 = -\sigma_R(R_1, t)$ та закон руху бандажа.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазі-стаціонарної незв'язаної термопружності для циліндра

$$\frac{\partial^2 U(R, t)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U(R, t)}{\partial R} - \frac{1}{R^2} U(R, t) = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial T(R, t)}{\partial R}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T(R, t)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T(R, t)}{\partial R} = \frac{1}{k} \frac{\partial T(R, t)}{\partial t}, \quad 0 < R < R_1, \quad 0 < t < \infty \quad (2)$$

та рівняння обертального руху бандажа як абсолютно жорсткого тіла

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 = f(R_1(\Omega - \dot{\varphi}_2)) 2\pi R_1^2 P(t) - k_2 R_2^2 \varphi_2 - k_3 R_2^4 \varphi_2^3 + k_1 \left(\frac{l_0}{l_1} - 1 \right) (R_2 + l_1) R_2 \varphi_2 \quad (3)$$

за таких механічних граничних умов

$$U(0, t) = 0, \quad U(R_1, t) = 0, \quad (4)$$

теплових граничних умов

$$K \frac{\partial T(R_1, t)}{\partial R} + \alpha_T (T(R_1, t) - T_* h(t)) = f(V_w) V_w P(t), \quad R \frac{\partial T(R, t)}{\partial R} \Big|_{R \rightarrow 0} = 0 \quad (5)$$

і початкових умов

$$T(R, 0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0. \quad (6)$$

Радіальні напруження у циліндрі знаходимо за формулою

$$\sigma_R(R, t) = \frac{E}{1 - 2\nu} \left[\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{\partial U(R, t)}{\partial R} + \frac{\nu}{1 - \nu} \frac{U(R, t)}{R} - \alpha T(R, t) \right]. \quad (7)$$

У формулах (1)-(7) E — модуль Юнга; ν , K , k , α , α_T — коефіцієнти Пуассона, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення, тепловіддачі, l_0, l_1 — довжини відповідно вільної та стиснутої пружини, φ_2 — малий кут обертання бандажа.

Побудова розв'язку задачі. Розв'язок крайової задачі (1)-(7) одержуємо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Для переходу в область оригіналів використовуємо теореми розкладення та добутку зображень. У результаті отримуємо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння

$$\ddot{\varphi}(\tau) - \varphi(\tau) + b\varphi^3(\tau) = \varepsilon F(\omega_1 - \dot{\varphi})p(\tau), \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad (8)$$

де безрозмірний контактний тиск $p(\tau)$ є розв'язком нелінійного інтегрального рівняння

$$p(\tau) = Bi \tilde{\omega} \int_0^\tau G_p(\tau - \xi) \dot{h}(\xi) d\xi + \gamma \tilde{\omega} \int_0^\tau \dot{G}_p(\tau - \xi) F(\omega_1 - \dot{\varphi}) p(\xi) (\omega_1 - \dot{\varphi}) d\xi. \quad (9)$$

Безрозмірну контактну температуру $\theta(\tau) = \theta(1, \tau)$ знаходимо за формулою

$$\theta(\tau) = Bi \tilde{\omega} \int_0^\tau G_\theta(1, \tau - \xi) \dot{h}(\xi) d\xi + \gamma \tilde{\omega} \int_0^\tau \dot{G}_\theta(1, \tau - \xi) F(\omega_1 - \dot{\varphi}) p(\xi) (\omega_1 - \dot{\varphi}) d\xi. \quad (10)$$

У співвідношення (9), (10) входять вирази

$$\{G_p(\tau); G_\theta(1, \tau)\} = \frac{\{0, 5; 1\}}{Bi \tilde{\omega}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\{2Bi; 2\mu_m^2\}}{\mu_m^2 \tilde{\omega} (Bi^2 + \mu_m^2)} e^{-\mu_m^2 \tilde{\omega} \tau}, \quad (11)$$

де μ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) — корені характеристичного рівняння

$$Bi J_0(\mu) - \mu J_1(\mu) = 0. \quad (12)$$

У поданні розв'язку (8)–(12) уведено безрозмірні величини

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{R_1}, & \tau &= \frac{t}{t_*}, & p &= \frac{P}{P_*}, & \varepsilon &= \frac{P_* t_* 2\pi R_1^2}{I_2 \Omega_*}, & \omega &= \omega' t_*, \\ \varphi(\tau) &= \frac{\varphi_2(t_* \tau)}{\Omega_* t_*}, & F(\omega_1 - \dot{\varphi}) &= f(R_1 \Omega_* (\omega_1 - \dot{\varphi})), & b &= \frac{k_3 R_2^4 t_*^4 \Omega_*^2}{I_2}, \\ \theta &= \frac{T}{T_*}, & Bi &= \frac{\alpha_T R_1}{K}, & h(\tau) &= h(t_* \tau), & \gamma &= \frac{2E\alpha R_1^2 \Omega_*}{K(1 - 2\nu)}, & \tilde{\omega} &= \frac{t_* k}{R_1^2} \end{aligned}$$

і характерні параметри

$$t_* = \sqrt{\frac{I_2}{k_* R_2^2}}, \quad P_* = \frac{2E\alpha T_*}{1 - 2\nu}, \quad k_* = k_1 \left(\frac{l_0}{l_1} - 1 \right) \left(1 + \frac{l_1}{R_2} \right).$$

Вважаймо, що кінематичний коефіцієнт тертя апроксимований функцією [5]

$$F(y) = F_0 \operatorname{Sgn}(y) - \alpha y + \beta y^3, \quad \text{де} \quad \operatorname{Sgn}(y) = \begin{cases} \{y/|y|\}, & y \neq 0, \\ [-1; 1], & y = 0, \end{cases} \quad (13)$$

а температура бандажа зростає за законом $h(\tau) = 2(1 - \exp(-\delta\tau^2))$.

Метод Мельнікова. У випадку відсутності фрикційного теплоутворення ($\gamma = 0$) контактний тиск з часом прямує до значення $p(\tau) \rightarrow 1$. Система може перебувати у хаотичному русі. Для цього випадку використаємо критерій Мельнікова існування гомоклінічної структури [2]. Нелінійне диференціальне рівняння (8) із урахуванням позначень $x = \varphi$, $y = \dot{\varphi}$ запишімо у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_0(x, y) + \varepsilon p_1(x, y, \omega\tau, \varepsilon), \\ \dot{y} &= q_0(x, y) + \varepsilon q_1(x, y, \omega\tau, \varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} p_0(x, y) &= y, & p_1(x, y, \omega\tau, \varepsilon) &= 0, \\ q_0(x, y) &= x - bx^3, & q_1(x, y, \omega\tau, \varepsilon) &= F(\omega_* + \zeta \sin \omega\tau - y). \end{aligned} \quad (15)$$

При $\varepsilon = 0$ у системі на фазовій площині існує замкнена сепаратриса сідла. Критерій виникнення при $\varepsilon > 0$ у фазовому просторі (x, y) гомоклінічної структури полягає у визначенні знакозмінності функції, яка характеризує відстань між сепаратрисами. У випадку $\varepsilon \ll 1$ цю функцію, яку називають функцією Мельнікова чи функцією щілини, записують у вигляді [2,5].

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_1 q_0 - q_1 p_0) \Big|_{\substack{x=x_0(\tau-\tau_0) \\ y=y_0(\tau-\tau_0)}} d\tau, \quad (16)$$

де $x_0(\tau), y_0(\tau)$ — розв'язок незбуреної системи (14), якій відповідає петля сепаратриси

$$\dot{x}_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{b}} \frac{1}{\cosh(\tau)}, \quad y_0(\tau) = -\sqrt{\frac{2}{b}} \frac{\sinh(\tau)}{\cosh^2(\tau)}, \quad (17)$$

τ_0 — параметр, який характеризує положення точки на цій сепаратрисі. Переходячи до змінної $\tau - \tau_0 = t$, отримуємо

$$M(\tau_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) [F_0 \operatorname{Sgn}(\omega_r) - \alpha \omega_r + \beta \omega_r^3] dt, \quad (18)$$

де безрозмірна відносна швидкість

$$\omega_r(t) = \omega_* + \zeta \sin(\omega(t + \tau_0)) - y_0(t). \quad (19)$$

Остаточно вираз функції Мельнікова набуде вигляду

$$\begin{aligned} M(\tau_0) = & I(\tau_0) + 2C + 2\zeta \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega\tau_0 + \varphi) + \\ & + 6\beta\zeta^2 (I_{220} \cos^2 \omega\tau_0 + I_{202} \sin^2 \omega\tau_0 - 2\omega_* I_{111} \sin \omega\tau_0 \cos \omega\tau_0) + \\ & + 2\beta\zeta^3 (-I_{130} \cos^3 \omega\tau_0 - 3I_{112} \sin^2 \omega\tau_0 \cos \omega\tau_0), \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} A = & (\alpha - 3\beta\omega_*^2) I_{110} - 3\beta I_{310}, & B = & 6\beta\omega_* I_{201}, \\ C = & \beta I_{400} - (\alpha - 3\beta\omega_*^2) I_{200}, & \varphi = & \operatorname{arctg}(A/B); \end{aligned}$$

$$I_{njk} = \int_0^\infty [y_0(t)]^n [\sin(\omega t)]^j [\cos(\omega t)]^k dt. \quad (21)$$

Інтеграли (21) мають вигляд

$$\begin{aligned} I_{200} = & \frac{2}{3b}, \quad I_{400} = \frac{8}{35b^2}, \quad I_{201} = \frac{\pi\omega(2-\omega^2)}{6b \sinh(\pi\omega/2)}, \quad I_{110} = -\frac{\pi\omega}{\sqrt{2b} \cosh(\pi\omega/2)}, \\ I_{310} = & \frac{\omega(11+10\omega^2-\omega^4)}{120b\sqrt{2b}} \left\{ \psi\left(\frac{1-i\omega}{4}\right) - \psi\left(\frac{3-i\omega}{4}\right) + \psi\left(\frac{1+i\omega}{4}\right) - \right. \\ & \left. - \psi\left(\frac{3+i\omega}{4}\right) \right\}, \quad I_{220} = \frac{\pi\omega(2\omega^2-1) + \sinh(\pi\omega)}{3b \sinh(\pi\omega)}, \\ I_{130} = & -\frac{3\pi\omega}{8\sqrt{2b}} \left\{ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(1-i\omega)}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi(1-i\omega)}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(3-i\omega)}{4}\right) - \right. \\ & \left. - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(1-3i\omega)}{4}\right) \right\}, \quad I_{202} = \frac{\pi\omega(1-2\omega^2) + \sinh(\pi\omega)}{3b \sinh(\pi\omega)}, \end{aligned}$$

$$I_{112} = \frac{\pi\omega \cosh(\pi\omega/2)}{\sqrt{2b}(1 - 2\cosh(\pi\omega))}, \quad I_{111} = -\frac{\pi\omega}{\sqrt{2b}\cosh(\pi\omega)}, \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

У представленні (20) вираз для $I(\tau_0)$ має вигляд

$$I(\tau_0) = -F_0 \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) \operatorname{Sgn}(\omega_r) dt = 2F_0 \sqrt{\frac{2}{b}} \sum_m \frac{\operatorname{sgn}(\omega'_r(t_m))}{\cosh t_m}, \quad (22)$$

де $\omega'_r(t) = \zeta\omega \cos(\omega(t + \tau_0)) - x_0(t) + bx_0^3(t)$, t_m — корені рівняння

$$\omega_r(t_m) = \omega_* + \zeta \sin(\omega(t_m + \tau_0)) - y_0(t_m) = 0. \quad (23)$$

Числові результати. Співвідношення (8)–(9) є системою нелінійних інтегрального та диференціального рівнянь. Розв'язок шукаємо, застосовуючи методи Рунге-Кутта та ітерацій із використанням квадратурної формули трапецій.

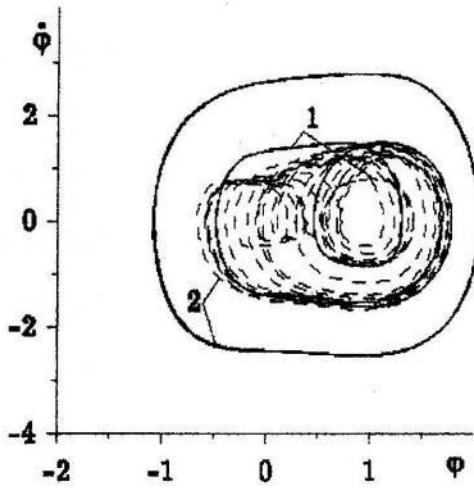


Рис. 2.

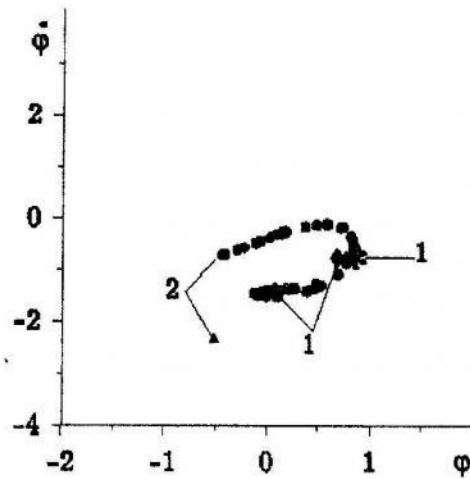


Рис. 3.

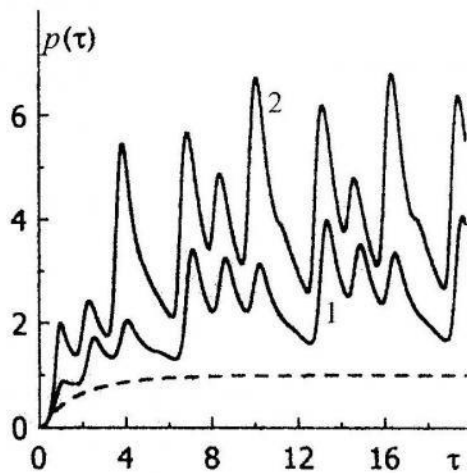


Рис. 4.

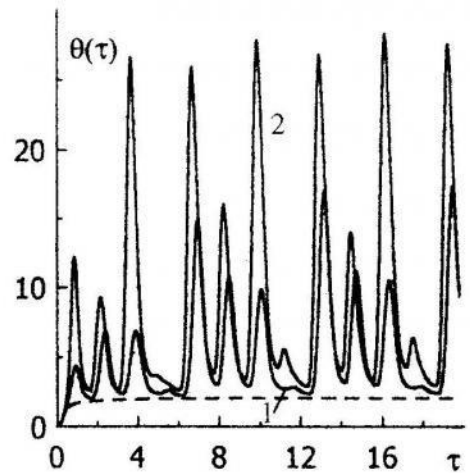


Рис. 5.

Функцію $\operatorname{Sgn}(y)$ наближено виразом з параметром $\varepsilon_0 = 0,0001$

$$\operatorname{sgn}_{\varepsilon_0}(y) = \begin{cases} 1, & y > \varepsilon_0, \\ (2 - |y|/\varepsilon_0) y/\varepsilon_0, & |y| < \varepsilon_0, \\ -1, & y < -\varepsilon_0. \end{cases} \quad (24)$$

Числовий аналіз виконаний для сталевго циліндра ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $K = 21 \text{ Вт/(м} \cdot \text{ } ^\circ\text{C)}$, $k = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu = 0,3$, $E = 19 \cdot 10^{10} \text{ Па}$) при $Bi = 10$, $\varepsilon = 0,1$, $\tilde{\omega} = 0,1$, $b = 1$, $\omega = 2$, $\omega_* = 0,4$, $F_0 = \alpha = \beta = 0,3$, $\delta = 10$ для різних значень амплітуди кінематичного збурення системи ζ . Штрихові криві відповідають випадкові знехтування величиною теплового розширення $\gamma = 0$, суцільні криві — значенню $\gamma = 1$. Фазова картина руху бандажа (кутова швидкість обертання бандажа у кожному його положенні) зображена на рис. 2. Пункти на фазовій площині показані на рис. 3 через період зовнішнього збурення $2\pi/\omega$. Поведінка з плином часу безрозмірної величини контактного тиску p та контактної температури θ зображена відповідно на рис. 4–5. Криві та пункти 1 відповідають значенню $\zeta = 3,5$ (функція Мельнікова не є знакозмінною), криві і пункти 2 — значенню $\zeta = 4,5$ (функція Мельнікова є знакозмінною).

Числові результати свідчать, що фрикційне теплоутворення суттєво впливає на характер поведінки характеристик контакту та динаміку руху бандажа. Нехтуючи фрикційним теплоутворенням, можна отримати хаотичний рух тіла. Параметри моделі, для яких такий рух можливий, можна наперед знайти, використовуючи отриману функцію Мельнікова та її знакозмінність. Врахування фрикційного теплоутворення стабілізує динаміку руху бандажа.

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., 1981.
2. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Моск. матем. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
3. Пир'єв Ю. О., Гриліцький Д. В. Нелінійна нестационарна задача фрикційного контакту для циліндра з врахуванням інерційності та теплоутворення // Доп. НАН України. 1995. N 9. С. 3–47.
4. Пир'єв Ю. О. Фрикційний контакт циліндра та об'ємів з урахуванням інерційності, теплоутворення та зносу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2000. Т. 36, N 3. С. 53–58.
5. Awrejcewicz J. Drgania deterministyczne ukladow dyskretnych. Warszawa, 1996.

THE CONTACT PROBLEM OF A THERMOELASTICITY WITH TAKING INTO ACCOUNT OF DYNAMIC OF THE SYSTEM

Yuriy Pyryev

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The one-dimensional model of frictional thermoelastic contact of the moved cylinder with a bandage is considered. The problem is reduced to the solution of the system of the nonlinear integral and differential equation. The Melnikov's function is constructed. The analysis of parameters of contact is done.

Key words: frictional heat generation, Melnikov's function

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002