ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.173–178 *Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.173–178*

КВАЗІСТАТИЧНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПІВПРОСТОРІ, ЗУМОВЛЕНИЙ РУХОМИМ ПРЯМОКУТНИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Ольга ТУРЧИН
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Україна

Побудовано розв'язок просторової квазістатичної задачі термопружності для півпростору, що нагрівається рухомим джерелом тепла прямокутної форми. Розв'язок отримано з використанням рівнянь термопружності в напруженнях та інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа.

Ключові слова: термопружність, квазістатика, рівняння в напруженнях, рухоме джерело тепла.

Розглянемо вільний від зовнішнього навантаження півпростір $z \geqslant 0$, за поверхнею $z = 0$ якого зі сталою швидкістю v рухається джерело тепла прямокутної форми. Поза областю нагрівання поверхня вважається теплоізольованою, а початкова температура півпростору дорівнює t_0. Отже, нестаціонарне температурне поле в півпросторі визначається розв'язком початково-крайової задачі теплопровідності:

$$\Delta t = a^{-1}\partial_\tau t; \tag{1}$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_0; \tag{2}$$

$$\partial_z t\big|_{z=0} = -Q\varphi(x,y,\tau), \qquad t\big|_{z\to\infty} = 0, \tag{3}$$

де $t(x,y,z,\tau)$ — температурне поле в півпросторі, $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy} + \partial^2_{zz}$ — оператор Лапласа, τ — час, Q — зведена густина джерела тепла, a — відповідно коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалу півпростора, b і d — розміри прямокутної ділянки нагріву,

$$\varphi(x,y,\tau) = [S(x+b) - S(x-b)]\,[S(y+d-v\tau) - S(y-d-v\tau)],$$

$S(\cdot)$ — одинична функція Хевісайда.

Застосувавши до рівняння (1) і умов (3) інтегральне перетворення Фур'є за змінними x, y і Лапласа за змінною τ та врахувавши початкові умови (2) одержимо крайову задачу в просторі зображень

$$\frac{d^2\bar\theta}{dz^2} - \gamma_s^2\bar\theta = 0, \qquad \frac{d\bar\theta}{dz}\bigg|_{z=0} = -Q\bar\varphi, \qquad \bar\theta\big|_{z\to\infty} = 0, \tag{4}$$

де $\gamma_s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \frac{s}{a}}$, $\theta = t - t_0$ — надлишкова температура,

$$\bar\theta(\xi,\eta,z,s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\theta(x,y,\tau)\exp(i\xi x + i\eta y - s\tau)\,d\tau\,dy\,dx \tag{5}$$

— зображення за Фур'є-Лапласом.

Розв'язок крайової задачі (3), що зникає на безмежності має вигляд

$$\bar{\theta} = A_s \exp(-\gamma_s z); \qquad A_s = \frac{Q\bar{\varphi}}{\gamma_s} \tag{6}$$

Перейшовши в (6) від трансформант Фур'є-Лапласа до оригіналів, використовуючи теореми про згортки і довідкові дані [1], отримаємо

$$\theta = \frac{Q}{4\sqrt{a\pi}\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\tau} \bar{\varphi}(x_0, y_0, \tau_0) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}{4a(\tau - \tau_0)}\right) \frac{d\tau_0\, dy_0\, dx_0}{(\tau - \tau_0)^{3/2}}.$$

В останньому співвідношенні перейдемо до рухомої системи координат $x_1 = x$; $y_1 = y - v\tau$; $z_1 = z$. Після обчислення відповідних інтегралів [2] знайдемо

$$\begin{aligned} \theta = \frac{Q}{4}\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int\limits_{0}^{\tau} \exp\left(-\frac{z_1}{4a\tau_*}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_1 + b}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - b}{2\sqrt{a\tau_*}}\right)\right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_1 + d + v\tau_*}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y_1 - d + v\tau_*}{2\sqrt{a\tau_*}}\right)\right] \frac{d\tau_*}{\sqrt{\tau_*}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Відомо [3], що рівняння просторової квазістатичної задачі термопружності в напруженнях мають вигляд

$$\Delta\sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\partial_{xx}^2\sigma + \frac{E}{1-\nu}\alpha_T\Delta\theta + 2G\alpha_T\partial_{xx}^2\theta = 0 \quad (xyz); \tag{8}$$

$$\Delta\sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\partial_{xy}^2\sigma + 2G\alpha_T\partial_{xy}^2\theta = 0 \quad (xyz), \tag{9}$$

де (xyz) — циклічна заміна, а $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ — перший інваріант тензора напружень, що задовольняє рівняння

$$\Delta\sigma = -2\frac{E\alpha_T}{1-\nu}\Delta\theta. \tag{10}$$

Поверхня півпростору вільна від зовнішнього навантаження, тобто

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \qquad z = 0.$$

На безмежності напруження та їхні похідні за координатами дорівнюють нулю

$$\sigma_{ij}\big|_{|x|,|y|,z\to\infty} = 0 \quad (i,j = x,y,z), \quad \partial_k\sigma_{ij}\big|_{|x|,|y|,z\to\infty} = 0. \tag{12}$$

Застосувавши до рівнянь (8)–(10) і умов (11), (12) інтегральні перетворення Фур'є за x, y і Лапласа за τ одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь в просторі зображень

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{xx} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xx} - \frac{\xi^2}{1+\nu}\bar{\sigma} + \alpha_T\left(\frac{E}{1-\nu}\frac{s}{a} - 2G\xi^2\right)\bar{\theta} = 0, \qquad (xy, \xi\eta); \tag{13}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{zz} - \gamma^2\bar{\sigma}_{zz} + \frac{1}{1+\nu}d_{zz}^2\bar{\theta} + \alpha_T\left(\frac{E}{1-\nu}\frac{s}{a} + 2Gd_{zz}^2\right)\bar{\theta} = 0; \tag{14}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{xy} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xy} - \frac{\xi\eta}{1+\nu}\bar{\sigma} = 2\alpha_T G\xi\eta d_z\bar{\theta}; \tag{15}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{xz} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xz} - \frac{i\xi}{1+\nu}d_z\bar{\sigma} = 2\alpha_T Gi\xi d_z\bar{\theta}, \qquad (xy, \xi\eta); \tag{16}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma} - \gamma^2\bar{\sigma} - \frac{\xi\eta}{1+\nu}\bar{\sigma} = -2\alpha_T\frac{E}{1-\nu}\frac{s}{a}\bar{\theta} \tag{17}$$

з крайовими умовами та умовами на безмежності

$$\bar{\sigma}_{xz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{zz} = 0 \quad \text{при } z = 0; \qquad \bar{\sigma}_{ij}\big|_{z\to\infty} = 0, \tag{18}$$

де $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Розв'язки диференціальних рівнянь (14)–(17) з урахуванням рівності (6) і умов (18) мають вигляд

$$\bar{\sigma} = A\exp(-\gamma z) - 2\alpha_T\frac{E}{1-\nu}\bar{\theta}; \tag{19}$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \left(A\gamma\frac{z}{2(1+\nu} + A_3\right)\exp(-\gamma z) + \frac{Ea\alpha_T}{s(1-\nu)}\gamma^2 A_s\exp(-\gamma_s z), \tag{20}$$

де $A_3 = -\frac{Ea\alpha_T\gamma^2}{s(1-\nu)}A_s$.

Застосувавши до рівнянь рівноваги

$$\partial_x\sigma_{xx} + \partial_y\sigma_{xy} + \partial_z\sigma_{xz} = 0 \qquad (xyz) \tag{21}$$

інтегральне перетворення Фур'є-Лапласа одержимо:

$$d_z\bar{\sigma}_{zz} = i\left(\xi\bar{\sigma}_{xz} + \eta\bar{\sigma}_{yz}\right), \qquad d_z\bar{\sigma}_{xz} = i\left(\xi\bar{\sigma}_{xx} + \eta\bar{\sigma}_{yy}\right) \qquad (\xi\eta, xy). \tag{22}$$

На поверхні півпростору $z = 0$ з першого рівняння (22), з урахуванням крайових умов (18) знайдемо, що $d_z\bar{\sigma}_{zz}\big|_{z=0} = 0$. Отже,

$$A = 2A_s(1+\nu) + \frac{2E\alpha_T(1+\nu)a}{(1-\nu)s}\gamma\gamma_s A_s$$

і

$$\bar{\sigma}_{zz} = N\left\{\gamma^2\exp(-\gamma_s z) + \gamma^2\left[(\gamma_s - \gamma)z - 1\right]\exp(-\gamma z)\right\}; \tag{23}$$

$$\bar{\sigma} = 2N(1+\nu)\gamma(\gamma_s - \gamma)\exp(-\gamma z) - 2\frac{E\alpha_T\bar{\theta}}{1-\nu}, \tag{24}$$

де $N = \alpha_T E\frac{A_s a}{(1-\nu)^s}$.

З урахуванням співвідношень (6), (19), рівняння (16) перепишемо у вигляді

$$\frac{d^2\bar{\sigma}_{xz}}{dz^2} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xz} = i\xi\left[\frac{\alpha_t E}{1-\nu}\gamma_s A_s\exp\left(-\gamma_s z\right) - \frac{\gamma}{1+\nu}A\exp\left(-\gamma z\right)\right] \quad (xy, \xi\eta), \tag{25}$$

звідки отримаємо його розв'язок

$$\bar{\sigma}_{xz} = A_1\exp(-\gamma z) + i\xi\left[\frac{\alpha_T E\gamma_s a}{s(1-\nu)}A_s\exp(-\gamma_s z) + \frac{z}{1\,(1+\nu)}\exp(-\gamma z)\right] \quad (xy, \xi\eta, 12). \tag{26}$$

За допомогою перших двох крайових умов (18) знайдемо

$$A_1 = -i\xi N\gamma_s, A_2 = -i\eta N\gamma_s. \tag{27}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz} &= i\xi N\left\{\gamma_s\exp(-\gamma_s z) + \left[z\gamma(\gamma_s - \gamma) - \gamma_s\right]\exp(-\gamma z)\right\}; \\ \bar{\sigma}_{yz} &= i\eta\left\{\gamma_s\exp(-\gamma_s z) + \left[z\gamma(\gamma_s - \gamma) - \gamma_s\right]\exp(-\gamma z)\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

З огляду на значення виразів (24) і співвідношення $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\sigma}_{zz}$ знайдемо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{\gamma^2}\left[\xi\eta\left(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}\right) - i\left(\eta d_z \bar{\sigma}_{xz} + \xi d_z \bar{\sigma}_{yz}\right)\right]; \\ \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{\gamma^2}\left[-\eta^2\left(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}\right) + i\left(\eta d_z \bar{\sigma}_{yz} - \xi d_z \bar{\sigma}_{xz}\right)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Врахувавши співвідношення (28), (23), (24), рівності (29) перепишемо у вигляді

$$\bar{\sigma}_{xx} = -N\left(\xi^2\gamma_s^2 + \eta^2\frac{s}{a}\right)\frac{\exp\left(-\gamma_s z\right)}{\gamma^2} - $$

$$-N\left(\xi^2(\gamma_s - \gamma)z - \frac{2\gamma_s}{\gamma}\left(\xi^2 + \nu\eta^2\right)\right)\exp(-\gamma z); \tag{30}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = -\xi\eta N\left[\exp\left(-\gamma_s z\right) + \left((\gamma_s - \gamma)z + 1 - 2\nu - \frac{2\gamma_s}{\gamma}\left(1 - \nu\right)\right)\exp(-\gamma z)\right]. \tag{31}$$

Якщо $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}$ визначені, то

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{zz}. \tag{32}$$

Перехід від трансформант Фур'є-Лапласа до оригіналів у співвідношеннях (23), (24), (28), (30)–(32) виконувався з використанням теорем про згортки.

Зокрема,

$$\sigma = 2\frac{\alpha_t E}{1-\nu}\left[-\theta + \frac{Qa}{2\pi}\left(1+\nu\right)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{x-b}^{x+b}\int\limits_{y-d+v\tau_*}^{y+d+v\tau_*}\Psi\left(x_*, y_*, z, \tau_*\right)dx_* dy_* d\tau_*\right], \tag{33}$$

де

$$\Psi = \left(2z^2 - x_*^2 - y_*^2\right)r_*^{-5}S_+\left(\tau_*\right) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma\exp\left(-z\gamma\right)\operatorname{erf}\left(\gamma\sqrt{a\tau_*}\right)\times$$

$$\times\cos\left(\xi x_*\right)\cos\left(\eta y_*\right)d\xi d\eta, \qquad r_* = \sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z^2}. \tag{34}$$

Інші компоненти тензора напружень мають вирази аналогічні до (33), (34), однак через обмеженість обсягу повідомлення тут не наводяться.

Більшість інтегралів у співвідношеннях (33), (34) — табличні [2]. Наведемо значення напружень σ_{xx} і σ_{yy} на поверхні півпростору $z = 0$ при $x = 0$, $b = d$

$$\sigma_x \equiv \frac{\sigma_{xx}|_{z=0,x=0,b=d}}{2\alpha_t EQb} = \frac{1}{\pi\left(1-\nu\right)}\left(M + \nu R - \vartheta\right); \tag{35}$$

$$\sigma_y \equiv \frac{\sigma_{yy}|_{z=0,x=0,b=d}}{2\alpha_t EQb} = \frac{1}{\pi\left(1-\nu\right)}\left(R + \nu M - \vartheta\right), \tag{36}$$

де

$$M = \frac{1}{V}\left(\sqrt{1+R_+^2} - \sqrt{1+Y_+^2} - \sqrt{1+R_-^2} + \sqrt{1+Y_-^2}\right) +$$

$$+\int\limits_0^{Fo}\left[\psi_1(\tilde{R}_-,\zeta) - \psi_1(\tilde{R}_+,\zeta)\right]d\zeta;$$

$$\vartheta = \frac{\theta|_{z=0,x=0,b=d}}{Qb} = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^{Fo} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_+}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_-}{2\sqrt{\zeta}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}};$$

$$R = \frac{1}{2V}\ln\frac{\left(\sqrt{1+R_+^2}-1\right)\left(\sqrt{1+Y_+^2}+1\right)\left(\sqrt{1+Y_-^2}-1\right)\left(\sqrt{1+R_-^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+R_+^2}+1\right)\left(\sqrt{1+Y_+^2}-1\right)\left(\sqrt{1+Y_-^2}+1\right)\left(\sqrt{1+R_-^2}-1\right)}+$$

$$+\int\limits_0^{Fo}\left[\psi_2(\tilde{R}_-,\zeta) - \psi_2(\tilde{R}_+,\zeta)\right]d\zeta;$$

$$R_\pm = Y_\pm + VFo; Y_\pm = \frac{y_1 \pm b}{b}; \tilde{R}_\pm = Y_\pm + V\xi; V = \frac{vb}{a}; Fo = \frac{a\tau}{b^2};$$

$$\psi_1\left(\tilde{R}_\pm,\zeta\right) = \exp\left(-\frac{1}{4\zeta}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_\pm^2}{2\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{\tilde{R}_\pm^2}{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}\operatorname{erfq}\left(\frac{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}{2\sqrt{\zeta}}\right);$$

$$\psi_2\left(\tilde{R}_\pm,\zeta\right) = \frac{1}{\tilde{R}_\pm^2}\left[\exp\left(-\frac{\tilde{R}_\pm^2}{4\zeta}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}\operatorname{erfq}\left(\frac{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}{2\sqrt{\zeta}}\right)\right].$$

За формулами (36) обчислено безрозмірні напруження σ_y при $\nu = 0.3$. На рис. 1 зображено розподіл зазначених напружень для різних значень критерію Фур'є при $V = 5.0$, а на рис. 2 при фіксованому значенні $Fo = 1.0$ і різних значеннях безрозмірної швидкості V.

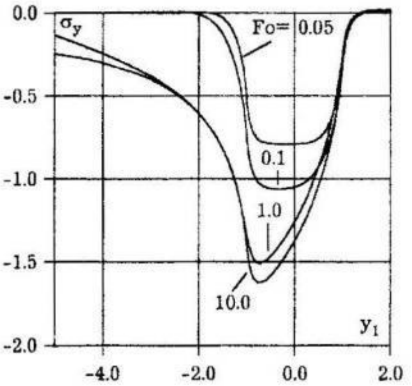

Рис. 1

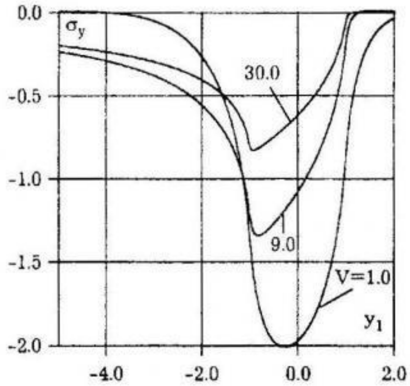

Рис. 2

Як видно з наведених результатів, зі збільшенням Fo абсолютне значення напружень збільшується переважно в зоні дії джерела тепла і досягає максимального значення в околі $Y = -1$. Схожі ефекти простежуються і на рис. 2, однак зі збільшенням швидкості руху джерела тепла абсолютне значення напружень зменшується.

---

1. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М., 1965.

2. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

3. *Лебедев Н.Н.* Температурные напряжения в теории упругости. М., 1937.

QUASISTATICAL THERMOSTRESSES STATE IN THE HALF-SPACE WHICH IS HEATED BY MOVING RECTANGULAR SOURCE

Ol'ga Turchyn

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The solution of three-dimensional quasistatic problem of thermoelastisity for half-space which is heated by moving rectangular source is constructed. This solution is obtained using the equations of thermoelastisity in the terms of stresses and Fouri r-Laplace's transformations.

Key words: thermoelastisity, quasistatic, equations in the terms of stresses, moving heat source.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002