ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 60

Львів 2002

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 60

Видається з 1965 року

Львівський національний університет
імені Івана Франка
2002

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2002. – Випуск 60.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2002. – Vol. 60.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редакційної колегії:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
механіко-математичний
факультет,
вул. Університетська, 1
79602 Львів
тел. (0322) 74-11-07, 96-45-93
E-mail: diffeq@uli2.franko.lviv.ua

Editorial address:
Ivan Franko National University
of Lviv
Mechanical and Mathematical
department
Universytets'ka st. 1
UA-79602 Lviv, Ukraine
tel. +(38) (0322) 74-11-07, 96-45-93

Відповідальний за випуск С. Лавренюк

Комп'ютерна верстка С. Лавренюк

Редактор Н. Плиса

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Львівського національного університету імені Івана Франка

CONTENTS

ЗМІСТ

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.5–12

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.5–12

УДК 512.62

ГРУПА БРАУЕРА n-ВИМІРНИХ ЗАГАЛЬНИХ ЛОКАЛЬНИХ ПОЛІВ

Василь АНДРІЙЧУК
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено існування ін'єктивного гомоморфізму Φ_K з групи Брауера поля n-вимірного загального локального поля K в групу $Hom\ (K_{n-1}(K),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, де $K_{n-1}(K)$ – $(n-1)$-а група Мілнора поля K. Визначено також, що у випадку $n = 2$ $Ker\ (\Phi_K(W) = Nrd\ (W)$, де $W \in Br\ K$ и Nrd – гомоморфізм редукованої норми.

Ключові слова: багатовимірні загальні локальні поля, теорія полів класів, група Мілнора, група Брауера.

Нагадаємо, що поле k називають *квазіскінченним* [1], якщо воно досконале і має точно одне розширення степеня n для кожного натурального числа n. Зазначимо, що скінченні поля квазіскінченні й існують нескінченні квазіскінченні поля.

А.Н. Паршин, С.В. Востоков, І.Б. Фесенко, К. Като та інші математики побудували теорію полів класів для n-вимірних локальних полів у термінах K-груп Мілнора [2]. Б.М.Беккер [3] показав, що використовуючи метод Фесенка [4], який грунтується на ідеях Нейкірха [5], можна побудувати n-вимірну локальну теорію полів класів для n-вимірних локальних полів ненульової характеристики з квазіскінченними полями лишків. Зазначимо, що Б.М.Беккер одержав результати, невикористовуючи когомологічної техніки.

У цій праці ми доводимо, що частина результатів К. Като про теорію полів класів n-вимірного локального поля зі скінченним полем лишків зберігає свою силу для n-вимірних локальних полів з квазіскінченними полями лишків характеристики нуль. Розглядаємо здебільшого n-вимірні загальні локальні поля формальних степеневих рядів $k((t_1, \cdots, t_n))$, де k – квазіскінченне поле характеристики нуль.

Означення. *n-вимірним ($n \geqslant 0$) локальним (відповідно загальним локальним) полем ми називаємо ланцюжок полів $k_0, \cdots, k_n$ з такими властивостями:*

(1) k_0 – скінченне (відповідно квазіскінченне) поле;

(2) для кожного $i = 1, \cdots, n$, k_i – повне дискретно нормоване поле з полем лишків k_{i-1}.

Позначатимемо поле k_n через K, а поле k_0 через k.

Через $H^i(K, M)$ позначимо когомології Галуа $Gal(K_{sep}/K)$ – модуля M, K_{sep} – сепарабельне замикання поля K.

Далі використовуватимемо K-групи Мілнора $K_n(K)$ поля K. За означенням $K_0(K) = \mathbb{Z}$, $K_1(K) = K^*$ і для $n \geqslant 2$ $K_n(K) = K^{\otimes n}/J$, де $K^{\otimes n}$ – тензорний добуток n екземплярів групи K^*, а I – підгрупа цього тензорного добутку, породжена всіма елементами вигляду $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ з властивістю $x_i + x_j = 1$ для деяких i, j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Елемент групи $K_n(K)$ з представником $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ позначаємо $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

К.Като [6] і А.Н.Паршин [7] означили гомоморфізм

$$\Psi_K : K_n(K) \to Gal(K^{ab}/K)$$

з n-ої групи Мілнора n-вимірного локального поля K у групу Галуа максимального абельового розширення поля K. Відтворюємо означення, запропоноване К.Като, як для зручності читача, так і для того, щоб звернути увагу на те, що це означення придатне і для n-вимірних загальних локальних полів.

Найперше з точної послідовності Куммера

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow K^* \xrightarrow{m} K^* \longrightarrow 1,$$

одержуємо, переходячи до когомологій, ізоморфізм

$$h^1_{m,K} : K^*/K^{*m} \to H^1(K, \mu_m). \tag{1}$$

Використовуючи ізоморфізм (1), можемо означити гомоморфізми

$$h^n_{m,K} : K_n(K) \to H^n(K, \mu_m^{\otimes n}),$$

для яких $h^n_{m,K}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = h^1_{m,K}(x_1) \cup \cdots \cup h^1_{m,K}(x_n)$, де $\cup$ означає $\cup$-добуток.

Розглянемо добуток

$$H^1(K, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times K_n(K) \to H^{n+1}(K, \mu_m^{\otimes n}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \tag{2}$$

(останній ізоморфізм в (2) існує на підставі тердження 1, наведеного нижче), який ставить у відповідність парі $\chi \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \{x_1, \ldots, x_n\} \in K_n(K)$ $\cup$-добуток

$$\chi \cup h^n_{m,K}\{x_1, \ldots, x_n\} \in H^{n+1}(K, \mu_m^{\otimes n}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Переходячи в (2) до індуктивної границі за m, одержуємо, в припущенні $char k = 0$, добуток

$$H^1(K) \times K_n(K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Добуток (3) і визначає гомоморфізм

$$\Psi_K : K_n(K) \to Hom(H^1(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Gal(K^{ab}/K).$$

Як і для n-вимірних локальних полів, для n-вимірних загальних локальних полів правильні твердження 1 та теорема 1.

Твердження 1. *Нехай k – квазіскінченне поле, m – натуральне число, $char k$ не ділить m, μ_m – група коренів m-го степеня з одиниці в алгебраїчному замиканні поля k, $\mu_m^{\otimes n} = \mu_m \otimes \cdots \otimes \mu_m$ – n-кратний тензорний добуток з очевидною дією групи $Gal(K_{sep}/K)$. Тоді*

$$H^{n+1}(K, \mu_m^{\otimes n}) \cong \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

Наслідок 1. *Зберігаючи умови твердження 1, припустимо додатково, що* $chark = 0$. *Тоді* $H^{n+1}(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Нехай* K *-* n*-вимірне загальне локальне поле. Припустимо, що* $chark = 0$. *Тоді для кожного скінченного абельового розширення* L/K *існує канонічний гомоморфізм норми*

$$N_{L/K} : K_n(L) \to K_n(K)$$

такий, що гомоморфізм Ψ_K *індукує ізоморфізм*

$$K_n(K)/N_{L/K}K_n(L) \to Gal(L/K).$$

Доведення цих фактів здебільшого грунтуються на міркуваннях, які використав К.Като для доведення аналогічного результату для n-вимірних локальних полів [6]. Крім того, іхнє доведення можна знайти у праці [8], тому ми не наводимо.

Наступна теорема дає зв'язок між групою Брауера n-вимірного загального локального поля K, для якого $chark = 0$ з $n-1$ вимірною групою Мілнора поля K.

Теорема 2. *Нехай* K *-* n*-вимірне загальне локальне поле, для якого* $chark = 0$. *Тоді існує ін'єктивний гомоморфізм*

$$\Phi_K : BrK \to Hom(K_{n-1}(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

для якого $\Phi_K((\chi, a))(b) = \chi(\Psi_K(a, b))$ *для довільного* $\chi \in H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $a \in K^*$. $(\chi, a) \in BrK$ *- елемент групи Брауера поля* K, *визначений у §1 Розділу 14 книги [1],* $b \in K_{n-1}(K)$.

Доведення. Використаємо схему доведення, яку запропонував К.Като для аналогічної властивості групи Брауера n-вимірного локального поля (див. [6], частина II, твердження 3, с.674). За наслідком 2 з леми 16 другої частини праці [6] для довільного поля k група $H^2(k) = \varinjlim H^2(k, \mu_m)$ ізоморфна групі Брауера поля k. Використовуючи цей факт та означений вище гомоморфізм $h^n_{m,K}$ для n-вимірного загального локального поля K, можемо розглянути добуток

$$BrK \times K_{n-1}(K) \xrightarrow{h_K} H^{n+1}(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{4}$$

(останній ізоморфізм - це ізоморфізм з наслідку 2), який парі (w, a) ставить у відповідність $\cup$-добуток $w \cup \varinjlim h^{n-1}_{m,K}(\{x_1, \dots, x_{n-1}\})$, де $w \in BrK = H^2(K)$, $\varinjlim h^{n-1}_{m,K}$ - індуктивна границя визначених вище гомоморфізмів $h^{n-1}_{m,K}$, $\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \in K_{n-1}(K)$. Добуток (4) визначає гомоморфізм

$$\Phi_K : BrK \longrightarrow Hom(K_{n-1}(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

У праці [6] К.Като показав, що доведення ін'єктивності гомоморфізму Φ_K зводиться до доведення ін'єктивності гомоморфізму

$$\phi_{L/K} : K^*/N_{L/K}L^* \to Hom(K_{n-1}(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

$$a \to (b \to \Phi_K(\{\chi, a\})(b) = \chi \circ \Psi_K(\{a, b\}),$$

де p – просте число, χ – характер порядку p поля K, L/K – відповідне характеру χ циклічне розширення степеня p.

Ін'єктивність гомоморфізму $\phi_{L,K}$ доводимо індукцією за n. Якщо $n = 1$, то L/K – циклічне розширення простого степеня звичайного загального локального поля K і ін'єктивність гомоморфізму $\phi_{L/K}$ випливає з теорії полів класів загальних локальних полів [1].

Для обгрунтування кроку індукції (при наших припущеннях на поле K) досить розглянути два випадки.

1. Нехай L/K – нерозгалужене розширення простого степеня p, E/F – відповідне розширення полів лишків полів K і L. К.Като [6] довів, що існує комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} K^*/N_{L/K}L^* & \xrightarrow{\phi_{L/K}} & Hom(K_{n-1}(K)/U^{(1)}_{n-1}(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ F^*/N_{E/F}E^* & \xrightarrow{\phi_{E/F}\oplus\chi\circ\Psi_F} & Hom(K_{n-2}(F), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus Hom(K_{n-1}(F), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{array} \tag{5}$$

в якій вертикальні стрілки є ізоморфізмами, χ – характер відповідний до розширень E/F та L/K, $U^{(1)}_{n-1}(K)$ – підгрупа групи $K_{n-1}(K)$ породжена елементами вигляду $\{1+y, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, де $y \in \mathfrak{M}_K$ ($\mathfrak{M}_K$ – максимальний ідеал кільця цілих дискретно нормованого поля K з полем лишків F), $x_2, \dots, x_{n-1} \in K^*$.

2. Якщо L/K – цілком розгалужене розширення простого степеня p, то поле K містить первісний корінь p-го степеня з одиниці й існує комутативна діаграма ([6], с.676)

$$\begin{array}{ccc} K^*/N_{L/K}(L^*) & \xrightarrow{\Psi_{L,K}} & Hom(K_{n-1}(K)/pK_{n-1}(K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow\cong & & \downarrow \\ F^*/F^{*p} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_F} & Hom(K_{n-1}(F), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \end{array} \tag{6}$$

в якій ліва вертикальна стрілка є ізоморфізм і $\tilde{\Psi}_F$ – мономорфізм.

Діаграми (5) і (6) допомагають обгрунтувати крок індукції і, отже, ін'єктивність гомоморфізму Φ_K доведена.

Зауваження. Для $n = 2$ гомоморфізм Φ_K має такий простий вигляд $\Phi_K : BrK \to Hom(K^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

У цьому випадку, при наших припущеннях на поле K (тобто в припущенні $chark = 0$), ін'єктивність гомоморфізму Φ_K одержують за індукцією з наступних двох комутативних діаграм з точними рядками (див. [6], Частина 1, с. 349, 350)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (BrF)_m & \longrightarrow & (BrK)_m & \longrightarrow & \\ & & \downarrow\cong & & \downarrow\Phi_K & & \\ 0 & \longrightarrow & \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & Hom(K^*, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & (X_F)_m & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow\alpha & & \\ \longrightarrow & Hom(F^*, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{7}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (X_F)_m & \longrightarrow & (X_K)_m & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\hat\Phi_K} & & \\
0 & \longrightarrow & Hom(F^*, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & Hom(K_2(K), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\longrightarrow & Hom(k^*, \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\
\longrightarrow & Hom(K_2(F), \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0,
\end{array}
\tag{8}
$$

де F – поле лишків поля K, X_K, X_F – групи характерів полів K і F, α – гомоморфізм теорії полів класів звичайного загального локального поля [1], а β – гомоморфізм, визначений ручним символом (,) (див. [1], Розділ 14, § 3)

$$K_2(F) \xrightarrow{(,)} k^* \longrightarrow \frac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

У комутативних діаграмах (7) і (8) гомоморфізми α і β є ізоморфізмами; α – ізоморфізм на підставі локальної теорії полів класів для загального локального поля [1], а ізоморфність β випливає з леми 2, § 3, Розділу 14 книги [1]. Тому для двовимірного локального поля правильний такий сильніший варіант теореми 2.

Теорема 3. *Нехай K – двовимірне загальне локальне поле, для якого $char k = 0$. Тоді існує ін'єктивний гомоморфізм*

$$\Phi_K : BrK \to Hom(K^*, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

який індукує ізоморфізм

$$(BrK)_m \cong Hom(K^*, \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}).$$

Крім того,

$$(X_K)_m \cong Hom(K_2(K), \tfrac{1}{m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$$

для кожного натурального числа m.

Покажемо, що ядро гомоморфізму Φ_K для двовимірного загального локального поля нульової характеристики обчислюється так само, як і для двовимірного локального поля.

У праці К.Като доведена така лема.

Лема 1. *(Като) Нехай k – довільне поле, A – центральна проста алгебра над полем k. Нехай $r \geqslant 1$ і $a \in k^*$. Тоді наступні три умови еквівалентні*

(i) $a \in Nrd_{A/k}A^*$;

(ii) $a \in Nrd_{M_r(A)/k}M_r(A)^*$, де $M_r(A)$ означає кільце матриць порядку r над A;

(iii) Існує скінченне розширення E поля k таке, що $a \in N_{E/k}E^*$ і таке, що алгебра A розщеплюється в полі E.

Умови (i) та (iii) леми 1 дають змогу коректно означити групу $Nrd(W/K) = Nrd_{A/k}A^* \subset K^*$, де $W \in BrK$, A – будь-який представник класу W і Nrd – гомоморфізм редукованої норми.

У цих позначеннях правильний такий результат.

Теорема 4. *$Ker(\Phi_K(W)) = Nrd(W/K)$, якщо K двовимірне загальне локальне поле, для якого $chark = 0$.*

Доведення. Враховуючи той факт, що локальна теорія полів класів має аналог для загальних локальних полів [1], можемо застосувати метод К.Като, за допомогою якого він довів аналогічний факт для двовимірних локальних полів (див. [6], Частина 1, §5). Нагадаємо, що гомоморфізм Φ_K визначають добутком $K^* \times BrK \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, який ставить у відповідність парі елементів $a \in K^*$, $W_K \in BrK$ елемент $< a, W_K > \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Якщо L/K – скінченне розширення поля K, то маємо

$$< a, W_L >_L = < N_{L/K}a, W >_K \tag{9}$$

для довільних елементів $a \in L^*, W \in BrK$. Згідно з лемою 1 для кожного елемента $a \in Nrd(W/K)$ з того, що $a \in Nrd(W/K)$ випливає існування скінченного розширення L/K і елемента $b \in L^*$ таких, що $W_L = 0$ і $a = N_{L/K}b$. Тому за формулою (9) $< a, W >_K = < b, W_L >_L = 0$. Це доводить включення

$$Nrd(W/K) \subset Ker(\Phi(W)). \tag{10}$$

Доведення того факту, що включення (10) є насправді рівністю, розбиваємо на два кроки. Спочатку (перший крок) методом математичної індукції доводимо таке: коли

$$Nrd(W/K) = Ker(\Phi(W)) \tag{11}$$

для тих $W \in BrK$, які мають простий порядок p, то рівність (11) правильна і для всіх $W \in BrK$. Це доведення грунтується на використанні властивості (9) і дослівно повторює міркування К.Като ([6], с.354), тому ми його опускаємо.

Другий крок полягає у доведенні рівності (9) у випадку, коли $W \in Br(K)_p$, $W \neq 0$ і p – просте число. Оскільки за теоремою 3 $\Phi_K(W) \neq 0$, то образ гомоморфізму $\Phi_K(W)$ має порядок p. Тому для доведення рівності (11) потрібно показати, що $|K^*/Nrd(W/K)| \leqslant p$.

З наших припущень щодо поля K випливає, що $W \in Br(K_{nr}/K)$, де K_{nr} – максимальне нерозгалужене розширення поля K.

Розглянемо точну розщеплювану послідовність

$$0 \longrightarrow BrF \xrightarrow{f} Br(K_{nr}/K) \xrightarrow{g} X_F \longrightarrow 0$$

(див. [1], Розділ 12, теорема 2), де F – поле лишків поля K. Нехай D – тіло над полем K, яке відповідає елементу $W \in Br(K_{nr}/K)$. Якщо $W = f(W_0)$ для деякого $W_0 \in BrF$, то алгебра лишків C алгебри D є алгеброю з діленням з центром F, відповідною до елемента W_0. Оскільки порядок W_0 дорівнює p, то $dim_F C = p^2$ згідно з теорією полів класів загального локального поля [1].

Нехай F' – максимальне комутативне підполе алгебри C, L – нерозгалужене розширення поля K, яке відповідає полю F'. Маємо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} BrF & \longrightarrow & Br(K_{nr}/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BrF' & \longrightarrow & Br(L_{nr}/L), \end{array} \tag{12}$$

яка свідчить про те, що поле L розщеплює тіло D. Тому $dim_K D = p^2$ і з нерозгалуженості розширення L/K випливає

$$U_K^{(1)} = N_{L/K} U_L^{(1)} \subset Nrd_{D/K} D^*.$$

Відображення $Nrd_{D/K} : U_D/U_D^{(1)} \to U_K/U_K^{(1)}$ сюр'єктивне, бо збігається з відображенням $Nrd_{C/F} : C^* \to F^*$, яке сюр'єктивне згідно, наприклад, з [9] або [10]. Тому $U_K \subset Nrd_{D/K} D^*$ і, оскільки $dim_K D = p^2$, то відображення $Nrd_{D/K} : D^*/U_D \to K^*/U_K$ зводиться до відображення $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; 1 \to p$. Тому $|K^*/Nrd_{D/K} D^*| = p$.

Припустимо, що $W \in Br(K_{nr}/K)_p$ і $W \notin Imf$. Нехай $\chi = g(W)$ і нехай F' – циклічне розширення поля F відповідне до характеру χ. Нехай $\tilde{\chi}$ – нерозгалужений елемент групи X_K, який відповідає χ, L – відповідне характеру $\tilde{\chi}$ Нерозгалужене циклічне розширення поля k. Покажемо, що $W_L = 0$. Справді, згідно з [1], Розділ 12, $g((\tilde{\chi}, \pi)) = \chi = g(W)$ (див. [1], Розділ 12, зауваження після кроку 1 доведення твердження 2; означення символу $(\tilde{\chi}, \pi)$ можна знайти в [1], Розділ 14). За теорією полів класів загального локального поля [1] елементи з групи $(BrF)_p$ розщеплюються в кожному розширенні поля F степеня p; зокрема, в розширенні F'. Тому комутативна діаграма (12) свідчить про те, що $W - (\tilde{\chi}, \pi)$ розщеплюється в полі L, отже, $W_L = 0$. Як показано в [1], Розділ 14, §1, $W = (\tilde{\chi}, a)$ для деякого $a \in K^*$. Позаяк $g((\tilde{\chi}, a)) = v_K(a)\chi$, то $W = (\tilde{\chi}, \pi')$ для деякого простого елемента $\pi' \in K$. Звідси випливає, що алгебра D має такі властивості $dim_K D = p^2$; $U_K^{(1)} = N_{L/K} U_L^{(1)} \subset Nrd_{D/K} D^*$.

Відображення $Nrd_{D/K} : U_D/U_D^{(1)} \to U_K/U_K^{(1)}$ збігається з відображенням $N_{F'/F} : F'^* \to F^*$, і $-\pi \in Nrd_{D/K} D^*$. Звідси одержуємо, що $|K^*/Nrd_{D/K} D^*| = |F^*/N_{F'/F} F'^*| = p$ за теорією полів класів загального локального поля [1], і це завершує доведення теореми 4.

---

1. *Serre J.-P.* Corps locaux. – Paris, 1962.
2. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую K-теорию. – М., 1974.
3. *Беккер Б.М.* Абелевы расширения полного дискретно нормированного поля конечной высоты // Алгебра и анализ. – 1991. – Т.3. – N 6. – С.76-84.
4. *Фесенко И.Б.* Многомерная локальная теория полей классов // Док. АН СССР. – 1991. – Т.318. – N 1. – С.47-50.
5. *Neukirch J.* Neubegrundung der Klassenkorpertheorie // Math. Z. – 1984. – Vol. 186. – N 4. – P.557-574.
6. *Kato K.* A generalization of local class field theory by using K-groups // J. Fac. Sci. Tokyo. Sect. 1A.I. – 1979. – Vol. 26. – P.303-376; II. – 1980. – Vol. 27. – P.603-683; III. – 1982. – Vol. 29. – P.31-43.
7. *Паршин А.Н.* Локальная теория полей классов // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1984. – Т. 165. – С.143-170.
8. *Андрийчук В.И.* О гомоморфизме Като-Паршина для n-мерных общих локальных полей // Вопросы алгебры (в печати).

9. *Платонов В.П., Янчевский В.И.* О гипотезе Хардера // Док. АН СССР. 1975. – Т. 221. – N 4. – С.784-787.

10. *Стахів Л.Л.* Про приведену групу Уайтхеда для тіл над псевдолокальними полями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С.5-9.

THE BRAUER GROUP OF n-DIMENCIONAL GENERAL LOCAL FIELDS

Vasyl' Andriychuk

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

It is proved that there exists an injective homomorphism Φ_K from the Brauer group $Br\ K$ of an n-dimensional general local field K to the group $Hom\ (K_{n-1}(K),\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, where $K_{n-1}(K)$ is the $n-1$-th Milnor group of K. Also it is proved that in the case $n = 2\ Ker\ (\Phi_K(W) = Nrd\ (W)$, where $W \in Br\ K$ and Nrd is the reduced norm homomorphism.

Key words: higher general local fields, class field theory, Milnor group, Brauer group.

Стаття надійшла до редколегії 04.10.2001

Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.13–22

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.13–22

УДК 517.947

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ДЕЯКИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

Любов БАБ'ЯК, Омелян ГОРБАЧУК
Дрогобицький державний педагогічний університет
вул. Стрийська, 3, м.Дрогобич, Львівська обл., Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено необхідні та достатні умови розв'язності однієї оберненої задачі для еволюційного рівняння в банаховому просторі.

Ключові слова: еволюційні рівняння в банаховому просторі, обернені задачі.

Розглянемо у банаховому просторі $\mathcal{B}$ для диференціального рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t), \qquad t \in [0, \infty) \tag{1}$$

таку задачу:

$$y(0) = y_0, \quad y(t_k) = y_k, \quad k \in \overline{1,n}, \qquad (C,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty, \tag{2}$$

де A – лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ у просторі $\mathcal{B}$, $f(t)$ – функція, задана на проміжку $[0,\infty)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{B}$, $t_k, k \in \overline{1,n}$ – задані різні точки проміжку $(0,\infty)$, $y_k, k \in \overline{0,n}$, – відомі елементи з області визначення $D(A)$ оператора A, y_∞ – заданий елемент банахового простору $\mathcal{B}$, $(C,1) \lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ – границя за Чезаро на нескінченності.

Нагадаємо, що границю за Чезаро функції $y(t)$ на нескінченності визначають так (див. [1], с. 519):

$$(C,1) \lim_{t\to\infty} y(t) \overset{def}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t y(\xi) d\xi.$$

Класичним розв'язком рівняння (1) називається сильно неперервно диференційовна при $t \in [0,\infty)$ функція $y(t)$ у банаховому просторі $\mathcal{B}$ така, що $y(t) \in D(A)$ для $t \in [0,\infty)$ і $y(t)$ задовольняє при всіх $t \in [0,\infty)$ рівняння (1), де $f(t)$ – задана сильно неперервна функція у просторі $\mathcal{B}$ при $t \in [0,\infty)$ (див. [2]).

Крім того, дамо означення слабкого розв'язку рівняння (1). Розглядаємо клас функцій $\varphi(t)$, що неперервно диференційовні на $[0,\infty)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{B}$ і $\varphi(0) = 0, \varphi(\infty) = 0, \varphi(t) \in D(A^*)$ для всіх $t \in [0,\infty)$, де A^* – спряжений оператор до A, $A^*(\varphi(t))$ – неперервна функція у просторі $\mathcal{B}$ при $t \in [0, \infty)$. Неперервна функція $y(t), t \in [0, \infty)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{B}$ називається слабким розв'язком рівняння (1), якщо виконується умова (див. [2])

$$\int\limits_0^\infty y(t)\varphi'(t)dt = -\int\limits_0^\infty y(t)A^*(\varphi(t))dt - \int\limits_0^\infty f(t)\varphi(t)dt.$$

Варто зауважити, що класичний розв'язок завжди є слабким.

Нехай у рівнянні (1) функція $f(t)$ є кусково неперервною, тобто неперервною скрізь при $t \in [0, \infty)$, за винятком скінченної кількості точок, і має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} a_0, 0 \leqslant t < t_1; \\ a_k, t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad k \in \overline{1, n-1}, \\ a_n, t_n \leqslant t < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

де $a_k \in \mathcal{B}, k \in \overline{0, n}, t_k, k \in \overline{1, n},$ – задані точки з інтервалу $(0, \infty)$.

Задача (1),(2) за умови (3) полягає у тому, що потрібно знайти функцію $y(t)$ і невідомі параметри $a_k \in \mathcal{B}, k \in \overline{0, n}$ такі, щоб функція $y(t)$ задовольняла рівняння (1) з правою частиною (3), а у заданих різних точках 0 і $t_k, k \in \overline{1, n}$ інтервалу $(0, \infty)$ набувала відповідно відомих значень $y_k \in D(A), k \in \overline{0, n}$ і мала границю за Чезаро першого порядку на нескінченності, що дорівнює заданому елементові $y_\infty \in \mathcal{B}$.

Задачі, аналогічні до (1),(2), вивчав Ю. С. Ейдельман [3-5]. У працях розглядали у банаховому просторі E двоточкову задачу

$$\frac{dv}{dt} = Av + f(t) + p, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{4}$$

$$v(0) = v_0, \quad v(t_1) = v_1, \tag{5}$$

де A – лінійний необмежений оператор, $f(t)$ – неперервна на відрізку $[0, t_1]$ функція зі значеннями в просторі E, p – невідомий параметр з E. Задача полягала у відшуканні пари $(v(t), p)$, що задовольняє диференціальне рівняння (4) і крайові умови (5).

Ю. С. Ейдельман при дослідженні двоточкової задачі (4), (5) отримав необхідні та достатні умови однозначної її розв'язності, а також з'ясував зв'язок між єдиністю розв'язку задачі (4), (5) та розміщенням точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A за умови, що A є генератором півгрупи $T(t)$ класу (C_0). За умови аналітичності півгрупи $T(t)$ виявили, що для однозначної розв'язності задачі (4), (5) при довільних допустимих даних v_0 і v_1, $f(t)$ суттєву роль відіграє умова: спектр оператора A не містить точок вигляду $\frac{2\pi ik}{t_1}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Неоднорідна частина рівняння (4) функція $f(t)$ для доведення одержаних результатів ролі не відіграє.

До задач цього типу зводяться обернені задачі про визначення невідомого доданка у правій частині диференціального рівняння у частинних похідних за заданою у скінченний момент часу додатковою умовою. Наприклад, у деяких задачах диференціальних рівнянь неоднорідною частиною $f(t)$ рівняння (4) є сила, яку потрібно знайти таку, щоб траєкторія руху (розв'язок) деякого тіла у задані моменти часу $t_k, k \in \overline{1,n}$, проходила через наперед відомі (задані) точки простору.

Дослідження різноманітних задач для диференціальних рівнянь мають безпосередній вихід на багато прикладних задач, зокрема тих, що стосуються процесів управління та оптимізації. За рахунок вибору конкретного оператора в еволюційному рівнянні та певних початкових крайових умов отримують рівняння, що описують різні еволюційні процеси.

У праці [6] розглядали задачу у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + p, \quad t \in [0.\infty), \tag{6}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in D(A), \quad (C,1) \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty,\, y_\infty \in \mathcal{B}, \tag{7}$$

де A – твірний оператор (генератор) обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0) у просторі $\mathcal{B}$, p – невідомий параметр, що не залежить від t, з простору $\mathcal{B}$. У ній було визначено необхідну і достатню умови існування й єдиності розв'язку $(y(t),p)$ задачі (6), (7), а саме: ця задача має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $y_\infty \in D(A)$ і $Py_0 = Py_\infty$, де P – проектор на підпростір $\operatorname{Ker} A$ (ядро оператора A) у розкладенні банахового простору $\mathcal{B}$ на пряму суму ядра $\operatorname{Ker} A$ та замикання образу $\overline{R(A)}$ оператора A. Крім того, виявлено, що $p = -Ay_\infty, y(t) = U(t)(y_0 - y_\infty) + y_\infty$, тобто визначено невідомий параметр p та розв'язок $y(t)$.

Відомо (див. [1], т.18.6.2) таке: якщо оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0) у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$, то простір $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dotplus \overline{R(A)}$.

Нехай банаховий простір $\mathcal{B}$ є рефлексивним.

Теорема 1. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0). Слабкий розв'язок задачі (1),(2), де функція $f(t)$ має вигляд (3), існує тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*
(a) $A(y_{k+1} - y_k) \in R(U(t_{k+1} - t_k) - I)$, $k \in \overline{0, n-1}$;
(b) $y_\infty \in D(A)$;
(c) $Py_n = Py_\infty$, (8)
де $R(\cdot)$ – образ оператора $(\cdot)$, I – одиничний оператор, P – проектор на підпростір $\operatorname{Ker} A$.

Доведення. Достатність. Нехай виконуються умови (8). Розв'язок $y(t)$ задачі (1),(2), де функція $f(t)$ має вигляд (3), будуватимемо на проміжках $t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \overline{0,n}\,(t_0 = 0, t_{n+1} = \infty)$, за відомою формулою (див. [7], с.158-159)

$$y(t) = U(t - t_k)y_k + \int_{t_k}^{t} U(t-s)a_k ds. \tag{9}$$

На проміжках $[t_k, t_{k+1}), k \in \overline{0,n}$ цей розв'язок буде класичним.

Якщо $t \in [0, t_1)$, то

$$y(t) = U(t-0)y_0 + \int_0^t U(t-s)a_0 ds$$

$$y(0) = U(0)y_0 = y_0.$$

Знайдемо параметри $a_k, k \in \overline{0,n}$ рівняння (1) за умови (3) такі, щоб виконувались умови (2). Отримаємо

$$y(t_{k+1}) = U(t_{k+1} - t_k)y_k + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)a_k ds = y_{k+1},\ k \in \overline{0, n-1},$$

а звідси

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)a_k ds = y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k,\ k \in \overline{0, n-1}.$$

Застосуємо до обох частин оператор A

$$A\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)a_k ds\right) = A\left(\int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} U(\eta)a_k d\eta\right) =$$
$$= A\left[y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k\right], \quad k \in \overline{0, n-1}.$$

З іншого боку, за теоремою 2.4 (див. [8], с. 4) маємо

$$A\left(\int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} U(\eta)a_k d\eta\right) = \int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} AU(\eta)a_k d\eta = \int\limits_{0}^{t_{k+1}-t_k} (U(\eta))' a_k d\eta =$$
$$= (U(t_{k+1} - t_k) - I)a_k, \quad k \in \overline{0, n-1}.$$

Прирівнявши їх, одержимо

$$(U(t_{k+1} - t_k) - I)a_k = A\left[y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k\right] =$$
$$= A[y_{k+1} - (U(t_{k+1} - t_k) - I)y_k - y_k] =$$
$$= A(y_{k+1} - y_k) - A(U(t_{k+1} - t_k) - I)y_k,\ k \in \overline{0, n-1}. \tag{10}$$

Враховуючи те, що $y_k \in D(A), k \in \overline{0,n}$ і оператор A та півгрупа $U(t)$ комутують (див. [8], с.5), з (10) визначають параметри $a_k, k \in \overline{0, n-1}$, оскільки $A(y_{k+1} - y_k) \in R(U(t_{k+1} - t_k) - I), k \in \overline{0, n-1}$.

Параметр a_n знайдемо з того, що $(C, 1) \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y_\infty$. Оскільки при $t \in [t_n, \infty)$ функція $y(t)$ має вигляд

$$y(t) = U(t - t_n)y_n + \int\limits_{t_n}^{t} U(t - s)a_n ds = U(t - t_n)y_n + \int\limits_{0}^{t-t_n} U(\eta)a_n d\eta,$$

то границя за Чезаро функції $y(t)$ на нескінченності

$$(C, 1) \lim_{t\to\infty} y(t) = (C, 1) \lim_{t\to\infty} U(t - t_n)y_n + (C, 1) \lim_{t\to\infty} \int\limits_{0}^{t-t_n} U(\eta)a_n d\eta.$$

Оскільки $(C,1)\lim\limits_{t\to\infty} U(t-t_n)y_n = Py_n$ і відомо (див. [6], с. 1264, лема 2), що $(C,1)\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^{t-t_n} U(\eta)a_n d\eta$ існує тоді і тільки тоді, коли $a_n = Az$, де $z \in D(A)$, то одержимо таке:

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = Py_n + (C,1)\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^{t-t_n} U(\eta)Azd\eta =$$
$$= Py_n + (C,1)\lim_{t\to\infty}[U(t-t_n)z - z] =$$
$$= Py_n + Pz - z = Py_n - (I-P)z = Py_n - Qz = y_\infty,$$

де $Q := I - P, Q$ – проектор на підпростір $\overline{R(A)}$ у розкладенні $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dotplus \overline{R(A)}$.

Звідси маємо, що $z = -y_\infty + q$, де $q \in \operatorname{Ker} A$. Через те, що $y_\infty \in D(A)$, параметр $a_n = Az = -Ay_\infty$. Оскільки за умовою $Py_n = Py_\infty$, то

$$(C,1)\lim_{t\to\infty} y(t) = Py_n - Qz = Py_n + (I-P)y_\infty = Py_n - Py_\infty + y_\infty = y_\infty.$$

Отже, якщо виконуються умови (8), то визначають функцію $y(t)$ з (9) і невідомі параметри $a_k, k \in \overline{0, n-1}$, з (10), $a_n = -Ay_\infty$ такі, що $y(t)$ задовольняє рівняння (1) з неоднорідною частиною вигляду (3) і виконуються умови (2).

Функція $y(t)$ на проміжку $[0,\infty)$ буде неперервною, але в точках $t_k, k \in \overline{1,n}$ її похідна в класичному розумінні не існує. Враховуючи те, що функція $y(t)$ обмежена і неперервна скрізь на $[0,\infty)$, диференційовна всюди за винятком скінченної кількості точок (а саме $t_k, t \in \overline{1,n}$), простими обчисленнями можна переконатися, що функція $y(t)$ є слабким розв'язком на $[0,\infty)$ задачі (1), (2) з умовою (3).

Достатність доведено.

Необхідність твердження. Нехай існує функція $y(t)$ вигляду (9), яка є розв'язком рівняння (1) з неоднорідною частиною вигляду (3) і задовольняє умови (2). Тоді з (10) отримуємо, що $A(y_{k+1} - y_k)$ повинні належати $R(y(t_{k+1} - t_k) - I), k \in \overline{0, n-1}$. Оскільки $a_n = -Ay_\infty$, то y_∞ повинен належати $D(A)$. Границя за Чезаро першого порядку функції $y(t)$ на нескінченності дорівнює y_∞, тому що $(C,1)\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = Py_n - Py_\infty + y_\infty$, одержуємо необхідність виконання умови $Py_n = Py_\infty$.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Ми знайшли розв'язок задачі (1), (2) з умовою (3), який є слабким. Його можна замінити розв'язком довільного степеня гладкості, а саме: якщо є слабкий розв'язок задачі, то знайдено неоднорідну частину $f(t)$ рівняння (1), за якою визначають розв'язок

$$y(t) = U(t)y(0) + \int\limits_0^t U(t-s)f(s)ds.$$

Можна знайти функції $f_n(t)$, обмежені і неперервні на $[0,\infty)$, довільного степеня гладкості на $[0,\infty)$, які рівномірно збігаються до функції $f(t)$ за винятком скінченної кількості інтервалів як завгодно малої довжини, які оточують точки $t_k, k \in \overline{1,n}$, у яких задана функція $f(t)$. Якщо візьмемо праву частину $f_n(t)$, то розв'язком рівняння (1) буде функція $U(t)y(0) + \int\limits_0^t U(t-s)f_n(s)ds$, яка рівномірно збігається за нормою до слабкого розв'язку $y(t)$.

Теорема 2. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0) і нехай задача (1),(2) з умовою (3) має розв'язок. Цей розв'язок єдиний тоді і тільки тоді, коли*

$$1 \notin \sigma_p(U(t_{k+1} - t_k)),\ k \in \overline{0, n-1},$$

де $\sigma_p(\cdot)$ – точковий спектр оператора $(\cdot)$.

Доведення. Нехай задача (1),(2) з умовою (3) має розв'язок. У доведенні теореми 1 подано формули обчислення параметрів $a_k, k \in \overline{0,n}$

$$a_n = -Ay_\infty;$$

$$(U(t_{k+1} - t_k) - I)a_k = A[y_{k+1} - U(t_{k+1} - t_k)y_k],\ k \in \overline{0, n-1}.$$

Звідси легко бачити, що розв'язок задачі (1),(2) єдиний тоді і тільки тоді, коли 1 не належить точковому спектру операторів $U(t_{k+1} - t_k), k \in \overline{0, n-1}$.

Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай A – генератор обмеженої півгрупи $U(t)$ класу (C_0) і нехай задача (1),(2) з умовою (3) має розв'язок. Цей розв'язок є єдиним тоді і тільки тоді, коли серед власних значень оператора A немає точок вигляду*

$$\mu_k = \frac{2\pi i m}{t_k - t_{k-1}},\ k \in \overline{1,n},\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0. \tag{11}$$

Доведення. Використавши теорему 2.4 (див. [8], с. 46), яка дає зв'язок точкового спектра $\sigma_p(U(t))$ півгрупи $U(t)$ і точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A, а саме:

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(U(t)) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\},$$

застосовуючи теореми 1 і 2, обчисливши спектр, отримаємо умови теореми.

Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0). Якщо точки $\mu_k, k \in \overline{1,n}$ вигляду (11) належать резольвентній множині $\rho(A)$ оператора A, то слабкий розв'язок задачі (1),(2) за умови (3) існує і є єдиним.*

Доведення теореми 4 випливає з теореми 3 і формули (10) знаходження параметрів $a_k, k \in \overline{0, n-1}$, яку одержали у доведенні теореми 1.

Зауваження 2. Обмеженість півгрупи $U(t)$, яку генерує оператор A, є несуттєвою, оскільки у протилежному випадку можна перейти до півгрупи $e^{-\omega_0 t}U(t)$, де ω_0 – тип півгрупи $U(t)$.

У книзі А. В. Балакрішнана [9] показано застосування теорії півгруп операторів у банаховому просторі на прикладах диференціальних рівнянь, відомих з математичної фізики, а саме хвильового рівняння, рівняння теплопровідності, рівняння Шредінгера (див. [9], с. 235-245).

Розглянемо у банаховому просторі $L_2(R^n)$ для лінійного рівняння у частинних похідних n - го порядку

$$\frac{\partial u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{\sum_{k=1}^{n} i_k = s} a_{i_1 \dots i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^s u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial {x_1}^{i_1} \dots \partial {x_n}^{i_n}} + f(t, x_1, \dots, x_n), \quad (12)$$

$$t \in [0, \infty), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n,$$

таку задачу:

$$\begin{gathered} u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u(t_k, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k \in \overline{1, n}, \\ (C, 1) \lim_{t \to \infty} u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{gathered} \quad (13)$$

де

$$A := \sum_{\sum_{k=1}^{n} i_k = s} a_{i_1 \dots i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^s}{\partial {x_1}^{i_1} \dots \partial {x_n}^{i_n}} \quad (14)$$

– лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ у просторі $L_2(R^n)$, $f(t, x_1, \dots, x_n)$ – функція, задана на множині $[0, \infty) \times R \times R \times \dots \times R$, зі значеннями у просторі $L_2(R^n)$, $t_k, k \in \overline{1, n}$, – задані різні точки інтервалу $(0, \infty)$, $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k \in \overline{0, n}$, – відомі елементи з області визначення $D(A)$ оператора A, $\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – заданий елемент простору $L_2(R^n)$.

Зауваження 3. У ролі банахового простору $\mathcal{B}$ ми взяли простір $L_2(R^n)$. Треба зазначити, що можна розглядати довільний банаховий простір, де функції задають у деякій області Ω. Якщо ця область обмежена, то треба подати на межі граничні умови.

Нехай у рівнянні (12) неоднорідна частина $f(t)$ є кусково неперервною, тобто неперервною скрізь при $t \in [0, \infty)$, за винятком скінченної кількості точок, і має вигляд

$$f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_n), & 0 \leqslant t < t_1, \\ \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), & t_k \leqslant t < t_{k+1}, k \in \overline{1, n-1}, \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n), & t_n \leqslant t < \infty, \end{cases} \quad (15)$$

де $\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_2(R^n), k \in \overline{0, n}, t_k, k \in \overline{1, n}$ – задані точки з інтервалу $(0, \infty)$.

Задача (12), (13) за умови (15) полягає у тому, що потрібно знайти функцію $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ і невідомі параметри $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_2(R^n), k \in \overline{0, n}$ такі, щоб функція $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ задовольняла рівняння (12) з правою частиною (15) і умови (13).

Відомий такий факт: для того щоб задача Коші

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

$$x(0) = x_0 \in D(A),$$

де A – замкнений оператор, була рівномірно коректною, необхідно і достатньо, щоб A був твірним оператором (генератором) півгрупи класу (C_0) (див. [7], т.2.8, с. 64).

Зазначимо, що загалом задача Коші з оператором A вигляду (14) є рівномірно коректною, а оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0).

Теорема 5. *Нехай згадана задача Коші для оператора A вигляду (14) є рівномірно коректною і виконується умова*

(a) $\mu_k = \frac{2\pi i m}{t_{k+1}-t_k} \in \rho(A), k \in \overline{0, n-1}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0.$ (16)

Слабкий розв'язок задачі (12), (13) за умови (15) існує і є єдиним тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

(b) $\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(A)$;

(c) $P(\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)),$ (17)

де $\rho(A)$ – резольвентна множина оператора.

Доведення. Нехай виконуються умови (16), (17). Розв'язок $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ задачі (12), (13) з неоднорідною частиною вигляду (15), будуватимемо на проміжках $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \overline{0, n}$ $(t_0 = 0, t_{n+1} = \infty)$ за формулою

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= U(t - t_k)\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) + \int\limits_0^t U(t-s)\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)ds, \qquad (18)$$

де $U(t)$ – півгрупа, яку генерує оператор A. На цих проміжках $[t_k, t_{k+1}), k \in \overline{0, n}$ розв'язок (18) буде класичним.

Бачимо, що при $t \in [0, t_1)$

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = U(t-0)\varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n) + \int\limits_0^t U(t-s)\varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n)ds$$

і $u(0, x_1, \dots, x_n) = \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Невідомі функції $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), k \in \overline{0, n}$ рівняння (12) за умови (15) знаходимо такі, щоб виконувались умови (13). Отримаємо

$$u(t_{k+1}, x_1, x_2, \dots, x_n) = U(t_{k+1} - t_k)\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} U(t_{k+1} - s)\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)ds = \varphi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k \in \overline{0, n-1}.$$

Міркуваннями, аналогічними до проведених у доведенні теореми 1, одержимо

$$\left(U(t_{k+1} - t_k) - I\right)\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = A\left(\varphi_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) - \right. \qquad (19)$$

$$\left. - \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) - A\left(U(t_{k+1} - t_k) - I\right)\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k \in \overline{0, n-1},$$

де I – одиничний оператор.

Оскільки за умовою теореми точки $\mu_k = \frac{2\pi i m}{t_{k+1}-t_k}, k \in \overline{0, n-1}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, належать резольвентній множині $\rho(A)$ оператора A, то, використавши теорему 2.4 (див. [8], с.46), яка стверджує, що $e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(U(t)) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}$ і дає зв'язок точкового спектра $\sigma_p(A)$ оператора A і точкового спектра півгрупи $U(t)$, отримаємо, що тоді з (19) однозначно визначають шукані функції $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Невідому функцію $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ знайдемо з того, що $(C,1) \lim\limits_{t\to\infty} u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ повинна дорівнювати $\Psi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Враховуючи те, що за умовою теореми $\Psi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(A)$ і $P(\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = P(\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n))$, провівши аналогічні міркування до поведених у доведенні теореми 1 і врахувавши результати праці [6], отримаємо, що

$$\Psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = -A(\varphi_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Отже, якщо виконуються умови (16),(17), то однозначно визначаються невідомі функції $\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k \in \overline{0,n}$, існує слабкий розв'язок (18) задачі (12),(13) за умови (15).

Достатність доведена.

Необхідність твердження легко довести, провівши описані міркування у зворотному порядку.

Теорема доведена.

Знайдений розв'язок $u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ вигляду (18) є слабким. Якщо ми маємо слабкий розв'язок задачі, то за знайденою неоднорідною частиною $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ рівняння (12) визначається розв'язок

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = U(t)u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) + \int_0^t U(t-s) f(s, x_1, x_2, \dots, x_n) ds,$$

де $U(t)$ – півгрупа, яку генерує оператор A. Можна знайти функції $f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, обмежені і неперервні на $[0, \infty)$ (довільного степеня гладкості на $[0, \infty)$, які рівномірно за t збігаються до функції $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ за винятком скінченної кількості інтервалів як завгодно малої довжини, що оточують точки $t_k, k \in \overline{1,n}$. Якщо праву частину візьмемо $f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то розв'язком рівняння (12) буде функція $U(t)u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) + \int_0^t U(t-s) f_n(s, x_1, x_2, \dots, x_n) ds$, яка, як бачимо, рівномірно збігається за нормою до слабкого розв'язку $y(t)$.

---

1. *Хиллэ Э. Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М., 1962.
2. *Lions J. L.* Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites. – Berlin, 1961.
3. *Ейдельман Ю. С.* Двоточкова крайова задача для диференціального рівняння з параметром// Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1983. – N 4.– С.16-19.
4, *Эйдельман Ю. С.* Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т.23. – N 9. – С.1647-1649.
5. *Ейдельман Ю. С.* Умови розв'язності обернених задач для еволюційних рівнянь// Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз-мат. та тех. науки. – 1990. – N 7. – С.27-31.
6. *Горбачук Е. Л.* Решение одной обратной задачи для эволюционного уравнения в банаховом пространстве// Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 9. – С.1262-1265.

7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М., 1967.

8. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New - York, 1983.

9. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. – М., 1980.

THE CONDITIONS OF SOLVABILITY OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR AN EVOLUTIONARY EQUATION IN BANACH SPACE

Lyubov Babyak, Omelyan Horbachuk

Drogobych State Pedagogic University
3 Stryis'ka Str. Drogobych, Ukraine
Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

We establish necessary and sufficient conditions of solvability of some inverse problems for an evolutionary equation in a Banach space.

Key words: evolutionary equations in Banach space, inverse problems.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.2000
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.23–31

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.23–31

УДК 517.95

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ У ВИПАДКУ НЕЛОКАЛЬНИХ УМОВ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Ірина БАРАНСЬКА, Лілія ПАЗЯК

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено умови існування та єдиності розв'язку обернених задач знаходження коефіцієнта перед невідомою функцією у параболічному рівнянні, коли умови перевизначення мають вигляд лінійної комбінації значення невідомої функції або її похідної на кінці проміжка та інтеграла від невідомої функції.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння.

Відповідний вибір умов перевизначення є одним з важливих питань коректного формулювання обернених задач для рівнянь параболічного типу. У працях [1-4] досліджено можливість використання умов перевизначення нелокальних крайових умов, інтегральних умов та їхніх комбінацій. У [2,3] невідомим був старший коефіцієнт, в [4]- старший і молодший коефіцієнти. У праці [1] для знаходження коефіцієнта при невідомій функції в рівнянні теплопровідності використали інтегральну умову перевизначення.

У цій праці досліджено можливість використання умови перевизначення у вигляді лінійної комбінації значення невідомої функції або її похідної на кінці проміжка та інтеграла від невідомої функції в оберненій задачі визначення молодшого коефіцієнта в рівнянні теплопровідності.

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx} + c(t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $c(t)$ та початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h]. \tag{2}$$

Розглянемо дві пари крайових умов

$$u(0,t) = \mu_1(t), u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{4}$$

та дві умови перевизначення

$$\alpha u(h,t)+\beta\int\limits_0^h u(x,t)dx=\mu_3(t),\quad t\in[0,T],\tag{5}$$

$$\alpha u_x(h,t)+\beta\int\limits_0^h u(x,t)dx=\mu_3(t),\quad t\in[0,T].\tag{6}$$

Надалі вважатимемо, що α,β - сталі та $\alpha^2+\beta^2>0$. Розглядатимемо такі задачі.

Задача 1. Знайти функції $(u(x,t),c(t))$ з класу $C^{2,1}(\overline{Q}_T)\times C[0,T]$, що задовольняють рівняння (1), початкову умову (2) та умови (4), (5).

Задача 2. Знайти функції $(u(x,t),c(t))$ з класу $C^{2,1}(\overline{Q}_T)\times C[0,T]$, що задовольняють рівняння (1), початкову умову (2) та умови (3), (6).

Розглянемо задачу 1. Припустимо, що функція $c\in C[0,T]$ відома, а вихідні дані задовольняють такі умови:

$$\varphi\in C^2[0,h],\ \ \mu_i\in C^1[0,T]\,(i=1,2,3),\ \ f\in C^{1,0}(Q_T),\tag{7}$$

$$\varphi'(0)=\mu_1(0),\ \ \varphi'(h)=\mu_2(0),\ \ \mu_3(t)\neq 0,\ t\in[0,T].\tag{8}$$

За допомогою заміни $u(x,t)=v(x,t)e^{\int\limits_0^t c(\tau)d\tau}$ рівняння (1) зведемо до рівняння теплопровідності, що дає змогу знайти розв'язок задачі (1), (2), (4) у вигляді

$$u(x,t)=\exp\left(\int\limits_0^t c(\tau)d\tau\right)\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi-\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1(\tau)\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_\tau^t c(\sigma)d\sigma\right)d\tau+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2(\tau)\exp\left(\int\limits_\tau^t c(\sigma)d\sigma\right)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\exp\left(\int\limits_\tau^t c(\sigma)d\sigma\right)d\xi d\tau,\tag{9}$$

де $G_2(x,t,\xi,\tau)$ - функція Гріна другої крайової задачі для рівняння теплопровідності. Відомо, що функції Гріна першої ($k=1$) та другої ($k=2$) крайових задач для рівняння теплопровідності визначають формулою

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)}\right)\right),\quad k=1,2.\tag{10}$$

Зведемо задачу 1 до рівняння стосовно невідомої функції $c(t)$. Для цього умову (5) продиференціюємо за t

$$\alpha u_t(h,t)+\beta\int\limits_0^h u_t(x,t)dx=\mu_3'(t)$$

і використаємо рівняння (1) та крайові умови (4), внаслідок чого одержимо рівняння стосовно невідомої $c(t)$

$$c(t) = \frac{1}{\mu_3(t)}\left(\mu_3'(t) - \beta(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - \alpha f(h,t) - \beta\int\limits_0^h f(x,t)dx - \alpha u_{xx}(h,t)\right), \quad (11)$$

де $u_{xx}(h,t)$ визначаємо так:

$$u_{xx}(h,t) = \exp\left(\int\limits_\tau^t c(\tau)d\tau\right)\int\limits_0^h G_2(h,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi - \int\limits_0^t G_2(h,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau) -$$

$$-\mu_1(\tau)c(\tau))\exp\left(\int\limits_\tau^t c(\sigma)d\sigma\right)d\tau + \int\limits_0^t G_2(h,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau) - \mu_2(\tau)c(\tau))\times$$

$$\times\exp\left(\int\limits_\tau^t c(\sigma)d\sigma\right)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{2\xi}(h,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)\exp\left(\int\limits_\tau^t c(\sigma)d\sigma\right)d\xi d\tau. \quad (12)$$

Для знаходження умов існування розв'язку рівняння (11) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [5]. Спочатку визначимо апріорні оцінки розв'язків рівняння (11). Використовуючи відомі оцінки функції Гріна [2], приходимо до інтегральної нерівності стосовно $c(t)$

$$|c(t)| \leqslant C_1 + C_2\exp\left(\int\limits_0^t |c(\sigma)|d\sigma\right) + C_3\int\limits_0^t |c(\tau)|\exp\left(\int\limits_\tau^t |c(\sigma)|d\sigma\right)d\tau +$$

$$+C_4\int\limits_0^t \frac{|c(\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(\int\limits_\tau^t |c(\sigma)|d\sigma\right)d\tau, \quad (13)$$

де сталі $C_i > 0, i = \overline{1,4}$ виражаються відомими величинами.

Нерівність (13) поділимо на $e^{\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma}$. Провівши заміну $w(t) = |c(t)|e^{-\int_0^t |c(\sigma)|d\sigma}$, одержимо

$$w(t) \leqslant C_5 + C_3\int\limits_0^t w(\tau)d\tau + C_4\int\limits_0^t \frac{w(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \quad (14)$$

Приймемо в (14) $t = \sigma$, домножимо на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$ і проінтегруємо за σ від 0 до t. Після спрощення одержимо

$$\int\limits_0^t \frac{w(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}d\sigma \leqslant 2C_6\sqrt{t} + C_7\int\limits_0^t w(\tau)d\tau. \quad (15)$$

Підставимо (15) в (14)

$$w(t) \leqslant C_8 + C_9\int\limits_0^t w(\tau)d\tau$$

і до цієї нерівності застосуємо лему Гронуолла, після чого отримаємо

$$w(t) \leqslant C_8 e^{C_9 T} \equiv M_0, \quad t \in [0, T]. \tag{16}$$

Отже, $|c(t)| e^{-\int\limits_0^t |c(\sigma)| d\sigma} \leqslant M_0$. Після інтегрування звідси знаходимо

$$\exp\left(\int\limits_0^\tau |c(\sigma)| d\sigma\right) \leqslant \frac{1}{1 - M_0 t}.$$

Виберемо таке $t_0 \in (0, T]$, щоб виконувалась умова

$$1 - M_0 t_0 > 0. \tag{17}$$

Тоді

$$\int\limits_0^\tau |c(\sigma)| d\sigma \leqslant \ln \frac{1}{1 - M_0 t_0} \equiv M_1,$$

і нерівність (13) зводиться до вигляду

$$|c(t)| \leqslant C_{10} + C_{11} \int\limits_0^t |c(\tau)| d\tau + C_{12} \int\limits_0^t \frac{|c(\tau)|}{\sqrt{t - \tau}} d\tau.$$

Ця нерівність аналогічна до нерівності (14). Отже, проводячи вищенаведені міркування, одержуємо оцінку

$$|c(t)| \leqslant M_2, \quad t \in [0, t_0]. \tag{18}$$

Рівняння (11) подамо у вигляді $c(t) = Pc(t)$. Розглянемо множину $N = \{c(t) \in C[0, t_0] : |c(t)| \leqslant M_2\}$. Очевидно, що оператор P переводить N в N. Для застосування теореми Шаудера залишається довести, що оператор P є цілком неперервним на N. Для цього достатньо повторити міркування, наведені в [2,4].

Розглянемо, наприклад, інтегральний оператор P_1

$$P_1 c(t) \equiv \int\limits_0^t G_2(h, t, 0, \tau) c(\tau) \exp\left(\int\limits_\tau^t c(\sigma) d\sigma\right) d\tau.$$

Покажемо, що множина функцій $P_1 N$ є одностайно неперервною, тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (\forall t_1, t_2 \in [0, t_0])\, (\forall c(t) \in P_1 N)$$
$$(|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |P_1 c(t_1) - P_1 c(t_2)| < \varepsilon).$$

За означенням P_1 маємо (вважаючи $t_1 > t_2$)

$$|P_1c(t_1) - P_1c(t_2)| = \left|\int_0^{t_1} G_2(h,t_1,0,\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau -\right.$$

$$\left. -\int_0^{t_2} G_2(h,t_2,0,\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_2} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right| \leqslant \left|\int_{t_2}^{t_1} G_2(h,t_1,0,\tau)c(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right| + \left|\int_0^{t_2} c(\tau)\left(G_2(h,t_1,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left.-G_2(h,t_2,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_2} c(\sigma)d\sigma\right)\right)d\tau\right|.$$

Оцінимо кожен з доданків. Спочатку розглянемо вираз

$$\left|\int_{t_2}^{t_1} G_2(h,t,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right| \leqslant \int_{t_2}^{t_1} |G_2(h,t,0,\tau)|\exp(M_2(t_1-\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_2}^{t_1} \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4(t-\tau)}\right)\exp(M_2(t_1-\tau))d\tau.$$

Використаємо оцінку ряду

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4(t-\tau)}\right) \leqslant C_{13}. \tag{19}$$

Отже,

$$\left|\int_{t_2}^{t_1} G_2(h,t,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right| \leqslant C_{13}e^{M_2T}\int_{t_2}^{t_1} d\tau = C_{13}e^{M_2T}|t_1-t_2|. \tag{20}$$

Використовуючи (20), одержимо

$$\left|\int_{t_2}^{t_1} G_2(h,t_1,0,\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right| \leqslant C_{14}|t_1-t_2|,$$

де C_{14} - відома стала. Наступний вираз подамо у вигляді

$$\left|\int_0^{t_2} c(\tau)\left(G_2(h,t_1,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right) - G_2(h,t_2,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_2} c(\sigma)d\sigma\right)\right)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_2\int_0^{t_2}\left|\int_{t_2}^{t_1}\frac{d}{d\zeta}\left(\exp\left(\int_\tau^{\zeta} c(\sigma)d\sigma\right)G_2(h,\zeta,0,\tau)\right)d\zeta\right|d\tau.$$

Обчислюючи похідні, одержимо

$$\left|\int_0^{t_2} c(\tau)\left(G_2(h,t_1,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right) - G_2(h,t_2,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_2} c(\sigma)d\sigma\right)\right)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\int_{t_2}^{t_1}\int_0^{t_2}\frac{1}{\sqrt{(\zeta-\tau)^3}}\exp(M_2(\zeta-\tau))\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2h^2}{4(\zeta-\tau)}\right)d\tau d\zeta,$$

де C_{15} - відома стала. З врахуванням (19) отримаємо

$$\left|\int_0^{t_2} c(\tau)\left(G_2(h,t_1,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right) - G_2(h,t_2,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_2} c(\sigma)d\sigma\right)\right)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_{16}|t_1-t_2|.$$

Звідси випливає існування такого $\delta > 0$, що при $|t_1 - t_2| < \delta$ матимемо

$$\left|\int_0^{t_1} G_2(h,t_1,0,\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_1} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t_2} G_2(h,t_2,0,\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^{t_2} c(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right| < \varepsilon$$

і одностайна неперервність множини P_1N доведена. Рівномірну обмеженість множини P_1N отримуємо з (18) та (19). Отже, оператор P_1 є цілком неперервним. Аналогічно досліджуємо інші вирази, що входять до оператора P. Тоді умови теореми Шаудера виконуються для рівняння (11) і є правильними такі теореми.

Теорема 1. *При виконанні умов (7), (8) існує розв'язок оберненої задачі 1, визначений при* $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, *де число* t_0 *задовольняє умову (17).*

Теорема 2. *Якщо* $\mu_3(t) \neq 0$, *то розв'язок задачі 1 єдиний.*

Доведемо єдиність розв'язку задачі 1. Припустимо, що задача 1 має два розв'язки $(c_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2$. Введемо позначення $c(t) = c_1(t) - c_2(t), u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Функції $(c(t), u(x,t))$ задовольняють умови

$$u_t = u_{xx} + c_1(t)u(x,t) + c(t)u_2(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{21}$$

$$u(x,0) = 0,\ x \in [0,h], \quad u_x(0,t) = 0, u_x(h,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{22}$$

$$\alpha u(h,t) + \beta\int_0^h u(x,t)dx = 0,\ t \in [0,T]. \tag{23}$$

Диференціюючи рівність (23) за t і використовуючи рівняння (21) і умови (22), одержимо

$$c(t)\mu_3(t) + \alpha u_{xx}(h,t) = 0. \tag{24}$$

Використовуючи аналог формули (12), приходимо до інтегрального рівняння

$$\mu_3(t)c(t) = -\alpha \int_0^t \int_0^h G_{2\xi}(h,t,\xi,\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^t c_1(\sigma)d\sigma\right) u_{2\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{25}$$

Якщо $\mu_3(t) \neq 0$, то (25) є однорідним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду. Звідси випливає, що $c(t) \equiv 0, t \in [0,T]$. Тоді $u(x,t)$ є розв'язком відповідного до (21) однорідного рівняння з однорідними умовами (22). Отже, $u(x,t) \equiv 0, (x,t) \in \overline{Q}_T$. Теорема єдиності доведена.

Теорема 3. *При виконанні умов (7) та умов*

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(h) = \mu_2(0), \mu_2(t) \neq 0, t \in [0,T], \alpha \neq 0, \alpha\varphi'(h) + \beta \int_0^h \varphi(x)dx = \mu_3(0)$$

розв'язок задачі 2 існує при $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, де число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$ визначається відомими величинами.

Теорема 4. *При $\mu_2(t) \neq 0, t \in [0,T], \alpha \neq 0$ розв'язок задачі 2 єдиний.*

Доведення існування та єдиності розв'язку задачі 2 проводиться аналогічно, за винятком зведення задачі до рівняння стосовно $c(t)$. Введемо позначення

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Bigg(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)}\right) +$$
$$+(-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(t-\tau)}\right)\Bigg), \quad k = 3,4.$$

Для отримання рівняння щодо $c(t)$ знаходимо за допомогою функції Гріна розв'язок прямої задачі (1)-(3) і підставляємо його в умову перевизначення (6). В отриманому співвідношенні замінимо t на σ, домножимо на функцію $G_4(0,t,0,\sigma)$ і проінтегруємо за σ від 0 до t

$$\alpha \int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)d\sigma \int_0^h G_2(h,\sigma,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi - \int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)d\sigma \int_0^\sigma (\alpha(\mu_1'(\tau) -$$
$$-\mu_1(\tau)c(\tau) + \beta(\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau)))G_2(h,\sigma,o,\tau)\exp\left(-\int_0^\tau c(\eta)d\eta\right) d\tau +$$
$$+\int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)d\sigma \int_0^\sigma (\alpha(\mu_2'(\tau) - \mu_2(\tau)c(\tau) + \beta(\mu_1(\tau) + \mu_2(\tau)))G_2(0,\sigma,o,\tau)\times$$
$$\times \exp\left(-\int_0^\tau c(\eta)d\eta\right) d\tau + \alpha \int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)d\sigma \int_0^\sigma \int_0^h G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\times$$
$$\times \exp\left(-\int_0^\tau c(\eta)d\eta\right) d\xi d\tau + \beta\Bigg(\int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)d\sigma \int_0^h \int_0^h G_1(x,\sigma,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi dx +$$

$$+\int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)d\sigma\int_0^h\int_0^\sigma\int_0^h G_1(x,\sigma,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\exp\left(-\int_0^\tau c(\eta)d\eta\right)d\xi d\tau dx\Big) =$$
$$+\int_0^t G_4(0,t,0,\sigma)\mu_3\sigma\exp\left(-\int_0^\tau c(\eta)d\eta\right)d\sigma.$$

Диференціюючи це рівняння за t з використанням знайдених у [2] співвідношень між функціями Гріна та припускаючи, що $\alpha\neq 0, \mu_2(t)\neq 0, t\in[0,T]$, отримуємо рівняння стосовно $c(t)$

$$c(t)=\frac{1}{\mu_2(t)}\Bigg((\mu_2'(t)+\frac{\beta}{\alpha}(\mu_1(t)+\mu_2(t))-f(h,t))-\int_0^t(\mu_1'(\tau)-\mu_1(\tau)c(\tau)+$$
$$+\frac{\beta}{\alpha}(\mu_1(\tau)+\mu_2(\tau))+f(0,\tau))G_{3\xi}(h,t,0,\tau)\exp\left(\int_\tau^t c(\eta)d\eta\right)d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{3\xi}(h,t,\xi,\tau)f_\xi(\xi,\tau)\exp\left(\int_\tau^t c(\eta)d\eta\right)d\xi d\tau-$$
$$-\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t\int_0^h(G_3(h,t,\xi,\tau)+G_4(0,t,\xi,\tau))f(\xi,\tau)\exp\left(\int_\tau^t c(\eta)d\eta\right)d\xi d\tau+$$
$$+\exp\left(\int_0^t c(\eta)d\eta\right)\int_0^h G_4(h,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi-\frac{\beta}{\alpha}\exp\left(\int_0^t c(\eta)d\eta\right)\times$$
$$\times\int_0^h(G_3(h,t,\xi,0)+G_4(0,t,\xi,0))\varphi(\xi)d\xi-\frac{1}{\alpha}\int_0^t G_4(0,t,0,\tau)(\mu_3'(\tau)-$$
$$-\mu_3(\tau)c(\tau)+\beta\int_0^h f(x,\tau)dx)\exp\left(\int_\tau^t c(\eta)d\eta\right)d\tau\Bigg),\quad t\in[0,T]. \tag{26}$$

Проводячи дослідження рівняння (26) за такою самою схемою, що й рівняння (11), визначаємо умови існування та єдиності розв'язку задачі 2.

1. *Cannon J.R., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation// J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – Vol. 33. – P.149-163.
2. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – К., 1995.
3. *Березницька І.Б., Дребот А.Й., Іванчов М.І., Макар Ю.П.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з інтегральним перевизначенням// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С.71-80.
4. *Пабирівська Н.В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення

// Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2000. – Т.43. – N 1. – С.51- 58.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М., 1977.

INVERSE PROBLEMS FOR DETERMINING A MINOR COEFFICIENTS IN A PARABOLIC EQUATIONS IN THE CASE OF NONLOCAL OVERDETERMINATION CONDITIONS

Iryna Barans'ka, Liliya Pazyak

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Existence and uniqueness conditions for inverse problems for determining a coefficient behind unknown function in a parabolic equation are established when the overdetermination conditions are linear combinations of value of uknown function or its derivative and integral of uknown function.

Key words: inverse problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.32–49

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.32–49

УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ РІЗНОКОМПОНЕНТНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ІНТЕГРАЛЬНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Микола БОКАЛО, Василь ДМИТРІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено коректність (існування, єдиність та неперервну залежність від вихідних даних розв'язку) задачі без початкових умов для систем диференціальних рівнянь, які складаються з квазілінійних параболічних та звичайних рівнянь з інтегральними запізненнями. Крім того, визначено апріорну оцінку розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: задача Фур'є, різнокомпонентна система, інтегральне запізнення.

У природі існує багато процесів, які описують різнокомпонентними системами рівнянь, тобто системами, до складу яких входять підсистеми рівнянь різних типів, наприклад, підсистеми рівнянь параболічного типу та звичайних диференціальних рівнянь. Гранично-початкові задачі для таких систем розглянуто в працях [1-4]. Зокрема, в [1,2] розглянуто такі задачі для еволюційних систем рівнянь із запізненням. У цій праці досліджено коректність задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для різнокомпонентних еволюційних систем рівнянь з інтегральними запізненнями. Зауважимо, що така задача для різнокомпонентних систем рівнянь дифузії з функціоналами вивчена в працях [5,6].

Введемо позначення і поняття, які використовуватимемо. Нехай D – область в просторі $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$. Через $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}), C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, де α – число з проміжку $[0;1]$, позначатимемо простори дійснозначних функцій, які разом з відповідними похідними є неперервними на $\overline{D}$, якщо $\alpha=0$, і неперервними за Гельдером на $\overline{D}$ з показником α, якщо $\alpha>0$ (див. означення [8], с.16), а норми в цих просторах – відповідно через $\|\cdot\|^{D}_{\alpha,\alpha/2}, \|\cdot\|^{D}_{\alpha,1+\alpha/2}, \|\cdot\|^{D}_{2+\alpha,1+\alpha/2}$. Під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{D})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{D}$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{D})$, якщо D – необмежена область, розумітимемо простори функцій, які визначені на $\overline{D}$ і їхні звуження на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D належать відповідно $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, де $\alpha\in[0;1]$. Домовимось, що $C(\overline{D}) \overset{def}{=} C^{0,0}(\overline{D})$, $C_{\mathrm{loc}}(\overline{D}) \overset{def}{=} C^{0,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{D})$. Коли ж Q – об'єднання області D з частиною своєї межі, то через $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ позначатимемо простори функцій, звуження яких на замикання довільної обмеженої підобласті D' області D такої, що $\overline{D'}\subset Q$, належать відповідно $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D'})$, де $\alpha\in[0;1]$.

Говоритимемо, що межа $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x$ належить до класу $C^{2+\alpha}$, якщо її можна покрити локально скінченною кількістю поверхонь, кожна з яких задається рівнянням вигляду $x_i = h(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ для деякого $i \in \{1, ..., n\}$, де $h \in C^{2+\alpha}(\overline{K}), K$ – область у просторі відповідних змінних.

Якщо W– деяка множина, то через $[W]^m$, де $m \in \mathbb{N}$, позначимо декартів степінь W (декартів добуток самого на себе m разів). Запис $w \in [W]^m$ означатиме, що $w = \text{col}\,(w_1, ..., w_m)$ – вектор-стовпчик з компонентами $w_i \in W$, $i \in \{1, ..., M\}$ (як виняток писатимемо $\mathbb{R}^m$ замість $[\mathbb{R}]^m$). Зауважимо, що коли W – лінійний простір, то $[W]^m$ – лінійний простір з відповідними лінійними операціями.

Введемо позначення $|w| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |w_i|$, де $w = \text{col}\,(w_1, ..., w_m) \in \mathbb{R}^m$. Домовимось писати $u < v$ для $u, v \in \mathbb{R}^m$, якщо $u_i < v_i$, $i \in \{1, ..., m\}$, а нерівність $u \leqslant v$ означатиме, що $u_i \leqslant v_i$, $i \in \{1, ..., m\}$.

1. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай $Q = \Omega \times (-\infty, T]$, де $0 < T < +\infty$ і Ω – область у просторі $\mathbb{R}^n_x$ з гладкою межею $\partial\Omega$, $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T]$.

Розглянемо задачу Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь із запізненням

$$P_i w(x,t) \equiv \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t)\frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_k} + \tag{1}$$

$$+ a_i(x,t)u_i(x,t) - f_i(x,t,w(x,t), J * w(x,t)) = \hat{f}_i(x,t),\ (x,t) \in Q,\ i \in \{1, ..., M\},$$

$$G_j w(x,t) \equiv \frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} + c_j(x,t)v_j(x,t) - g_j(x,t,w(x,t), J * w(x,t)) =$$

$$= \hat{g}_j(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}, \qquad j \in \{1, ..., L\}, \tag{2}$$

$$u_i(x,t) = h_i(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \qquad i \in \{1, ..., M\}, \tag{3}$$

де M, L – довільні натуральні числа; $w(x,t) = \text{col}(u(x,t), v(x,t))$, $u(x,t) = \text{col}(u_1(x,t), ..., u_M(x,t))$, $v(x,t) = \text{col}\,(v_1(x,t), ..., v_L(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$; $J*w(x,t) = \text{col}(J_1 * u_1(x,t), ..., J_M * u_M(x,t), J_{M+1} * v_1(x,t), ..., J_{M+L} * v_L(x,t))$, де $J_k * \mathrm{w}(x,t) = \int\limits_0^{\tau_k} J_k(x,s)\mathrm{w}(x,t-s)\,ds$, $k \in \{1, ..., M+L\}$, $\mathrm{w} \in C(\overline{Q})$, а $\tau_k \geqslant 0$, $k \in \{1, ..., M+L\}$; для кожних $i \in \{1, ..., M\}$, $j \in \{1, ..., L\}$ $f_i(x,t,\xi,\eta)$ та $g_j(x,t,\xi,\eta)$ – функції, які визначені відповідно для $(x,t) \in Q$ і $\overline{Q}$ та $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2(M+L)}$.

Далі цю задачу називатимемо задачею (1)-(3).

Означення 1. *Розв'язком задачі (1)-(3) називають вектор-функцію* $w = col(u,v)$, *де* $u = col(u_1, ..., u_M) \in \left[C^{2,1}_{\text{loc}}(Q) \cap C_{\text{loc}}(\overline{Q})\right]^M$, $v = col(v_1, ..., v_L) \in \left[C^{0,1}_{\text{loc}}(\overline{Q})\right]^L$, *яка задовольняє рівняння системи (1),(2) та граничну умову (3).*

На вихідні дані задачі накладатимемо такі умови:

(A1) функції $a_{i,kl}, a_{i,k}, a_i$ – неперервні на Q, а функція c_j – на $\overline{Q}$, $\quad i \in \{1, ..., M\}, j \in \{1, ..., L\}, \{k,l\} \subset \{1, ..., n\}$;

(A2) для кожного $i \in \{1, ..., M\}$ $\quad a_{i,kl} \equiv a_{i,lk}$, $\quad \{k,l\} \subset \{1, ..., n\}$ і в кожній точці $(x,t) \in Q$ для всіх $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{i,kl}(x,t)\xi_k\xi_l \geqslant \mu_i(t)\sum_{s=1}^{n}\xi_s^2,$$

де μ_i – невід'ємна на $(-\infty, T]$ функція;

(A3) для кожних $i \in \{1, ..., M\}$ та $j \in \{1, ..., L\}$ функції $f_i(x, t, \xi, \eta)$, $(x, t, \xi, \eta) \in Q \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$, та $g_j(x, t, \xi, \eta)$, $(x, t, \xi, \eta) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$ – неперервні за сукупністю своїх аргументів, неспадні за змінними ξ, η і задовольняють умову Ліпшиця за цими ж змінними, а точніше, існують невід'ємні й обмежені на Q функції $K^f_{ik}(x, t)$, $L^f_{ik}(x, t)$, $(x, t) \in Q$, $K^g_{jk}(x, t)$, $L^g_{jk}(x, t)$, $(x, t) \in \overline{Q}$ такі, що для кожного $i \in \{1, ..., M\}$, $j \in \{1, ..., L\}$

$$|f_i(x, t, \xi + \beta e_{(k)}, \eta) - f_i(x, t, \xi, \eta)| \leqslant K^f_{ik}(x, t)|\beta|,$$

$$|f_i(x, t, \xi, \eta + \beta e_{(k)}) - f_i((x, t, \xi, \eta)| \leqslant L^f_{ik}(x, t)|\beta|,$$

$$|g_j(x, t, \xi + \beta e_{(k)}, \eta) - g_j(x, t, \xi, \eta)| \leqslant K^g_{jk}(x, t)|\beta|,$$

$$|g_j(x, t, \xi, \eta + \beta e_{(k)}) - g_j(x, t, \xi, \eta)| \leqslant L^g_{jk}(x, t)|\beta|$$

для довільних $\{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^{2(M+L)}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, ..., M + L\}$ (тут $e_{(k)} = \mathrm{col}(0; ...; 0; 1; 0; ...; 0)$ – вектор-стовпчик, всі компоненти якого, крім k-ї, дорівнюють нулю, а k-та компонента – одиниці, $k \in \{1, ..., M + L\}$);

(A4)

$$\inf_{(x,t)\in Q} (a_i(x, t) - f^*_i(x, t)) \geqslant a_0 > 0, \quad i \in \{1, ..., M\},$$

$$\inf_{(x,t)\in \overline{Q}} (c_j(x, t) - g^*_j(x, t)) \geqslant b_0 > 0, \quad j \in \{1, ..., L\},$$

де a_0, b_0 – сталі,

$$f^*_i(x, t) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[K^f_{ik}(x, t) + L^f_{ik}(x, t)\right], \quad (x, t) \in Q, \quad i \in \{1, ..., M\},$$

$$g^*_j(x, t) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[K^g_{jk}(x, t) + L^g_{jk}(x, t)\right], \quad (x, t) \in \overline{Q}, \quad j \in \{1, ..., L\};$$

(A5) $J_k \in C(\overline{\Omega} \times [0, \tau_k])$, $J_k \geqslant 0$ і $\int\limits_0^{\tau_k} J_k(x, s)\, ds \leqslant 1$, $\quad x \in \overline{\Omega}$, $\quad k \in \{1, ..., M + L\}$;

(A6) $\hat{f} = \mathrm{col}(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_M) \in [C_{\mathrm{loc}}(Q)]^M$, $\qquad \hat{g} = \mathrm{col}(\hat{g}_1, ..., \hat{g}_L) \in \left[C_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})\right]^L$, $h = \mathrm{col}(h_1, ..., h_M) \in [C_{\mathrm{loc}}(\Sigma)]^M$.

Для зручності формулювання та доведення результатів роботи додатково, не зменшуючи загальності, припустимо, що

(A0) $f_i(x, t, 0, 0) = 0$, $(x, t) \in Q$, $i \in \{1, ..., M\}$; $\quad g_j(x, t, 0, 0) = 0$, $(x, t) \in \overline{Q}$, $j \in \{1, ..., L\}$.

Якщо Ω – необмежена область, то додатково накладатимемо умову

(A7) існує стала $m^* > 0$ така, що $a_{i,kk}(x, t) \leqslant m^*(|x|^2 + 1)$, $|a_{i,k}(x, t)| \leqslant m^*(|x| + 1)$, $(x, t) \in Q$, $i \in \{1, ..., M\}$, $j \in \{1, ..., L\}$, $\{k, l\} \subset \{1, ..., n\}$.

Далі всюди припускатимемо, що виконуються умови **(A0)**-**(A6)**, а у випадку, коли Ω – необмежена область, – ще додатково умова **(A7)**.

Основні результати роботи стосуються коректності задачі (1)-(3). Перед формулюванням введемо деякі поняття та позначення.

Нехай $Pw(x,t) \overset{def}{=} \text{col}\,(P_1 w(x,t), ..., P_M w(x,t))$, $(x,t) \in Q$; $Gw(x,t) \overset{def}{=} \text{col}\,(G_1 w(x,t), ..., G_L w(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Тоді задачу (1)-(3) можна компактно записати у вигляді

$$Pw(x,t) = \hat{f}(x,t),\ (x,t) \in Q, \quad Gw(x,t) = \hat{g}(x,t),\ (x,t) \in \overline{Q};$$
$$u(x,t) = h(x,t),\ (x,t) \in \Sigma,$$

де $w = \text{col}\,(u,v) \in W_{\text{loc}}(Q) \overset{def}{=} [C^{2,1}_{\text{loc}}(Q) \cap C_{\text{loc}}(\overline{Q})]^M \times [C^{0,1}_{\text{loc}}(\overline{Q})]^L$. Приймемо, що $f_0 \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant M} \sup\limits_{(x,t)\in Q} \sum\limits_{k=1}^{M+L} L^f_{ik}(x,t)$, $g_0 \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant L} \sup\limits_{(x,t)\in \overline{Q}} \sum\limits_{k=1}^{M+L} L^g_{jk}(x,t)$, $\tau_* \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant M+L} \tau_k$. Нехай $\nu_0 = \min\{\nu_1, \nu_2\}$, де відповідно ν_1 і ν_2 – розв'язки рівнянь

$$a_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)f_0 = 0 \quad \text{і} \quad b_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)g_0 = 0.$$

Ці рівняння мають по одному додатному розв'язку, оскільки функції

$$\varphi(\nu) = a_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)f_0 \quad \text{і} \quad \psi(\nu) = b_0 - \nu - (e^{\nu\tau_*} - 1)g_0$$

– неперервні та спадні за змінною ν, причому $\varphi(0) = a_0 > 0$, $\varphi(a_0) = -(e^{a_0\tau_*} - 1) \leqslant 0$, $\psi(0) = b_0$, $\psi(b_0) = -(e^{b_0\tau_*} - 1) \leqslant 0$.

Нехай H – одна з множин Q, $\overline{Q}$ або Σ; m – будь-яке натуральне число; ν – довільне дійсне число. Позначимо

$E_\nu(H;m) = \{q \in \left[C_{\text{loc}}(H)\right]^m$: існує стала $C = C(q) \geqslant 0$ така, що $|q(x,t)| \leqslant Ce^{-\nu t}$, $(x,t) \in H\}$.

Теорема 1 (апріорна оцінка розв'язку). *Нехай для деякого $\nu < \nu_0$ $\hat{f} \in E_\nu(Q;M)$, $\hat{g} \in E_\nu(\overline{Q};L)$ і $h \in E_\nu(\Sigma;M)$. Тоді для розв'язку w задачі (1)-(3) з класу $E_\nu(\overline{Q};M+L)$ справджується оцінка*

$$|w(x,t)| \leqslant \max\Big\{ \sup_{(y,s)\in\Sigma} |h(y,s)e^{\nu s}|,\ \sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{f}(y,s)e^{\nu s}|}{\varphi(\nu)},$$
$$\sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{g}(y,s)e^{\nu s}|}{\psi(\nu)} \Big\} \cdot e^{-\nu t} \equiv M_0 e^{-\nu t} \tag{4}$$

для всіх $(x,t) \in \overline{Q}$.

Теорема 2 (єдиність розв'язку). *Розв'язок задачі (1)-(3) в класі $E_\nu(\overline{Q};M)$, де $\nu < \nu_0$, єдиний.*

Нехай $\alpha \in (0;1]$. Через $S^{(\alpha)}$ позначимо простір функцій $f(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$, які задовольняють умову: для будь-якого компакту $B \subset \mathbb{R}^{2(M+L)}$ існує стала $K = K(B) \geqslant 0$ така, що нерівність

$$|f(x_1,t_1,\xi,\eta) - f(x_2,t_2,\xi,\eta)| \leqslant K\left[|x_1 - x_2|^\alpha + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}\right]$$

виконується при будь-яких $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in \overline{Q}$ і $(\xi,\eta) \in B$.

Теорема 3 (існування розв'язку). *Припустимо, що при деяких* $\alpha \in (0;1]$ *і* $\nu < \nu_0$ *справджуються умови:*

(**B1**) $\{a_{i,kl}, a_{i,k}, a_i, c_j\} \subset C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $\partial a_{i,kl}/\partial x_s \in C(\overline{Q})$, $\mu_i(t) \geqslant \mu_0 \equiv const > 0$, $t \in (-\infty, T]$, $i \in \{1,...,M\}, j \in \{1,...,L\}$, $\{k,l,s\} \subset \{1,...,n\}$;

(**B2**) $\{f_i(x,t,\xi e^{-\nu t}, \eta e^{-\nu t})e^{\nu t},\ g_j(x,t,\xi e^{-\nu t}, \eta e^{-\nu t})e^{\nu t} : i \in \{1,...,M\}, j \in \{1,...,L\}\} \subset S^{(\alpha)}$;

(**B3**) $J_k(\cdot,t) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $k \in \{1,...,M+L\}$;

(**B4**) $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$;

(**B5**) $col\,(e^{\nu t}\hat{f}, e^{\nu t}\hat{g}) \in \left[C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})\right]^{M+L}$, $e^{\nu t}h \in \left[C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\rm loc}(\overline{\Sigma})\right]^M$, $\hat{f} \in E_\nu(Q;M)$, $\hat{g} \in E_\nu(\overline{Q};L)$, $h \in E_\nu(\Sigma;M)$.

Тоді існує розв'язок $w = col\,(u,v)$ *задачі (1)-(3) з простору* $\left(\left[C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\rm loc}(\overline{Q})\right]^M \times \left[C^{\alpha,1+\alpha/2}_{\rm loc}(\overline{Q})\right]^L\right) \cap E_\nu(\overline{Q};M+L)$.

Нехай Π_ν – простір вектор-функцій col $(\hat{f},\hat{g},h)$ таких, що col $(e^{\nu t}\hat{f}, e^{\nu t}\hat{g}, e^{\nu t}h) \in [C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})]^{M+L} \times [C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^M$ для довільного $\nu < \nu_0$. Припустимо, що справджуються умови (**B1**)-(**B4**). Тоді для будь-яких вектор-функцій col $(\hat{f},\hat{g},h) \in \Pi_\nu$, де $\nu < \nu_0$, існує єдиний розв'язок w задачі (1)-(3) з класу $E_\nu(\overline{Q};M+L)$. Коротко це записуватимемо у вигляді $w = RS_\nu(\hat{f},\hat{g},h)$.

Теорема 4 (неперервна залежність розв'язку від вихідних даних). *Нехай виконуються умови* (**B1**)-(**B4**) *теореми 3. Тоді для довільного значення* $\varepsilon > 0$ *існує значення* $\delta > 0$ *таке, що для будь-яких* $\{col\,(\hat{f}^1,\hat{g}^1,h^1),\ col\,(\hat{f}^2,\hat{g}^2,h^2)\} \subset \Pi_\nu$,

$$\sup_{(x,t)\in Q} |\hat{f}^1(x,t) - \hat{f}^2(x,t)|e^{\nu t} < \delta, \quad \sup_{(x,t)\in \overline{Q}} |\hat{g}^1(x,t) - \hat{g}^2(x,t)|e^{\nu t} < \delta,$$

$$\sup_{(x,t)\in \Sigma} |h^1(x,t) - h^2(x,t)|e^{\nu t} < \delta,$$

виконується нерівність

$$\sup_{(x,t)\in Q} |w^1(x,t) - w^2(x,t)|e^{\nu t} < \varepsilon,$$

де $w^i = RS_\nu(\hat{f}^i,\hat{g}^i,h^i)$, $i \in \{1,2\}$.

2. Допоміжні твердження.

Зауваження 1. Нехай $\xi^l = \text{col}\,(\xi^l_1,...,\xi^l_{M+L}) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $\eta^l = \text{col}\,(\eta^l_1,...,\eta^l_{M+L}) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $l \in \{1,2\}$. Приймемо $\xi^{1,2}_{(k)} = \text{col}(\xi^2_1,...,\xi^2_k,\xi^1_{k+1},...,\xi^1_{M+L})$, $\eta^{1,2}_{(k)} = \text{col}(\eta^2_1,...,\eta^2_k,\eta^1_{k+1},...,\eta^1_{M+L})$, $k \in \{1,...,M+L-1\}$, $\xi^{1,2}_{(0)} = \xi^1$, $\xi^{1,2}_{(M+L)} = \xi^2$, $\eta^{1,2}_{(0)} = \eta^1$, $\eta^{1,2}_{(M+L)} = \eta^2$. Легко бачити, що для кожного $i \in \{1,...,M\}$

$$f_i(x,t,\xi^1,\eta^1) - f_i(x,t,\xi^2,\eta^2) = f_i(x,t,\xi^1,\eta^1) - f_i(x,t,\xi^2,\eta^1) + f_i(x,t,\xi^2,\eta^1) -$$

$$-f_i(x,t,\xi^2,\eta^2) = \sum_{k=1}^{M+L} [(f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k-1)},\eta^1) - f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k)},\eta^1)) + (f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k-1)}) -$$

$$-f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k)})] = \sum_{k=1}^{M+L} [\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1)(\xi^1_k - \xi^2_k) + \Psi_{ik}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)(\eta^1_k - \eta^2_k)],$$

де

$$\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k-1)},\eta^1) - f_i(x,t,\xi^{1,2}_{(k)},\eta^1)}{\xi^1_k - \xi^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \xi^1_k \neq \xi^2_k,$$

$\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad$ якщо $\quad \xi^1_k = \xi^2_k, \quad$ і

$$\Psi_{ik}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \frac{f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k-1)}) - f_i(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k)})}{\eta^1_k - \eta^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \eta^1_k \neq \eta^2_k,$$

$\Psi_{ik}(x,t,\xi^1,\eta^1,\eta^2) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad$ якщо $\quad \eta^1_k = \eta^2_k, \ k \in \{1,\dots,M+L\}$.

Аналогічно для кожного $j \in \{1,\dots,L\}$ отримуємо

$$g_j(x,t,\xi^1,\eta^1) - g_j(x,t,\xi^2,\eta^2) = \sum_{k=1}^{M+L} [S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1)(\xi^1_k - \xi^2_k) + \\ + \Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)(\eta^1_k - \eta^2_k)],$$

де

$$S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_j(x,t,\xi^{1,2}_{(k-1)},\eta^1) - g_j(x,t,\xi^{1,2}_{(k)},\eta^1)}{\xi^1_k - \xi^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \xi^1_k \neq \xi^2_k,$$

$S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad$ якщо $\quad \xi^1_k = \xi^2_k, \quad$ і

$$\Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2) = \frac{g_j(x,t,\xi^2,\eta^{1,2}_{(k-1)}) - g_j(x,t,\xi^1,\eta^{1,2}_{(k)})}{\eta^1_k - \eta^2_k} \geqslant 0, \quad \text{якщо} \quad \eta^1_k \neq \eta^2_k,$$

$\Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, якщо $\eta^1_k = \eta^2_k, \ k \in \{1,\dots,M+L\}$.

Зауваження 2. З означення функцій f_i^* і g_j^* та умови (**A3**) випливає, що для довільних $\{\xi^1,\xi^2,\eta^1,\eta^2\} \subset \mathbb{R}^{M+L}$

$$\sum_{k=1}^{M+L} [\Phi_{ik}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) + \Psi_{ik}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)] \leqslant f_i^*(x,t), \quad (x,t) \in Q, \quad i \in \{1,\dots,M\},$$

$$\sum_{k=1}^{M+L} [S_{jk}(x,t,\xi^1,\xi^2,\eta^1) + \Lambda_{jk}(x,t,\xi^2,\eta^1,\eta^2)] \leqslant g_j^*(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j \in \{1,\dots,L\}.$$

Нехай t_0 – довільне число з проміжку $(-\infty,T)$, $Q^0 = \Omega \times (t_0,T]$, $\Omega^0 = \Omega \times \{t_0\} \equiv Q \cap \{t = t_0\}$, $\Sigma^0 = \partial\Omega \times (t_0,T]$. Приймемо для кожного $k \in \{1,\dots,M+L\}$ $D^0_k = \overline{\Omega} \times (t_0 - \tau_k, T]$, $G^0_k = \overline{\Omega} \times (t_0 - \tau_k, t_0]$, якщо $\tau_k > 0$, і $G^0_k = \overline{\Omega_0}$, якщо $\tau_k = 0$. Простір функцій $w = \mathrm{col}(u,v) \in \left[C^{2,1}_{\mathrm{loc}}(Q^0) \cap C(\overline{Q^0})\right]^M \times \left[C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q^0} \cap C(\overline{Q^0})\right]^L \cap \left[C_{\mathrm{loc}}(D^0_1) \times C_{\mathrm{loc}}(D^0_2) \times \dots \times C_{\mathrm{loc}}(D^0_{M+L})\right]$ коротко позначатимемо через W^0.

Визначимо деякі властивості функцій з простору W^0.

Лема 1. *Нехай Ω – обмежена область і для пари вектор-функцій $\{\tilde{w} = col\,(\tilde{u}, \tilde{v}),\ \hat{w} = col\,(\hat{u}, \hat{v})\} \subset W^0$ виконуються нерівності*

$$P\tilde{w}(x,t) < P\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q^0, \quad G\tilde{w}(x,t) < G\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q^0}, \tag{5}$$

$$\tilde{u}(x,t) < \hat{u}(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^0, \tag{6}$$

$$\tilde{u}_i(x,t) < \hat{u}_i(x,t), \quad (x,t) \in G_i^0, \quad i \in \{1, ..., M\},$$

$$\tilde{v}_j(x,t) < \hat{v}_j(x,t), \quad (x,t) \in G_{M+j}^0, \quad j \in \{1, ..., L\}. \tag{7}$$

Тоді $\tilde{w}(x,t) < \hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q^0}$.

Доведення. Припустимо супротивне. Тоді в силу (7) існують $t^* \in (t_0, T]$ та $x^* \in \overline{\Omega}$ такі, що $\tilde{w}(x,t) < \hat{w}(x,t)$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q^0} \cap \{(x,t) : t_0 \leqslant t < t^*\}$, і $\tilde{u}_\mu(x^*, t^*) = \hat{u}_\mu(x^*, t^*)$ при певному $\mu \in \{1, ..., M\}$ або $\tilde{v}_s(x^*, t^*) = \hat{v}_s(x^*, t^*)$ при певному $s \in \{1, ..., L\}$.

Якщо $\tilde{u}_\mu(x^*, t^*) = \hat{u}_\mu(x^*, t^*)$, то $(x^*, t^*) \notin \Sigma^0 \cup \overline{\Omega^0}$, бо виконуються нерівності (6) і (7). Різниця $\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu$ в $\overline{Q^0} \cap \{(x,t) : t_0 \leqslant t \leqslant t^*\}$ набуває найбільшого значення в точці (x^*, t^*) і це значення дорівнює нулеві. Тому, враховуючи умову (**A2**), маємо

$$\partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)/\partial t\big|_{(x^*,t^*)} \geqslant 0, \quad \partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)/\partial x_m\big|_{(x^*,t^*)} = 0, \quad m \in \{1, ..., n\},$$
$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{\mu,kl}(x^*, t^*)\partial^2(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)/\partial x_k \partial x_l\big|_{(x^*,t^*)} \leqslant 0.$$

Отже, використовуючи умови (**A3**) та (**A5**), отримаємо

$$\begin{gathered}
P_\mu\tilde{w}(x^*, t^*) - P_\mu\hat{w}(x^*, t^*) = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)\big|_{(x^*,t^*)} - \sum_{k,l=1}^{n} a_{\mu,kl}(x^*, t^*)\frac{\partial^2(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_k \partial x_l}\big|_{(x^*,t^*)} + \\
+ \sum_{k=1}^{n} a_{\mu,k}(x^*, t^*)\frac{\partial(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)}{\partial x_k}\big|_{(x^*,t^*)} + a_\mu(x^*, t^*)(\tilde{u}_\mu - \hat{u}_\mu)\big|_{(x^*,t^*)} - \\
- (f_\mu(x^*, t^*, \tilde{w}(x^*, t^*), J * \tilde{w}(x^*, t^*)) - f_\mu(x^*, t^*, \hat{w}(x^*, t^*), J * w(x^*, t^*))) \geqslant \\
\geqslant f_\mu(x^*, t^*, \hat{w}(x^*, t^*), J * \hat{w}(x^*, t^*)) - f_\mu(x^*, t^*, \tilde{w}(x^*, t^*), J * \tilde{w}(x^*, t^*)) \geqslant 0,
\end{gathered}$$

що суперечить (5). Якщо $\tilde{v}_s(x^*, t^*) = \hat{v}_s(x^*, t^*)$, то аналогічно доводимо, що $G_s\tilde{w}(x^*, t^*) \geqslant G_s\hat{w}(x^*, t^*)$, що теж суперечить (5). □

Лема 2. *Припустимо, що виконуються всі умови леми 1, але нерівності (5)-(7) нестрогі. Тоді* $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}(x,t)$ *для всіх* $(x,t) \in \overline{Q^0}$.

Доведення. Розглянемо допоміжну вектор-функцію $\hat{w}^\lambda(x,t) = \hat{w}(x,t) + \lambda e^t \theta$, де $\theta = \mathrm{col}\,(1, ..., 1) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $\lambda > 0$. Використовуючи зауваження 1 і 2 та умови (**A3**),(**A5**), для кожного $i \in \{1, ..., M\}$ отримаємо

$$P_i\hat{w}^\lambda(x,t) = P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x,t) - [f_i(x,t,\hat{w}^\lambda(x,t), J * \hat{w}^\lambda(x,t))- \\ - f_i(x,t,\hat{w}(x,t), J * \hat{w}(x,t))] = P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x,t)- \\ -\sum_{k=1}^{M+L} \big[\Phi_{ik}(x,t,\hat{w}^\lambda(x,t),\hat{w}(x,t), J*\hat{w}^\lambda(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t), J*\hat{w}^\lambda(x,t), J*\hat{w}(x,t))\times \\ \times \int_0^{\tau_k} J_k(x,s)e^{-s}\,ds\big]\lambda e^t \geqslant P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t a_i(x,t)- \\ -\sum_{k=1}^{M+L} \big[\Phi_{ik}x,t,\hat{w}^\lambda(x,t),\hat{w}(x,t), J*\hat{w}^\lambda(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t), J*\hat{w}^\lambda(x,t), J*\hat{w}(x,t))\big]\times \\ \times \lambda e^t \geqslant P_i\hat{w}(x,t) + \lambda e^t + \lambda e^t(a_i(x,t) - f_i^*(x,t)) > P_i\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q^0.$$

Аналогічно доводимо, що $G\hat{w}^\lambda(x,t) > G\hat{w}(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q^0}$. Оскільки $P\tilde{w}(x,t) \leqslant P\hat{w}(x,t)$, а $P\hat{w}(x,t) < P\hat{w}^\lambda(x,t)$, то $P\tilde{w}(x,t) < P\hat{w}^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in Q^0$. З аналогічних міркувань одержимо, що $G\tilde{w}(x,t) < G\hat{w}^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q^0}$. Враховуючи це, а також те, що $\tilde{u}_i(x,t) < \hat{u}_i^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma^0$, $\tilde{u}_i(x,t) < \hat{u}_i^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in G_i^0$, $i \in \{1,...,M\}$, $\tilde{v}_j(x,t) < \hat{v}_j^\lambda(x,t)$, $(x,t) \in G_{M+j}^0$, $j \in \{1,...,L\}$, з леми 1 матимемо, що $\tilde{w}(x,t) < \hat{w}^\lambda(x,t)$, коли $(x,t) \in \overline{Q^0}, \lambda > 0$. Оскільки $\lim\limits_{\lambda\to+0} \hat{w}^\lambda(x,t) = \hat{w}(x,t)$, то $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}(x,t), (x,t) \in \overline{Q^0}$. □

Лема 3. *Нехай Ω – необмежена область і для вектор-функцій $\{\tilde{w} = col\,(\tilde{u},\tilde{v})$, $\hat{w} = col\,(\hat{u},\hat{v})\} \subset W^0$ виконуються нерівності*

$$P\tilde{w}(x,t) \leqslant P\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in Q^0, \quad G\tilde{w}(x,t) \leqslant G\hat{w}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q^0}, \tag{8}$$

$$\tilde{u}(x,t) \leqslant \hat{u}(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^0, \tag{9}$$

$$\tilde{u}_i(x,t) \leqslant \hat{u}_i(x,t), \quad (x,t) \in G_i^0, \quad i \in \{1,...,M\},$$

$$\tilde{v}_j(x,t) \leqslant \hat{v}_j(x,t), \quad (x,t) \in G_{M+j}^0, \quad j \in \{1,...,L\}. \tag{10}$$

Тоді $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}(x,t)$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q^0}$.

Доведення. Нехай K – стала така, що $|\tilde{w}(x,t)| \leqslant K$, і $|\hat{w}(x,t)| \leqslant K$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Позначимо $\Omega_R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $Q_R^0 = \Omega_R \times (t_0,T]$, $\Sigma_R^0 = \partial\Omega_R \times (t_0,T]$, $G_{k,R}^0 = \overline{\Omega_R} \times (t_0 - \tau_k, t_0]$, якщо $\tau_k > 0$, і $G_{k,R}^0 = \overline{\Omega_R} \times \{t_0\}$, якщо $\tau_k = 0$, $k \in \{1,...,M+L\}$. Розглянемо допоміжну вектор-функцію $\hat{w}^{R,\lambda}(x,t) \equiv \mathrm{col}\,(\hat{u}^{R,\lambda}(x,t), \hat{v}^{R,\lambda}(x,t)) = \hat{w}(x,t) + q^{R,\lambda}(x,t)$ де $\hat{u}^{R,\lambda}(x,t) = \mathrm{col}\,(\hat{u}_1^{R,\lambda}(x,t),...,\hat{u}_M^{R,\lambda}(x,t))$, $\hat{v}^{R,\lambda}(x,t) = \mathrm{col}\,(\hat{v}_1^{R,\lambda}(x,t),...,\hat{v}_L^{R,\lambda}(x,t))$, $q^{R,\lambda}(x,t) = \dfrac{2K}{R^2}(|x|^2+1)e^{\lambda(t-t_0)}\theta$, $\theta = \mathrm{col}\,(1,...,1) \in \mathbb{R}^{M+L}$, $R > 1$, $\lambda > 8m^*n$. Використовуючи зауваження 1 і 2 та умови (**A0**), (**A3**), (**A4**), (**A7**) отримаємо

$$P_i\hat{w}^{R,\lambda}(x,t) = P_i\hat{w}(x,t) + \frac{2K}{R^2}e^{\lambda(t-t_0)}\Big[\lambda(|x|^2+1) - 2\sum_{k=1}^{n} a_{i,kk}(x,t)+$$
$$+2\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x,t)x_k\Big] + a_i(x,t)\frac{2K}{R^2}(|x|^2+1)e^{\lambda(t-t_0)}-$$
$$-\big[f_i(x,t,(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t), J*(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t))-$$
$$-f_i(x,t,\hat{w}(x,t), J*\hat{w}(x,t))\big] \geqslant P_i\hat{w}(x,t) + \frac{2K}{R^2}(\lambda - 8m^*n)e^{\lambda(t-t_0)}(|x|^2+1) + \Big(a_i(x,t)-$$
$$-\sum_{k=1}^{M+L}\big[\Phi_{ik}(x,t,(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t),\hat{w}(x,t), J*(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t),$$
$$J*(\hat{w}+q^{R,\lambda})(x,t)), J*\hat{w}(x,t))\int_0^{\tau_k} J_k(x,s)e^{-\lambda s}\,ds\big]\Big)\frac{2K}{R^2}(|x|^2+1)e^{\lambda(t-t_0)} \geqslant P_i\hat{w}(x,t)+$$
$$+\frac{2K}{R^2}(\lambda-8m^*n)e^{\lambda(t-t_0)}(|x|^2+1) + (a_i(x,t) - f_i^*(x,t))\frac{2K}{R^2}(|x|^2+1)e^{\lambda(t-t_0)} \geqslant$$
$$\geqslant P_i\hat{w}(x,t), \quad (x,t)\in Q_R^0, \quad i\in\{1,...,M\}.$$

Аналогічно доводимо, що $G\hat{w}^{R,\lambda}(x,t) \geqslant G\hat{w}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q_R^0}$. Отже, $P\tilde{w}(x,t) \leqslant P\hat{w}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t)\in Q_R^0$ і $G\tilde{w}(x,t) \leqslant G\hat{w}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q_R^0}$. Оскільки $|\tilde{w}(x,t)| \leqslant K$ і $|\hat{w}(x,t)| \leqslant K$, $(x,t)\in\overline{Q_R^0}$, то $\tilde{u}(x,t) \leqslant \hat{u}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t)\in\Sigma_R^0$. Очевидно, що $\tilde{u}_i(x,t) \leqslant \hat{u}_i^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t)\in G_{i,R}^0$, $i\in\{1,...,M\}$, і $\tilde{v}_j(x,t) \leqslant \hat{v}_j^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t)\in G_{M+j,R}^0$, $j\in\{1,...,L\}$. Використовуючи лему 2, одержимо $\tilde{w}(x,t) \leqslant \hat{w}^{R,\lambda}(x,t)$, $(x,t)\in Q_R^0$, для всіх $R>1$. Зафіксуємо довільно вибрану точку $(x,t)\in Q^0$ і перейдемо до границі при $R\to+\infty$. В результаті отримаємо потрібну нерівність. □

Лема 4. *Для довільної функції* $w = col\,(u,v)\in W^0$ *справджується оцінка*

$$|w(x,t)| \leqslant \max\Big\{\sup_{(y,s)\in\Sigma^0}|u(y,s)|, \max_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup_{(y,s)\in G_i^0}|u_i(y,s)|,$$
$$\max_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup_{(y,s)\in G_{M+j}^0}|v_j(y,s)|, \sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Pw(y,s)|}{a_0}, \sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Gw(y,s)|}{b_0}\Big\}, \quad (x,t)\in\overline{Q^0}. \tag{11}$$

Доведення. Нехай

$$C = \max\{\sup_{(y,s)\in\Sigma^0}|u(y,s)|, \max_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup_{(y,s)\in G_i^0}|u_i(y,s)|, \max_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup_{(y,s)\in G_{M+j}^0}|v_j(y,s)|,$$
$$\sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Pw(y,s)|}{a_0}, \sup_{(y,s)\in Q^0}\frac{|Gw(y,s)|}{b_0}\}.$$

Розглянемо вектор-функцію $\hat{w} = \mathrm{col}\,(\hat{u},\hat{v})$, де $\hat{u}(x,t) = \mathrm{col}\,(C,...,C)\in\mathbb{R}^M$, $\hat{v}(x,t) = \mathrm{col}\,(C,...,C)\in\mathbb{R}^L$, $(x,t)\in\overline{Q}$. Використовуючи зауваження 1 і

2 та умови (**A0**), (**A3**), (**A4**), отримаємо

$$
\begin{aligned}
P_i\hat{w}(x,t) &= a_i(x,t)\cdot C - f_i(x,t,\hat{w}(x,t), J*\hat{w}(x,t)) = \\
&= C\cdot\left(a_i(x,t) - \frac{f_i(x,t,\hat{w}(x,t), J*\hat{w}(x,t)) - f_i(x,t,0,0)}{C}\right) = \\
= C\cdot\Bigg(a_i(x,t) - \sum_{k=1}^{M+L}\Bigg[&\Phi_{ik}(x,t,\hat{w}(x,t),0,J*\hat{w}(x,t)) + \Psi_{ik}(x,t,0,J*\hat{w}(x,t),0)\times \\
&\times\int_0^{\tau_k} J_k(x,s)\,ds\Bigg]\Bigg) \geqslant C(a_i(x,t) - f_i^*(x,t)), \quad i\in\{1,\dots,M\}. \quad (12)
\end{aligned}
$$

З умови (**A4**), нерівності (12) та вибору C випливає, що

$$P_i\hat{w}(x,t) \geqslant C\cdot a_0 \geqslant P_iw(x,t), \qquad (x,t)\in Q^0, \quad i\in\{1,\dots,M\}. \tag{13}$$

Аналогічно можна довести, що

$$G_j\hat{w}(x,t) \geqslant G_jw(x,t), \quad (x,t)\in\overline{Q^0}, \quad j\in\{1,\dots,L\}. \tag{14}$$

З означення вектор-функції $\hat{w} = \mathrm{col}\,(\hat{u},\hat{v})$ маємо

$$\hat{u}(x,t) \geqslant u(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma^0, \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
&\hat{u}_i(x,t) \geqslant u_i(x,t), \quad (x,t)\in G_i^0, \quad i\in\{1,\dots,M\}, \\
&\hat{v}_j(x,t) \geqslant v_j(x,t), \quad (x,t)\in G_{M+j}^0, \quad j\in\{1,\dots,L\}. \quad (16)
\end{aligned}
$$

На підставі (13)-(16) з лем 2 і 3 одержимо

$$\hat{w}(x,t) \geqslant w(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q^0}.$$

Аналогічно можна довести, що

$$w(x,t) \geqslant -\hat{w}(x,t), \qquad (x,t)\in\overline{Q^0}.$$

З двох останніх нерівностей випливає оцінка (11). □

Зауваження 3. Якщо $Pw(x,t) = 0$ і $Gw(x,t) = 0$, то $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{Q^0}}|w(x,t)|$ оцінюється через $\sup\limits_{(x,t)\in\Sigma^0}|u(x,t)|$, $\max\limits_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup\limits_{(x,t)\in G_i^0}|u_i(x,t)|$ та $\max\limits_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup\limits_{(x,t)\in G_{M+j}^0}|v_j(x,t)|$ і не залежить від a_0.

Лема 5. *Нехай вектор-функції* $\{w^1 = col\,(u^1,v^1),\ w^2 = col\,(u^2,v^2)\}\subset E_\nu(\overline{Q};M+L)\cap W_{\mathrm{loc}}(Q)$ *такі, що* $Pw^1 - Pw^2\in E_\nu(Q;M)$, $Gw^1 - Gw^2 \in E_\nu(\overline{Q};L)$, $(u^1-u^2)\big|_\Sigma\in E_\nu(\Sigma;M)$ *для деякого* $\nu < \nu_0$. *Тоді*

$$|w^1(x,t) - w^2(x,t)| \leqslant \max\left\{\sup_{(y,s)\in\Sigma}|u^1(y,s) - u^2(y,s)|e^{\nu s},\right.$$

$$\sup_{(y,s)\in Q}\frac{|Pw^1(y,s)-Pw^2(y,s)|e^{\nu s}}{\varphi(\nu)},\ \sup_{(y,s)\in\overline{Q}}\frac{|Gw^1(y,s)-Gw^2(y,s)|e^{\nu s}}{\psi(\nu)}\Big\}e^{-\nu t}, \quad (17)$$

де $(x,t)\in Q$.

Доведення. Позначимо $\hat{f}^k(x,t) \overset{def}{=} Pw^k(x,t)$, $(x,t)\in Q$, $\hat{g}^k(x,t) \overset{def}{=} Gw^k(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}$, $h^k(x,t) \overset{def}{=} u^k(x,t)$, $(x,t)\in\Sigma$, $k\in\{1,2\}$. Прийнявши $u^{1,2} \overset{\text{def}}{=} u^1-u^2$, $v^{1,2} \overset{\text{def}}{=} v^1-v^2$, $w^{1,2} \overset{\text{def}}{=} w^1-w^2$, із рівнянь (1),(2) та умови (3), записаних для w^1 і w^2, врахувавши зауваження 1, отримаємо

$$L_iw^{1,2}(x,t)-\tilde{f}_i(x,t,w^{1,2}(x,t),J*w^{1,2}(x,t))=\hat{f}_i^{1,2}(x,t),\ \ (x,t)\in Q,\ \ i\in\{1,...,M\}, \quad (18)$$

$$F_jw^{1,2}(x,t)-\tilde{g}_j(x,t,w^{1,2}(x,t),J*w^{1,2}(x,t))=\hat{g}_j^{1,2}(x,t),\ \ (x,t)\in\overline{Q},\ \ j\in\{1,...,L\}, \quad (19)$$

$$u_i^{1,2}(x,t)=h_i^{1,2}(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma,\quad i\in\{1,...,M\}, \quad (20)$$

де $L_iw^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} P_iw^{1,2}(x,t)+f_i(x,t,w^{1,2}(x,t),J*w^{1,2}(x,t))$, $(x,t)\in Q$, $i\in\{1,...,M\}$,
$F_jw^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} G_jw^{1,2}(x,t)+g_j(x,t,w^{1,2}(x,t),J*w^{1,2}(x,t))$, $(x,t)\in\overline{Q}$, $j\in\{1,...,L\}$;

$$\tilde{f}_i(x,t,\xi,\eta) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L}\big[\Phi_{ik}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J*w^1(x,t))\xi_k+$$
$$+\Psi_{ik}(x,t,w^2(x,t),J*w^1(x,t),J*w^2(x,t))\eta_k\big],\ \ (x,t,\xi,\eta)\in Q\times\mathbb{R}^{2(M+L)},$$
$$i\in\{1,...,M\},$$

$$\tilde{g}_j(x,t,\xi,\eta) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{M+L}\Big[S_{jk}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J*w^2(x,t))\xi_k+$$
$$+\Lambda_{jk}(x,t,w^1(x,t),J*w^1(x,t),J*w^2(x,t))\eta_k\Big],\ \ (x,t,\xi,\eta)\in\overline{Q}\times\mathbb{R}^{2(M+L)},$$
$$j\in\{1,...,L\};$$

$\hat{f}^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} \hat{f}^1(x,t)-\hat{f}^2(x,t)$, $(x,t)\in Q$; $\hat{g}^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} \hat{g}^1(x,t)-\hat{g}^2(x,t)$, $(x,t)\in\overline{Q}$;

$$h^{1,2}(x,t) \overset{def}{=} h^1(x,t)-h^2(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $\nu=0$, використаємо ідею з праці [7]. Нехай λ – поки що довільне число. Домножимо (18), (19) і (20) на $e^{\lambda t}$. Після простих перетворень одержимо

$$P_i^\lambda\tilde{w}^{1,2}(x,t)\equiv L_i\tilde{w}^{1,2}(x,t)-\lambda\tilde{u}_i^{1,2}(x,t)- \quad (21)$$
$$-\tilde{f}_i^\lambda(x,t,\tilde{w}^{1,2}(x,t),\tilde{J}*\tilde{w}^{1,2}(x,t))=\hat{f}_i^{1,2}(x,t)e^{\lambda t},\quad (x,t)\in Q,\ i\in\{1,...,M\},$$

$$G_j^\lambda\tilde{w}^{1,2}(x,t)\equiv F_j\tilde{w}^{1,2}(x,t)-\lambda\tilde{v}_j^{1,2}(x,t)- \quad (22)$$
$$-\tilde{g}_j^\lambda(x,t,\tilde{w}^{1,2}(x,t),\tilde{J}*\tilde{w}^{1,2}(x,t))=\hat{g}_j^{1,2}(x,t)e^{\lambda t},\quad (x,t)\in\overline{Q},\ j\in\{1,...,L\}.$$

$$\tilde{u}_i^{1,2}(x,t)=h_i^{1,2}(x,t)e^{\lambda t},\quad (x,t)\in\Sigma,\quad i\in\{1,...,M\}. \quad (23)$$

Тут $\tilde{w}^{1,2}(x,t) \equiv \mathrm{col}\,(\tilde{u}^{1,2}(x,t), \tilde{v}^{1,2}(x,t)) \overset{def}{=} \mathrm{col}\,(u^{1,2}(x,t)e^{\lambda t}, v^{1,2}(x,t)e^{\lambda t})$, $(x,t) \in \overline{Q}$,
$\tilde{J} * w(x,t) = \mathrm{col}(\tilde{J}_1 * u_1(x,t), ..., \tilde{J}_M * u_M(x,t), \tilde{J}_{M+1} * v_1(x,t), ..., \tilde{J}_{M+L} * v_L(x,t))$, де
$\tilde{J}_i * u_i(x,t) = \int\limits_0^{\tau_i} \tilde{J}_i(x,s)u_i(x,t-s)\,ds$, $i \in \{1,...,M\}$, $\tilde{J}_{M+j} * v_j(x,t) = \int\limits_0^{\tau_{M+j}} \tilde{J}_{M+j}(x,s)v_j(x,\, t-s)\,ds$, $j \in \{1,...,L\}$, а $\tilde{J}_k(x,s) = J_k(x,s)e^{\lambda(s-\tau_k)}$, $s \in [0,\tau_k]$, $k \in \{1,...,M+L\}$, і

$$\tilde{f}_i^{\lambda}(x,t,\xi,\eta) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[\tilde{K}_{ik}^{f}(x,t)\xi_k + \tilde{L}_{ik}^{f,\lambda}(x,t)\eta_k\right], \qquad (x,t,\xi,\eta) \in Q \times \mathbb{R}^{2(M+L)};$$

$$\tilde{g}_j^{\lambda}(x,t,\xi,\eta) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{M+L} \left[\tilde{K}_{jk}^{g}(x,t)\xi_k + \tilde{L}_{jk}^{g,\lambda}(x,t)\eta_k\right], \qquad (x,t,\xi,\eta) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^{2(M+L)},$$

де

$$\tilde{K}_{ik}^{f}(x,t) \overset{\text{def}}{=} \Phi_{ik}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J * w^1(x,t)),$$

$$\tilde{L}_{ik}^{f,\lambda}(x,t) \overset{\text{def}}{=} \Psi_{ik}(x,t,w^2(x,t),J * w^1(x,t),J * w^2(x,t))e^{\lambda\tau_k},$$

$$\tilde{K}_{jk}^{g}(x,t) \overset{\text{def}}{=} S_{jk}(x,t,w^1(x,t),w^2(x,t),J * w^1(x,t)),$$

$$\tilde{L}_{jk}^{g,\lambda}(x,t) \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{jk}(x,t,w^2(x,t),J * w^1(x,t),J * w^2(x,t))e^{\lambda\tau_k},$$

$i \in \{1,...,M\}$, $j \in \{1,...,L\}$, $k \in \{1,...,M+L\}$.

Легко бачити, що коефіцієнти диференціальних операторів P_i^{λ}, $i \in \{1,...,M\}$, G_j^{λ}, $j \in \{1,...,L\}$, задовольняють умови, які аналогічні до умов (**A1**)-(**A3**) для коефіцієнтів операторів P_i, $i \in \{1,...,M\}$, G_j, $j \in \{1,...,L\}$. Перевіримо, що, коли $\lambda \in (0,\nu_0)$, то для коефіцієнтів P_i^{λ}, $i \in \{1,...,M\}$, G_j^{λ}, $j \in \{1,...,L\}$ виконується умова, аналогічна до умови (**A4**).

На підставі умови (**A3**) і означення ν_0 маємо

$$a_i(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}[\tilde{K}_{ik}^{f}(x,t)+\tilde{L}_{ik}^{f,\lambda}(x,t)] \geqslant a_i(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}\left[K_{ik}^{f}(x,t)+L_{ik}^{f}(x,t)e^{\lambda\tau_k}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{(x,t)\in Q}\big(a_i(x,t)-f^*(x,t)\big)-\lambda-\sup_{(x,t)\in Q}\sum_{k=1}^{M+L}(e^{\lambda\tau_k}-1)L_{ik}^{f}(x,t) \geqslant$$

$$\geqslant a_0-\lambda-(e^{\lambda\tau_*}-1)f_0=\varphi(\lambda)>0, \quad i \in \{1,...,M\},$$

$$c_j(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}\left[\tilde{K}_{jk}^{g}(x,t)+\tilde{L}_{jk}^{g}(x,t)\right] \geqslant c_j(x,t)-\lambda-\sum_{k=1}^{M+L}\left[K_{jk}^{g}(x,t)+L_{jk}^{g}(x,t)e^{\lambda\tau_k}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{(x,t)\in\overline{Q}}\big(c_j(x,t)-g^*(x,t)\big)-\lambda-\sup_{(x,t)\in Q}\sum_{k=1}^{M+L}(e^{\lambda\tau_k}-1)L_{jk}^{g}(x,t) \geqslant$$

$$\geqslant b_0 - \lambda - (e^{\lambda\tau_*} - 1)g_0 = \psi(\lambda) > 0, \quad j \in \{1, ..., L\}.$$

Звідси видно, що виконується умова аналогічна до умови (**A4**) з тією лише різницею, що замість $a_0 > 0$ і $b_0 > 0$ треба взяти відповідно $\varphi(\lambda) > 0$ і $\psi(\lambda) > 0$. Очевидно, що виконується умова аналогічна до умови (**A5**), оскільки

$$0 \leqslant \int\limits_0^{\tau_k} \tilde{J}_k(x,s)\,ds \leqslant \int\limits_0^{\tau_k} J_k(x,s)\,ds \leqslant 1, \quad k \in \{1, ..., M+L\}.$$

Нехай t_* – довільне від'ємне число, $Q^* = \Omega\times(t_*, T)$, $\Sigma^* = \partial\Omega\times(t_*, T]$, $G_k^* = \overline{\Omega}\times(t_*-\tau_k, t_*]$, якщо $\tau_k > 0$, і $G_k^* = \overline{\Omega}\times\{t_*\}$, якщо $\tau_k = 0$, $k \in \{1, ..., M+L\}$. Міркуючи аналогічно як при доведенні леми 4, та враховуючи вищесказане, отримаємо

$$|\tilde{w}^{1,2}(x,t)| \leqslant \max\{e^{\lambda T}\cdot \sup_{(y,s)\in\Sigma^*}|u^{1,2}(y,s)|,\ e^{\lambda t_*}\cdot \max_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup_{(y,s)\in G_i^*}|u_i^{1,2}(y,s)|,$$
$$e^{\lambda t_*}\cdot \max_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup_{(y,s)\in G_{M+j}^*}|v_j^{1,2}(y,s)|,\ \frac{e^{\lambda T}}{\varphi(\lambda)}\cdot\sup_{(y,s)\in Q^*}|\hat{f}^{1,2}(y,s)|,$$
$$\frac{e^{\lambda T}}{\psi(\lambda)}\cdot\sup_{(y,s)\in Q^*}|\hat{g}^{1,2}(y,s)|\},\quad (x,t)\in\overline{Q^*}. \quad (24)$$

Оскільки $w^1,\ w^2 \in E_0(\overline{Q}; M+L)$, то $|w^{1,2}(x,t)| \leqslant C_1$ для всіх $(x,t) \in \overline{Q}$, де $C_1 \geqslant 0$ – стала. Отже, $e^{\lambda t_*}\cdot \max\limits_{i\in\{1,\dots,M\}}\sup\limits_{(y,s)\in G_i^*}|u_i^{1,2}(y,s)| \to 0$ і $e^{\lambda t_*}\cdot \max\limits_{j\in\{1,\dots,L\}}\sup\limits_{(y,s)\in G_{M+j}^*}|v_j^{1,2}(y,s)| \to 0$ при $t_* \to -\infty$. Враховуючи це, перейдемо в (24) до границі при $t_* \to -\infty$. В результаті прийдемо до нерівності

$$|w^{1,2}(x,t)| \leqslant \max\{e^{\lambda(T-t)}\cdot\sup_{(y,s)\in\Sigma}|u^{1,2}(y,s)|,$$
$$\frac{e^{\lambda(T-t)}}{\varphi(\lambda)}\cdot\sup_{(y,s)\in Q}|\hat{f}^{1,2}(y,s)|,\ \frac{e^{\lambda(T-t)}}{\psi(\lambda)}\cdot\sup_{(y,s)\in Q}|\hat{g}^{1,2}(y,s)|\},\quad (x,t)\in Q. \quad (25)$$

Для кожної фіксованої точки $(x,t) \in Q$ перейдемо в (25) до границі при $\lambda \to +0$. В результаті отримаємо (17) для $\nu = 0$.

Нехай тепер ν – довільне, причому $\nu < \nu_0, \nu \neq 0$. Домножимо (18),(19) і (20) на $e^{\nu t}$. Після простих перетворень одержимо (див. (21)-(23))

$$P_i^\nu \hat{w}^{1,2}(x,t) = \hat{f}_i^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t)\in Q, \quad i\in\{1,...,M\},$$
$$G_j^\nu \hat{w}^{1,2}(x,t) = \hat{g}_j^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t)\in\overline{Q}, \quad j\in\{1,...,L\},$$
$$\tilde{u}_i^{1,2}(x,t) = h_i^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t)\in\Sigma, \quad i\in\{1,...,M\},$$

де $\hat{w}^{1,2}(x,t) = \mathrm{col}\,(\hat{u}^{1,2}(x,t), \hat{v}^{1,2}(x,t)) \stackrel{def}{=} \mathrm{col}\,(u^{1,2}(x,t)e^{\nu t}, v^{1,2}(x,t)e^{\nu t})$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Як було показано вище, коефіцієнти диференціальних операторів P_i^ν, $i \in \{1, ..., M\}$, G_j^ν, $j \in \{1, ..., L\}$ задовольняють умови, які аналогічні до умов (**A1**)-(**A5**),(**A7**) для коефіцієнтів операторів P_i, $i \in \{1, ..., M\}$, G_j, $j \in \{1, ..., L\}$, з тією лише різницею, що замість $a_0 > 0$ і $b_0 > 0$ треба взяти відповідно $\varphi(\nu) > 0$ і $\psi(\nu) > 0$. Очевидно, що $\hat{w}^{1,2} \in E_0(\overline{Q}; M + L)$. З доведеного для $\nu = 0$ отримаємо

$$|\hat{w}^{1,2}(x,t)| \leqslant \max\{ \sup_{(y,s)\in\Sigma} |u^{1,2}(y,s)e^{\nu s}|,$$
$$\sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{f}^{1,2}(y,s)e^{\nu s}|}{\varphi(\nu)}, \sup_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{g}^{1,2}(y,s)e^{\nu s}|}{\psi(\nu)}\}, \quad (x,t) \in Q.$$

Звідси одержимо (17).

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Нехай $\hat{w} = \text{col}\ (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{M+L}$, а w – розв'язок задачі (1)-(3). Очевидно, що $P\hat{w} = 0$ і $G\hat{w} = 0$. Застосовуючи лему 5 до вектор-функцій w і $\hat{w}$, отримаємо потрібну оцінку. □

Доведення теореми 2. Припустимо, що існують два розв'язки $w^1 = \text{col}\ (u^1, v^1)$ і $w^2 = \text{col}\ (u^2, v^2)$ задачі (1)-(3). Тоді $u^1(x,t) = u^2(x,t)$, $(x,t) \in \Sigma$; $Pw^1(x,t) = Pw^2(x,t)$, $(x,t) \in Q$; $Gw^1(x,t) = Gw^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Звідси та з леми 5 випливає, що $w^1(x,t) = w^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. □

Доведення теореми 3. Розглянемо спочатку випадок, коли $\nu = 0$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ позначимо $Q^k = Q \cap \{(x,t) : t > -k\}$, $\Sigma^k = \Sigma \cap \{(x,t) : t > -k\}$, $G_l^k = \overline{\Omega} \times (-k - \tau_l, -k]$, якщо $\tau_l > 0$, $G_l^k = \overline{\Omega} \times \{-k\}$, якщо $\tau_l = 0$, $l \in \{1, ..., M + L\}$. Визначимо вектор-функцію $w^k = \text{col}\ (u^k, v^k)$ як розв'язок задачі

$$P_i w^k(x,t) = \hat{f}_i^k(x,t), \qquad (x,t) \in Q^k, \qquad i \in \{1, ..., M\}, \tag{26}$$

$$Gw^k(x,t) = \hat{g}^k(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q^k}, \qquad j \in \{1, ..., L\}, \tag{27}$$

$$u^k(x,t) = h^k(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^k, \qquad i \in \{1, ..., M\}, \tag{28}$$

$$u_i^k(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_i^k, \quad i \in \{1, ..., M\},$$
$$v_j^k(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G_{M+j}^k, \quad j \in \{1, ..., L\}. \tag{29}$$

Тут $h^k(x,t) = \zeta(t+k)h(x,t)$ при $(x,t) \in \Sigma$, $\hat{f}^k(x,t) = \hat{f}(x,t)\zeta(t+k)$, $\hat{g}^k(x,t) = \hat{g}(x,t)\zeta(t+k)$ при $(x,t) \in \overline{Q}$, де ζ – гладка і монотонна на $\mathbb{R}$ функція така, що $\zeta(t) = 0$ при $t \leqslant 1/2$, $\zeta(t) = 1$ при $t \geqslant 1$.

Із результатів праць [1,2] випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ задача (26) – (28) має єдиний розв'язок $w^k \in [C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q^k})]^M \times [C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q^k})]^L$, причому (на підставі леми 4) $w^k(x,t) = 0$ для всіх $(x,t) \in \overline{\Omega} \times (-k, -k + 1/2)$. Продовжимо кожну з вектор-функцій u^k і v^k нулем на $\overline{Q} \setminus \overline{Q^k}$ і залишимо за продовженнями ті самі позначення ($k \in \mathbb{N}$). Очевидно, що $w^k = \text{col}\ (u^k, v^k) \in [C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^M \times [C^{\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})]^L$, $w^k = RS_0(\hat{f}^k, \hat{g}^k, h^k)$ ($k \in \mathbb{N}$), згідно з теоремою 1

$$|w^k(x,t)| \leqslant M_0 \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Покажемо, що

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i^k||^Q_{2+\alpha,1+\alpha/2} + \sum_{j=1}^{L} ||v_j^k||^Q_{\alpha,1+\alpha/2} \leqslant C_2, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка не залежить від k.

Перепишемо рівняння (26) у такому вигляді:

$$\frac{\partial u_i^k(x,t)}{\partial t} - \sum_{m,l=1}^{n} a_{i,ml}(x,t)\frac{\partial^2 u_i^k(x,t)}{\partial x_m \partial x_l} + \sum_{m=1}^{n} a_{i,m}(x,t)\frac{\partial u_i^k(x,t)}{\partial x_m} + a_i(x,t)u_i^k(x,t) =$$

$$= f_i(x,t,w^k(x,t), J * w^k(x,t)) + \hat{f}_i^k(x,t), \qquad (x,t) \in Q^k, \qquad i \in \{1,...,M\} \quad (32)$$

і протрактуємо праву частину як вільний член. З умов теореми, враховуючи (30), випливає, що права частина (32) є неперервною і обмеженою на $\overline{Q}$. Застосовуючи до системи (32) теорему 3.1 праці [8, с.665], отримаємо

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i^k||_{\alpha,\alpha/2}^{Q} \leqslant C_3, \tag{33}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка залежить від n, M_0, $||a_{i,ml}||_{0,0}^Q$, $||a_{i,m}||_{0,0}^Q$, $||a_i||_{0,0}^Q$, $||\partial a_{i,ml}/\partial x_s||_{0,0}^Q$, $\inf\limits_{t\in(-\infty,T]} \mu_i(t)$, $\sup\{f_i(x,t,\xi,\eta) \ : \ (x,t) \in Q, |\xi| \leqslant M_0, |\eta| \leqslant M_0\}$, $||\hat{f}_i||_{0,0}^Q, ||h_i||_{0,0}^\Sigma$, $i \in \{1,...,M\}$, $\{m,l,s\} \subset \{1,...,n\}$, але не залежить від k.

Розглянемо послідовність $\{v^k\}$. Для довільних (x_1,t_1), $(x_2,t_2) \in \overline{Q}$ маємо

$$|v_j^k(t_1,x_1) - v_j^k(t_2,x_2)| \leqslant |v_j^k(t_1,x_2) - v_j^k(t_2,x_2)| + |v_j^k(t_1,x_1) - v_j^k(t_1,x_2)|. \tag{34}$$

Від рівностей вигляду (27), записаних для $x = x_1$, віднімемо відповідно такі самі рівності, але записані для $x = x_2$. В результаті простих перетворень, використовуючи зауваження 1, отримаємо

$$\frac{\partial(v_j^k(x_1,t) - v_j^k(x_2,t))}{\partial t} + c_j(x_2,t)(v_j^k(x_1,t) - v_j^k(x_2,t)) -$$

$$- \sum_{m=M+1}^{M+L} S_{jm}(x_2,t,w^k(x_1,t),w^k(x_2,t), J * w^k(x_1,t))(v_m^k(x_1,t) - v_m^k(x_2,t)) -$$

$$-\sum_{m=M+1}^{M+L} \Lambda_{jm}(x_2,t,w^k(x_2,t), J{*}w^k(x_1,t), J{*}w^k(x_2,t)) J_{M+m} {*} (v_m^k(x_1,\cdot) - v_m^k(x_2,\cdot)(t)) =$$

$$= [g_j(x_1,t,w^k(x_1,t), J * w^k(x_1,t)) - g_j(x_2,t,w^k(x_1,t), J * w^k(x_1,t))] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{M} S_{jl}(x_2,t,w^k(x_1,t),w^k(x_2,t), J * w^k(x_1,t))(u_l^k(x_1,t) - u_l^k(x_2,t)) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{M} \Lambda_{jl}(x_2,t,w^k(x_2,t), J * w^k(x_1,t), J * w^k(x_2,t)) J_l * (u_l^k(x_1,\cdot) - u_l^k(x_2,\cdot)(t)) +$$

$$+ (c_j(x_1,t) - c_j(x_2,t))v_j^k(x_1,t) + (\hat{g}_j(x_1,t) - \hat{g}_j(x_2,t)), \quad j \in \{1,...,L\}. \tag{35}$$

Міркуючи аналогічно, як при доведені леми 4 і використовуючи зауваження 2, умови (**B1**)-(**B3**), (**B5**) та оцінку (30), з (35) одержимо

$$|v_j^k(x_1,t) - v_j^k(x_2,t)| \leqslant C_4|x_1 - x_2|^\alpha, \quad t \in (-\infty, T], \tag{36}$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від k.

Запишемо рівняння (27) у такому вигляді:

$$\frac{\partial v_j^k(x,t)}{\partial t} = g_j(x,t,w^k(x,t), J * w^k(x,t)) + \hat{g}_j^k(x,t) - \\ - c_j(x,t)v_j^k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}, \quad j \in \{1,...,L\}. \quad (37)$$

З умови (**B2**) і оцінки (30) випливає обмеженість правої частини (37) рівномірно за $k \in \mathbb{N}$, а звідси – рівномірна обмеженість (стосовно k) похідних $\partial v_j^k/\partial t$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1,...,L\}$ на Q. Отже, використовуючи теорему Лагранжа про скінченний приріст, з (34), (36), (37) та (**B2**), (**B3**) маємо, що

$$\sum_{j=1}^{L} ||v_j^k||^Q_{\alpha,1+\alpha/2} \leqslant C_5, \quad (38)$$

де $C_5 \geqslant 0$ – стала, яка не залежить від k.

Нехай $\tilde{f}_i^k(x,t) \stackrel{def}{=} f_i(x,t,w^k(x,t), J * w^k(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$, $i \in \{1,...,M\}$, $k \in \mathbb{N}$. З (33), (38) та (**B2**),(**B3**) отримаємо, що $||\tilde{f}_i^k||^Q_{\alpha,\alpha/2} \leqslant C_6$, $i \in \{1,...,M\}$, де $C_6 \geqslant 0$ – стала, яка не залежить від k. Враховуючи це, з (32) і теореми 10.1 праці [8, с.400] одержимо

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i^k||^Q_{2+\alpha,1+\alpha/2} \leqslant C_7, \quad (39)$$

де $C_7 \geqslant 0$ – стала, яка не залежить від k.

З (38) і (39) випливає, що справджується оцінка (31). Отже, з послідовності w^k (використовуючи діагональний процес) можна вибрати підпослідовність (за якою залишимо те саме позначення) таку, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ $u_i^k \underset{k\to\infty}{\to} u_i$ в $C^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q^m})$ і $v_j^k \underset{k\to\infty}{\to} v_j$ в $C^{\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q^m})$, $i \in \{1,...,M\}$, $j \in \{1,...,L\}$, де $0 < \gamma < \alpha$. Приймемо $w(x,t) = \mathrm{col}\ (u_1(x,t),...,u_M(x,t), v_1(x,t),...,v_L(x,t))$, $(x,t) \in \overline{Q}$. Легко бачити, що знайдена вектор-функція w буде розв'язком задачі (1)-(3). З (31) отримаємо

$$\sum_{i=1}^{M} ||u_i||^Q_{2+\alpha,1+\alpha/2} + \sum_{j=1}^{L} ||v_j||^Q_{\alpha,1+\alpha/2} \leqslant C_2. \quad (40)$$

Отож, ми довели теорему у випадку $\nu = 0$.

Розглянемо задачу (1)-(3) у випадку, коли ν – довільне, $\nu < \nu_0, \nu \neq 0$. Домножимо кожне рівняння задачі на $e^{\nu t}$. В результаті одержимо

$$L_i\tilde{w}(x,t) - \tilde{f}_i^\nu(x,t,\tilde{w}(x,t), J * \tilde{w}(x,t)) = \hat{f}_i(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t) \in Q, \quad i \in \{1,...,M\}, \quad (41)$$

$$F_j\tilde{w}(x,t) - \tilde{g}_j^\nu(x,t,\tilde{w}(x,t), J * \tilde{w}(x,t)) = \hat{g}_j(x,t)e^{\nu t}, \ (x,t) \in \overline{Q}, \ j \in \{1,...,L\}, \quad (42)$$

$$\tilde{u}_i(x,t) = h_i(x,t)e^{\nu t}, \quad (x,t) \in \Sigma, \quad i \in \{1,...,M\}, \quad (43)$$

де L_i, $i \in \{1,...,M\}$, F_j, $j \in \{1,...,L\}$ такі, як в (18) і (19), $\tilde{w}(x,t) = w(x,t)e^{\nu t}$, а функції $\tilde{f}_i^\nu(x,t,\xi,\eta), i \in \{1,...,M\}$, і $\tilde{g}_j^\nu(x,t,\xi,\eta), j \in \{1,...,L\}$ такі, як в (21) і (22) з заміною лише λ на ν. Перевірка того, що функції $\tilde{f}_i^\nu, \tilde{g}_j^\nu$, $i \in \{1,...,M\}, j \in$

$\{1, ..., L\}$ задовольняють умову (**A3**) та умову (**A4**) із заміною $a_0 > 0$ і $b_0 > 0$ відповідно на $\varphi(\nu) > 0$ і $\psi(\nu) > 0$, робиться аналогічно як у випадку для функцій з рівнянь (21) і (22). Очевидно, що функції $\hat{f}(x,t)e^{\nu t}$, $h(x,t)e^{\nu t}, \hat{g}(x,t)e^{\nu t}$ належать відповідно просторам $E_0(Q; M)$, $E_0(\Sigma; M)$ та $E_0(\overline{Q}; L)$. З вище доведеного (для $\nu = 0$) випливає, що існує розв'язок $\tilde{w}$ задачі (41)-(43) з класу $E_0(\overline{Q}; M+L)$. Отже, вектор-функція $w(x,t) = \tilde{w}(x,t)e^{-\nu t}$, $(x,t) \in Q$ належить класу $E_\nu(\overline{Q}; M+L)$ і є шуканим розв'язком задачі (1)-(3).

Доведення теореми 4. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число, а вектор-функції $\{\text{col}\ (\hat{f}^1, \hat{g}^1, h^1), \text{col}\ (\hat{f}^2, \hat{g}^2, h^2)\} \subset \Pi_\nu$ такі, що $\sup\limits_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{f}^1(y,s)-\hat{f}^2(y,s)|e^{\nu s}}{\varphi(\nu)} < \varepsilon$, $\sup\limits_{(y,s)\in Q} \frac{|\hat{g}^1(y,s)-\hat{g}^2(y,s)|e^{\nu s}}{\psi(\nu)} < \varepsilon$, $\sup\limits_{(y,s)\in\Sigma} |h^1(y,s) - h^2(y,s)|e^{\nu s} < \varepsilon$, а $w^i = RS_\nu(\hat{f}^i, \hat{g}^i, h^i)$, $i \in \{1,2\}$. Використовуючи лему 5, отримаємо потрібне твердження.

---

1. *Рао C.V.* Coupled nonlinear parabolic systems with time delays // Journal of mathematical analysis and applications – 1995. – Vol.196. – P.237-265.
2. *Рао C.V.* Parabolic systems in unbounded domains. II. Equations with time delays // Journal of mathematical analysis and applications – 1998. – Vol.225. – P.557-586.
3. *Babak P.P.* The first boundary value problem for coupled diffusion systems with functional arguments // Математичні студії. – 1997. – T.7. – N.2. – P.179-186.
4. *Babak P.P.* Coupled diffusion systems with functional arguments in unbounded domains // Математичні студії. – 1999. – T.12. – N.1. – P.85-89.
5. *Бокало М.М., Дмитрів В.М.* Задача Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь дифузії з функціоналами // Укр. мат. журн. – 2001. – T.53. – N 11. – C.1468-1481.
6. *Бокало М.М., Дмитрів В.М.* Задача Фур'є для різнокомпонентної системи рівнянь з функціоналами в необмежених областях // Вісник національного університету "Львівська Політехніка". Серія "Прикладна математика". – 2000. – N 411. – C.37-44.
7. *Шмулев И.И.*Периодические решения первой краевой задачи для параболических уравнений// Матем. сборник. – 1965. – T.66(108). – N 3.– C.398-410.
8. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

ON A FOURIER PROBLEM FOR COUPLED EVOLUTION SYSTEM OF EQUATIONS WITH INTEGRAL TIME DELAYS

Mykola Bokalo, Vasyl' Dmytriv

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Correctness (i.e. existence, uniqueness and continuous dependence on data-in of solution) of problem without initial conditions for coupled systems of parabolic-ordinary equations with integral time delays is established. Besides, apriori estimate of solution of this problem is established.

Key words: Fourier Problem, coupled system, integral time delay.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.50–59

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.50–59

УДК 624.07:534.1

АНАЛОГ ЗАДАЧІ ЛАГРАНЖА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ СТІЙКОСТІ РУХУ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА ДВОМА МІРАМИ

Петро ДОМАНСЬКИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано формулювання та методику розв'язування задачі оптимізації форми пружних тіл при дослідженні їх стійкості за двома мірами. Для дослідження стійкості використано аналог прямого методу Ляпунова для систем із розподіленими параметрами. Задачу оптимізації розв'язано методами варіаційного числення. Застосування отриманих результатів проілюстровано на прикладі стержнів змінного поперечного перерізу, на які діють осьові стискні сили.

Ключові слова: оптимізація форми, стійкість за двома мірами.

Загальні питання формулювання та розв'язування задач оптимізації форми пружних тіл при дослідженні їх стійкості систематизовано в багатьох монографіях, наприклад [1–4]. У всіх цих працях вихідним є критерій Ейлера дослідження стійкості рівноваги пружних тіл. У публікаціях [5–7] розглядали питання дослідження стійкості руху пружних тіл за двома вибраними інтегральними мірами. У цій праці пропонуємо формулювання та методику дослідження задач оптимізації форми пружних тіл при дослідженні їх стійкості за цими двома мірами. Для розв'язування задач оптимізації використано методи варіаційного числення. Застосування одержаних результатів проілюстровано на прикладі стержнів змінного поперечного перерізу, на які діють осьові стисні сили.

Формулювання задачі. Розглянемо лінеаризоване рівняння стійкості руху ізотропних пружних тіл [8]

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

де $\hat{P}_0^{\bullet} = \hat{P}_0^{\bullet}\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right)$ – конвективна похідна тензора напружень Піоли-Кірхгофа; $\vec{u}_0$ – вектор переміщення з відлікової конфігурації в базову конфігурацію; $\vec{u}$ – збурення вектора переміщення в базовій конфігурації; $\vec{\nabla}_0$ – набла-оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; "$\cdot$" – операція скалярного (внутрішнього) множення; "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) множення, ρ_0 – густина розподілу маси стосовно відлікової конфігурації.

На межі ∂X_0 відлікової конфігурації розглядаємо такі граничні умови:

$$\vec{u}\big|_{\partial X_1} = \vec{0}, \quad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_2} = \vec{0}, \quad \vec{n}_0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}\Big|_{\partial X_3} = \vec{0}. \tag{2}$$

Тут $\vec{n}_0$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні ∂X_0, $\partial X_1 \cup \partial X_2 \cup \partial X_3 = \partial X_0$.

Задача (1), (2) має розв'язок $\vec{u} \equiv \vec{0}$. Для дослідження стійкості цього розв'язку за міри відхилення базового розв'язку від збуреного приймаємо функціонали

$$d_0\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \left|\hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right|\right] dV_0, \tag{3}$$

$$d\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 dV_0, \tag{4}$$

означені на розв'язках $\vec{u}$ задачі (1), (2).

Означення. Розв'язок $\vec{u} \equiv \vec{0}$ називаємо стійким за мірами (3), (4), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \vec{u})\,(\forall \tau \geqslant \tau_0)\,\left[d_0\left[\vec{u}(\cdot,\tau_0)\right] < \delta \Rightarrow d\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] < \varepsilon\right].$$

На підставі розгляду властивостей функціонала

$$V\left[\vec{u}(\cdot,\tau)\right] = \int\limits_{X_0} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)^2 + \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0\right] dV_0,$$

який відіграє ту саму роль, що і функції Ляпунова для систем із зосередженими параметрами, у працях [5–7] показано, що достатньою умовою стійкості розв'язку $\vec{u} \equiv \vec{0}$ задачі (1), (2) за мірами (3), (4) за умови, що градієнт базового розв'язку не залежить від часу, є виконання нерівності

$$W\left[\vec{u}\right] = \int\limits_{X_0} \hat{P}_0^{\bullet} \cdot \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 dV_0 \geqslant 0 \tag{5}$$

на збуреннях, які справджують умови (2).

Приймаємо, що у відліковій конфігурації досліджуване тіло є стержнем змінного поперечного перерізу $D(\xi^3)$, два характерних розміри якого значно менші за висоту. Положення точок осі тіла характеризуємо радіусом-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^0$, де ξ^3 – осьова координата ($0 \leqslant \xi^3 \leqslant l$), $\vec{\ni}_3^0$ – базовий орт у напрямку цієї осі. Положення довільної точки визначаємо радіусом-вектором $\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}$, $\vec{R}_0 = \vec{R}_0\left(\xi^1, \xi^2\right) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^0$, $\alpha = 1, 2$, $\left(\xi^1, \xi^2\right) \in D(\xi^3)$. Подамо збурення вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}_{30} + \vec{R}_0, \tau\right)$ у вигляді розвинення

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_0^{i-1} \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}\left(\vec{r}_{30}, \tau\right), \tag{6}$$

де індекс (i) зазначає ранг тензорної функції, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів, $\vec{R}_0^n$ – n-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе, $\vec{R}_0^0 \equiv 1$.

Приймемо, що у формулі (2) ∂X_1 – нижня основа стержня ($\xi^3 = 0$), ∂X_2 – його верхня основа ($\xi^3 = l$), ∂X_3 – бічна поверхня. Оскільки на нижній і верхній основах вектор $\vec{n}_0$ колінеарний до базового орта $\vec{\ni}_3^0$, то граничним умовам (2) відповідають такі умови на коефіцієнти $\hat{u}^{(i)}$ розвинення збурення вектора переміщення

$$\left.\hat{u}^{(i)}\right|_{\xi^3=0} = \hat{0}, \quad \left.\hat{P}_3^{(i)}\right|_{\xi^3=l} = \hat{0}, \quad (i = \overline{1, N}). \tag{7}$$

Тут $\hat{P}_3^{(i)}$ – коефіцієнти розвинення вектора $\vec{\exists}_3^0 \cdot \hat{P}_0^{\bullet}$ за базою $\left\{\vec{R}_0^i\right\}$. Підставимо (6) в (5). Одержимо

$$W[\vec{u}] = W_1\left[\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}\right] = \int_0^l F\left(\left\{\hat{u}^{(i)}\right\}, \left\{\frac{\partial \hat{u}^{(i)}}{\partial \xi^3}\right\}\right) d\xi^3 \geqslant 0, \tag{8}$$

де F - квадратична форма стосовно коефіцієнтів $\hat{u}^{(i)}$ розвинення (6) і їхніх похідних за ξ^3.

Отже, для виявлення умов стійкості стержня потрібно знайти ті значення параметрів навантаження, при яких виконується нерівність (8) для будь-яких наборів тензорних функцій $\{\hat{u}^{(i)}\}$, що справджують граничні умови (7).

Нехай стержень зі стандартного матеріалу другого порядку перебуває під дією рівномірно розподіленого по граничних поперечних перерізах осьового стискного навантаження інтенсивності N_0. Бічну поверхню вважаємо вільною від силових навантажень. Впливом масових сил нехтуємо. Нехай область $D(\xi^3)$ має площу $S(\xi^3)$, а її моменти першого порядку і центробіжний момент дорівнюють нулеві.

Обмежимося у формулі (6) двома доданками, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\exists}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k}\vec{\exists}_0^\alpha \otimes \vec{\exists}_0^k$. У працях [5, 6] показано, що для стержнів зі стандартного матеріалу другого порядку при нехтуванні деформацією базової конфігурації для випадку, що розглядаємо, нерівність (8) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} W_1 = \int_0^l S(\xi^3) \Bigg\{ &\lambda\left(u_{11} + u_{22} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)^2 + \left(2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)^2 + 2\mu\left(u_{11}^2 + u_{22}^2\right) + \\ &+ \mu\left(u_{12} + u_{21}\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\mu\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 - \frac{N_0}{S}u_{\alpha 3}^2 + \\ &+ \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\Bigg] + \frac{\mu}{S}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} J^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3}\right)^2 \Bigg\} d\xi^3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Тут $J^{\alpha\alpha} = \int\limits_{D(\xi^3)} (\xi^\alpha)^2\, d\xi^1 d\xi^2$ –моменти інерції області $D\left(\xi^3\right)$; λ, μ – сталі Ляме. Якщо $2\mu - N_0/S \geqslant 0$, то функціонал (9) можна оцінити знизу

$$\begin{aligned} W_1 \geqslant W_2 = \int_0^l S(\xi^3) \sum_{\alpha=1}^{2} \Bigg[&\mu\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 - \frac{N_0}{S}u_{\alpha 3}^2 + \\ &+ \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\Bigg] d\xi^3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Зрозуміло, що для будь-якого $\alpha = 1, 2$ з нерівності (10) одержуємо

$$W_3 = \int_0^l S(\xi^3)\left[\mu\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 - \frac{N_0}{S}u_{\alpha 3}^2 + \right.$$

$$+ \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\lambda + 2\mu - \frac{N_0}{S}\right)\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\Bigg] d\xi^3 \geqslant 0. \tag{11}$$

З нерівності (11) знаходимо оцінку параметра силового навантаження

$$N_0 \leqslant \frac{\int\limits_0^l \left[\mu S(\xi^3)\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + (\lambda + 2\mu) J^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3}{\int\limits_0^l \left[u_{\alpha 3}^2 + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3}. \tag{12}$$

З (7) випливають такі граничні умови на функції u_α, $u_{\alpha 3}$:

$$u_\alpha|_{\xi^3=0} = 0, \quad u_{\alpha 3}|_{\xi^3=0} = 0, \quad \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)\Bigg|_{\xi^3=l} = 0, \quad \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\Bigg|_{\xi^3=l} = 0. \tag{13}$$

Зрозуміло, що критичне значення параметра навантаження $N_0^{\text{кр}}$ при відомій площі поперечного перерізу знаходимо як мінімум функціонала, який стоїть у правій частині (12), за граничних умов (13).

Очевидно, що при $u_{\alpha 3} \equiv 0$ нерівність (11) виконується для будь-яких значень параметра N_0. Тому надалі приймаємо, що $u_{\alpha 3} \neq 0$. Права частина нерівності (12) є інваріантною щодо замін вигляду $u_\alpha = k u'_\alpha$, $u_{\alpha 3} = k u'_{\alpha 3}$, де k – довільна стала; u'_α, $u'_{\alpha 3}$ – нові функції. Приймемо, що

$$\int\limits_0^l \left[u_{\alpha 3}^2 + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3 = 1. \tag{14}$$

Надалі форму поперечного перерізу тіла вважатимемо вибраною, а також приймемо, що момент інерції $J^{\alpha\alpha}$ і площа поперечного перерізу S пов'язані степеневою залежністю [1–4]

$$J^{\alpha\alpha} = a_k S^k. \tag{15}$$

У формулі (15) підсумовування за індексом k немає, a_k – стала при кожному $k = 1, 2, 3$.

Сформулюємо задачу оптимізації в такій формі: серед неперервно диференційовних функцій $u_\alpha = u_\alpha(\xi^3, \tau)$, $u_{\alpha 3} = u_{\alpha 3}(\xi^3, \tau)$ і неперервних функцій $S = S(\xi^3)$, які справджують умови (13) і співвідношення (14), (15), а також обмеження

$$\int\limits_0^l S(\xi^3) d\xi^3 = V^*, \tag{16}$$

знайти такі, які надають $\max\limits_S \min\limits_{u_\alpha, u_{\alpha 3}} \Pi[u_\alpha, u_{\alpha 3}, S]$, де

$$\Pi[u_\alpha, u_{\alpha 3}, S] = \int\limits_0^l \left[\mu S\left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right)^2 + (\lambda + 2\mu) J^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\right)^2\right] d\xi^3, \tag{17}$$

V^* – заданий об'єм стержня.

Розв'язування задачі оптимізації. Задачу оптимізації розв'язуватимемо послідовно, тобто, спочатку дослідимо функціонал (17) на мінімум за змінними u_α, $u_{\alpha 3}$ при відповідних в'язях, а потім знаходимо максимум за змінною S.

Складемо функціонал Лагранжа

$$\Pi^* = \int\limits_0^l \left\{ \mu S \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right)^2 + (\lambda + 2\mu) J^{\alpha\alpha} \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 - \right.$$
$$\left. - \lambda_1 \left[u_{\alpha 3}^2 + \frac{J^{\alpha\alpha}}{S} \left(\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right)^2 \right] + \lambda_2 S \right\} d\xi^3, \tag{18}$$

де λ_1, λ_2 – множники Лагранжа. З необхідної умови мінімуму функціонала (18) одержуємо

$$\mu S \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[a_k \left(\lambda_1 S^{k-1} - (\lambda + 2\mu) S^k \right) \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right] - \lambda_1 u_{\alpha 3} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[S \left(u_{\alpha 3} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right) \right] = 0. \tag{19}$$

З першого рівняння (19) і третьої умови (13) одержуємо $u_{\alpha 3} = -\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}$. Якщо підставити цей вираз у друге рівняння (19) і результат проінтегрувати, то отримаємо

$$a_k S^{k-1} \left[(\lambda + 2\mu) S - \lambda_1 \right] \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} + \lambda_1 u_\alpha = C_1, \tag{20}$$

де C_1 – стала інтегрування.

Введемо нові функції $y(\xi^3, \tau)$ і $f(\xi^3)$, які зв'язані з функціями $u_\alpha(\xi^3, \tau)$ і $S(\xi^3)$ співвідношеннями

$$u_\alpha = y + \frac{C_1}{\lambda_1}, \quad S = \frac{\lambda_1 (f + a_k)}{a_k (\lambda + 2\mu)}. \tag{21}$$

Підставимо (21) в (20). В результаті отримаємо

$$B_{1k} f (f + a_k)^{k-1} y'' + y = 0, \quad B_{1k} = \left[\frac{\lambda_1}{a_k (\lambda + 2\mu)} \right]^{k-1}. \tag{22}$$

(Для скорочення записів штрихами позначають похідні за ξ^3). Якщо врахувати (14), (15), (21), (22), а також зв'язок між функціями $u_{\alpha 3}$ і u_α, то функціонал Π^* можна записати у вигляді

$$\Pi^* = \lambda_1 \int\limits_0^l \left[\frac{y^2}{B_{1k} f (f + a_k)^{k-1}} - (y')^2 + \frac{\lambda_2 (f + a_k)}{a_k (\lambda + 2\mu)} \right] d\xi^3. \tag{23}$$

З необхідної умови екстремуму функціонала (23) за змінною f одержимо

$$y^2 = B_{2k} \frac{f^2 (f + a_k)^k}{a_k + kf}, \quad B_{2k} = \frac{\lambda_2 B_{1k}}{a_k (\lambda + 2\mu)}. \tag{24}$$

Підставимо y, знайдене з формули (24), в рівняння (22). В результаті одержимо диференціальне рівняння для визначення функції f

$$B_{1k}(f+a_k)^{k-1}\left\{\frac{(a_k+f)^{\frac{k}{2}-1}\left[a_k^2+a_k(k+1)f+\frac{k}{2}(k+1)f^2\right]}{a_k+kf}f''+\right. \tag{25}$$

$$\left.+\frac{k(k-1)f(a_k+f)^{\frac{k}{2}-2}\left[6a_k^2+4(k+1)a_kf+k(k+1)f^2\right]}{4(a_k+kf)^2}(f')^2\right\}+(a_k+f)^{\frac{k}{2}}=0.$$

Змінна ξ^3 в рівняння (25) явно не входить. Це дає змогу проінтегрувати це нелінійне диференціальне рівняння при будь-якому $k=1,2,3$. Зокрема, при $k=1$ рівняння (25) має вигляд

$$f''+1=0. \tag{26}$$

Якщо врахувати перші формули з (21) і (24) та розв'язати рівння (26), то одержимо

$$f(\xi^3)=-\frac{(\xi^3)^2}{2}+C_2\xi^3+C_3,\ u_\alpha=\sqrt{\frac{\lambda_2}{a_1(\lambda+2\mu)}}\left(-\frac{(\xi^3)^2}{2}+C_2\xi^3+C_3\right)+\frac{C_1}{\lambda_1}, \tag{27}$$

де C_2, C_3 – сталі інтегрування. З (13), перших формул із (21), (22) і зв'язку між функціями u_α і $u_{\alpha 3}$ одержуємо такі граничні умови:

$$u_\alpha|_{\xi^3=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^3=0}=0,\quad u_\alpha|_{\xi^3=l}=\frac{C_1}{\lambda_1}. \tag{28}$$

Якщо знайти сталі інтегрування C_1, C_2, C_3, врахувати другу формулу (21), справдити інтегральні обмеження (14), (16), то в результаті отримаємо шукані функції S і u_α

$$S=\frac{3V^*(-(\xi^3)^2+l^2+2a_1)}{2(l^3+3a_1l)},\quad u_\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{l^3+3a_1l}}(\xi^3)^2. \tag{29}$$

Оптимальне значення $N_0^{\text{опт}}$ критичного навантаження знайдемо з функціонала (17), якщо підставимо функції (29) і проінтегруємо. Одержимо

$$N_0^{\text{опт}}=\frac{3a_1(\lambda+2\mu)V^*}{l^3+3a_1l}.$$

Критичне значення параметра навантаження $N_0^{\text{кр}}$ при сталій площі поперечного перерізу циліндричного тіла знайдено в праці [7] і воно дорівнює

$$N_0^{\text{кр}}=\frac{(\lambda+2\mu)J^{\alpha\alpha}\pi^2}{4l^2\left(1+\frac{\pi^2J^{\alpha\alpha}}{4l^2S}\right)}=\frac{(\lambda+2\mu)a_1\pi^2V^*}{4l^3\left(1+\frac{\pi^2a_1}{4l^2}\right)}. \tag{30}$$

Не важко переконатися, що

$$\frac{N_0^{\text{опт}}}{N_0^{\text{кр}}}=\frac{12\left(1+\frac{\pi^2a_1}{4l^2}\right)}{\pi^2\left(1+\frac{3a_1}{l^2}\right)}\approx 1,216.$$

Отже, за рахунок оптимального вибору форми поперечного перерізу можна на $21,6\%$ підвищити критичне значення параметра навантаження порівняно з циліндричним тілом сталого поперечного перерізу такого самого об'єму та висоти.

Якщо в рівнянні (29) прийняти $k = 2$, то одержимо

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)f'' + 3f(a_2 + f)(f')^2 + \frac{(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0. \qquad (31)$$

Перейдемо до нової невідомої функції $v(f) = f'$. Тоді $f'' = \dfrac{dv}{df} f' = v'v$ і рівняння (31) набуде вигляду

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)vv' + 3f(a_2 + f)v^2 + \frac{(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0. \qquad (32)$$

Нехай тепер $v^2 = z(f)$. Звідси маємо $2vv' = z'$. В результаті рівняння (32) можна переписати в такій формі:

$$(a_2 + 2f)(a_2^2 + 3a_2 f + 3f^2)z' + 6f(a_2 + f)z + \frac{2(a_2 + 2f)^2}{B_{12}} = 0.$$

Розв'язком цього лінійного неоднорідного рівняння є функція

$$z = \frac{(a_2 + 2f)^2}{(3f^2 + 3a_2 f + a_2^2)^2} \left[\frac{-12f^2 + (8C_1 B_{12} - 6a_2)f + 4C_1 B_{12} a_2 + a_2^2}{4B_{12}} \right],$$

де C_1 – стала інтегрування.

Якщо повернутися до функції f, то для її визначення отримаємо диференціальні рівняння

$$\pm \frac{\sqrt{3B_{12}} \left[\left(f + \frac{a_2}{2} \right)^2 + \frac{a_2^2}{12} \right] df}{\left(f + \frac{a_2}{2} \right) \sqrt{-4 \left(f + \frac{a_2}{2} \right)^2 + 8C \left(f + \frac{a_2}{2} \right) + \frac{a_2^2}{3}}} = d\xi^3, \qquad (33)$$

де $4C = a_2 + 4C_1 B_{12}/3$. Після інтегрування рівнянь (33) одержимо дві сім'ї розв'язків

$$\begin{aligned} \mp & \left[\sqrt{-3(2f + a_2)^2 + 12C(2f + a_2) + a_2^2} + 2C\sqrt{3} \arccos \frac{\sqrt{3}(2f + a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \\ & \left. + a_2 \ln \left| \frac{a_2^2 + 6C(2f + a_2) + a_2 \sqrt{-3(2f + a_2)^2 + 12C(2f + a_2) + a_2^2}}{2f + a_2} \right| \right] = \\ & = \frac{4\xi^3}{\sqrt{B_{12}}} + C_{\mp}, \end{aligned} \qquad (34)$$

які визначають f як неявно задану функцію від ξ^3 на відрізку $[0, l]$. Через $C_{\mp}$ позначено сталі інтегрування, які відповідають різним сім'ям. З формули (33) видно, що одна з цих сімей визначає f як монотонно зростаючу функцію (знак "$-$" у формулі (34)), а друга – як монотонно спадну функцію (знак "$+$" у формулі (34))на відрізку $[0, l]$. З перших формул (21) і (24) та другої і третьої умов (28) випливають такі граничні умови для функції f:

$$f'(0) = 0, \quad f(l) = 0. \qquad (35)$$

Зрозуміло, що для того щоб справдити такі граничні умови, треба вибрати f монотонно спадною функцією , тобто вибрати знак "+" у формулі (34).

Перейдемо до визначення рівнянь, з яких можна визначити сталі інтегрування C, C_+ та множники Лагранжа λ_1, λ_2.

Приймемо в (34) $\xi^3 = l$ і врахуємо другу умову з (35). В результаті отримаємо

$$\sqrt{12a_2C - 2a_2^2} + 2C\sqrt{3}\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} +$$
$$+a_2 \ln\left|a_2 + 6C + \sqrt{12a_2C - 2a_2^2}\right| = \frac{4l}{\sqrt{B_{12}}} + C_+. \tag{36}$$

З першої умови (35) і (33) знаходимо

$$2f(0) + a_2 = 2C + \sqrt{4C^2 + a_2^2/3}. \tag{37}$$

Якщо в (34) прийняти $\xi^3 = 0$ і врахувати (37), то одержимо

$$C_+ = a_2 \ln\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}. \tag{38}$$

Підставимо (38) в (36). В результаті отримаємо перше з шуканих рівнянь

$$\sqrt{12a_2C - 2a_2^2} + 2C\sqrt{3}\arccos\frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} +$$
$$+a_2 \ln\left|\frac{a_2 + 6C + \sqrt{12a_2C - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}}\right| = \frac{4l}{\sqrt{B_{12}}}. \tag{39}$$

Проведемо параметризацію функції f на відрізку $[0, l]$. Приймемо

$$f = C - \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{12C^2 + a_2^2}}{2\sqrt{3}}\cos t. \tag{40}$$

Тоді з (34) отримаємо

$$\xi^3 = \frac{\sqrt{B_{12}}}{4}\Bigg[- C_+ + \sqrt{12C^2 + a_2^2}\sin t + 2C\sqrt{3}t +$$
$$+ a_2 \ln\left|\frac{3\sqrt{12C^2 + a_2^2}\left(2C\sin t - \frac{a_2}{\sqrt{3}}\cos t\right)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}\sin t - a_2}\right|\Bigg]. \tag{41}$$

З формул (40) і (37) випливає, що при $x = 0$ і $t = 0$. З умови $f(l) = 0$ і формули (40) знаходимо, що при $x = l$ $t = \arccos\dfrac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} = t_1$. Отже, формули (40), (41) задають параметрично задану функцію f від ξ^3. Параметр t змінюється на відрізку $[0, t_1]$. Використовуючи формули (21), (24), (40), легко записати параметричне задання функцій S та u_α

$$S = B_{12}\left(C + \frac{a_2}{2} + \frac{\sqrt{12C^2 + a_2^2}}{2\sqrt{3}}\right)\cos t, \quad t \in [0, t_1], \tag{42}$$

$$u_\alpha = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} B_{12} \frac{C^2 - \frac{a_2^2}{4} + \frac{C\sqrt{12C^2+a_2^2}}{\sqrt{3}} \cos t + \frac{12C^2+a_2^2}{12} \cos^2 t}{\left(2C + \frac{\sqrt{12C^2+a_2^2}}{\sqrt{3}} \cos t\right)^{1/2}}, \quad t \in [0, t_1]. \tag{43}$$

Зрозуміло, що ξ^3 визначається формулою (41). Якщо використати параметричне задання функцій S та u_α за допомогою (42), (43), (41), то ізопереметричні умови (14), (16) після інтегрування і відповідних перетворень можна привести до вигляду

$$\frac{\lambda_2 B_{12}^{3/2}}{32\lambda_1} \left[\sqrt{3}(3a_2^2 + 8a_2 C + 12C^2) \arccos \frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \tag{44}$$

$$\left. +(7a_2 + 6C)\sqrt{12a_2 C - 2a_2^2} + 4(a_2^2 - 3a_2 C) \ln \left| \frac{a_2 + 6C + \sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}} \right| \right] = 1,$$

$$\frac{B_{12}^{3/2}}{16} \left[\sqrt{3}(a_2^2 + 4a_2 C + 12C^2) \arccos \frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \tag{45}$$

$$\left. +3(a_2 + 2C)\sqrt{12a_2 C - 2a_2^2} + 2a_2^2 \ln \left| \frac{a_2 + 6C + \sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}} \right| \right] = V^*,$$

а з функціонала (17) одержимо формулу для обчислення оптимального значення $N_0^{\text{опт}}$ критичного навантаження

$$N_0^{\text{опт}} = \frac{a_2(\lambda + 2\mu) B_{12}^{5/2} \lambda_2}{32\lambda_1} \left[\sqrt{3}(3a_2^2 + 8a_2 C + 12C^2) \arccos \frac{\sqrt{3}(a_2 - 2C)}{\sqrt{12C^2 + a_2^2}} + \right. \tag{46}$$

$$\left. +(7a_2 + 6C)\sqrt{12a_2 C - 2a_2^2} + 4(a_2^2 - 3a_2 C) \ln \left| \frac{a_2 + 6C + \sqrt{12Ca_2 - 2a_2^2}}{\sqrt{36C^2 + 3a_2^2}} \right| \right].$$

Підставимо (44) в (46). Одержимо

$$N_0^{\text{опт}} = a_2(\lambda + 2\mu) B_{12}. \tag{47}$$

Рівняння (39), (45) варто розглядати як вихідні для визначення невідомих C та $\sqrt{B_{12}}$ при заданих геометричних характеристиках l та V^*. Зауважимо, що $a_2 = 1/4\pi$. Підставивши знайдені з цих рівнянь зазначені невідомі у формули (41), (42), одержимо параметричне задання оптимальної площі поперечного перерізу, а з (47) отримаємо числове значення $N_0^{\text{опт}}$.

Числові обчислення проводили на ПК для $l = 10, 20, ..., 100$, $V^* = \pi l$. Обчислювали такі величини: C, $\sqrt{B_{12}}$, λ_2/λ_1, $k = N_0^{\text{опт}}/N_0^{\text{кр}}$. Значення $N_0^{\text{кр}}$ знаходили з формули (30). Наведемо для прикладу деякі одержані дані

при $l = 20$ – $C = 25,8277$, $\sqrt{B_{12}} = 0,2846$, $k = 1,3370$;
при $l = 60$ – $C = 232,2376$, $\sqrt{B_{12}} = 0,09496$, $k = 1,3337$;
при $l = 100$ – $C = 645,0572$, $\sqrt{B_{12}} = 0,0569$, $k = 1,3335$.

Обчислення показали, що за рахунок вибору оптимальної форми можна більше ніж на 33% підвищити критичне значення параметра навантаження порівняно зі стержнем сталого поперечного перерізу такої самої висоти й об'єму.

---

1. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. – М., 1986.
2. *Баничук Н.В.* Оптимизация форм упругих тел. – М., 1980.
3. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. – М., 1981.
4. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. – М., 1982.
5. *Доманський П.П.* Дослідження стійкості руху за двома мірами пружних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т. 41. – N 3. – С. 29–36.
6. *Доманський П.П.* Дослідження стійкості руху за двома мірами пружних циліндричних тіл з допомогою методів варіаційного числення // Доп. НАН України. – 2000. – N9. – С. 58–64.
7. *Бурак Я.И., Доманский П.П., Ардан Р.В.* Устойчивость по двум мерам сжатых осевыми силами упругих цилиндрических тел // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36. – N8. – С. 79–86.
8. *Доманський П.П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл // Доп. НАН України. – 1997. – N6. – С. 53–59.

ANALOG OF LAGRANGIAN PROBLEM IN STUDING OF MOTION STABILITY OF ELASTIC BODIES IN TWO MEASURES

Petro Domans'kyj

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

A problem definition and strategy of resolving the problem of optimization the elastic bodies forms under investigating their stability for two measures is proposed. The counterpart of the Lyapunov direct method for systems with distributed parameters is applying. The optimization problem is solved by the variational calculus methods.

The obtained results are illustrated on the examples of pivots with varying cross sections which are affected by axial contractive forces.

Key words: form optimization, stability in two measures.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.60–66

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.60–66

УДК 517.927:519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ЕВОЛЮЦІЙ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ СТОСОВНО СТАРШИХ ПОХІДНИХ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано умови однозначної розв'язності двоточкової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь $x'' = f(t, x, x', x'')$ з неперервною функцією f і лінійними крайовими умовами. Досліджено асимптотичну поведінку при $t \to \infty$ адитивних функціоналів від стохастичних еволюцій, побудованих на траєкторії напівмарківського процесу зі скінченною множиною станів за допомогою розв'язків крайових задач для систем вигляду $x'' = f(t, x, x', x'')$ та задач Коші для систем вигляду $x' = f(t, x, x')$.

Ключові слова: випадкова еволюція, адитивний функціонал, напівмарківський процес, асимптотична поведінка, звичайні диференціальні рівняння.

Відомо, що загальна ергодична теорія описує умови, за яких майже напевне часові середні випадкової еволюції збігаються при $t \to \infty$ до середніх просторових. Ергодичну теорему для процесів з дискретним втручанням випадку довів А.В.Скороход [1, с.362]. В.М.Шуренков довів ергодичну теорему для процесів з марківським втручанням випадку при мінімальних обмеженнях на випадковий процес [2, с.230]. Застосування цих ергодичних теорем для дослідження конкретних класів випадкових процесів вимагає перевірки, чи вони є процесами з дискретним втручанням випадку, чи іноді є марківськими процесами, чи виконуються для них умови, за яких часові середні мають вироджений граничний розподіл. Дослідженню саме таких питань для випадкових еволюцій, що описуються розв'язками звичайних диференціальних рівнянь, присвячена ця праця.

У багатьох випадках на явища, які описують звичайними диференціальними рівняннями, впливає велика кількість зовнішніх випадкових факторів, які змінюють сам вигляд рівняння. Пояснимо цю тезу на конкретних прикладах.

Розглянемо роботу технічного пристрою, який може працювати в різних режимах, причому перемикання з одного режиму на інший відбувається у випадкові моменти часу. Якщо під час роботи в різних режимах задіяні різні вузли пристрою або після перемикання значно змінюються основні параметри, що характеризують його роботу, то очевидно, що диниміка цих параметрів у різних режимах описуватиметься системами звичайних диференціальних рівнянь (найчастіше першого або другого порядку) з різними правими частинами.

Зазначимо, що існуючі математичні моделі природних процесів здебільшого спрощено відображають дійсність, не враховуючи дію випадкових факторів, тому придатні для опису реальних процесів лише протягом обмеженого часу. Наприклад, процеси розмноження або вимирання популяцій в умовах існування різних видів тварин у ситуації "хижак–жертва" [3, с.25-26], зокрема, якщо розглядають кілька співіснуючих видів великих і малих риб, причому малі риби є кормом для великих, описують системою диференціальних рівнянь вигляду $x'(t) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1,n}$. Праві частини цієї системи $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ одержані на підставі певних гіпотез щодо залежності народжуваності та смертності представників цього виду тварин від чисельності $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ всіх видів і можуть адекватно відображати реальні процеси лише за певних обмежень на значення x_i $(a \leqslant x_i \leqslant b)$ (див., наприклад, [4, с.13, 90]). В результаті міграції певних видів риб або їх активного промислового вилову у деякі випадкові моменти часу може значно змінюватись чисельність окремих видів і навіть можуть виникати нові види риб, що, очевидно, може призвести не лише до зміни вигляду функцій $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, а й до зміни кількості шуканих функцій $x_i(t)$.

Наведемо ще один приклад впливу зовнішніх випадкових факторів на зміну вигляду диференціальних рівнянь. Відомі три моделі ведення бойових дій [3, с.35], які є системою двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку стосовно функцій $x(t)$, $y(t)$ – кількісного складу противників з різними правими частинами відповідно для випадків бойових дій: 1) між регулярними військовими частинами; 2) між партизанськими з'єднаннями; 3) для змішаного типу бойових дій, в яких беруть участь як регулярні частини, так і партизанські з'єднання. Очевидно, що в реальних умовах ведення війни у деякі випадкові моменти часу можуть виникати ситуації, коли в результаті зміни місць дислокації регулярних або партизанських з'єднань склад воюючих сторін змінюватиметься, внаслідок чого процес буде переходити з одного стану в інший з відповідною зміною вигляду системи диференціальних рівнянь.

Трактуючи описані вище процеси як випадкові блукання по множині станів, з невеликим ступенем ідеалізації їх можна вважати напівмарківськими [5] зі скінченною множиною станів та неперервним часом. Для вивчення реальних процесів важливо знайти асимптотику при $t \to \infty$ часових середніх значень основних параметрів процесу $x_i(t)$ (наприклад, у моделях математичної екології це – асимптотичні середні числа індивідуумів різних видів [4, с.59]). З метою знаходження таких асимптотик у цій праці на підставі розв'язків крайових задач та задач Коші відповідно для систем звичайних диференціальних рівнянь другого та першого порядку на траєкторії напівмарківського процесу зі скінченною множиною станів побудовано випадкові еволюції, які є процесами з марківським втручанням випадку [1]. Для збільшення загальності моделі розглядають звичайні диференціальні рівняння, частково розв'язані стосовно старших похідних, частковим випадком яких є загальновідомі рівняння нормального вигляду (розв'язані стосовно старших похідних). Оскільки дослідження коректності випадкової еволюції проводять на основі теорем існування та єдиності розв'язків крайових задач і задач Коші, то в цій праці використано деякі результати статті [6], а також, як допоміжне твердження, визначено умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для системи $x'' = f(t, x, x', x'')$ з лінійними крайовими умовами загального вигляду.

1. Умови однозначної розв'язності крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь $x'' = f(t, x, x', x'')$. Для системи рівнянь

$$x''(t) = f(t, x, x', x''), \qquad t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

з неперервною векторною функцією $f : I \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$ розглянемо крайову задачу

$$\nu_i\big(x(a), x(b), x'(a), x'(b)\big) \equiv A_{i1}x(a) + A_{i2}x'(a) + B_{i1}x(b) + B_{i2}x'(b) = c_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

де $c_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2)$, A_{ik} і B_{ik} $(i, k = 1, 2)$ – дійсні $n \times n$-матриці такі, що крайова задача

$$x''(t) = 0, \quad t \in I; \quad \nu_i\big(x(a), x(b), x'(a), x'(b)\big) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3}$$

має лише тривіальний розв'язок. Позначимо через $G(t, s)$ матрицю Гріна задачі (3) і приймемо

$$g_0 = \max_{t \in I} \int_a^b |G(t, s)|\, ds, \quad g_1 = \max_{t \in I} \int_a^b \left|\frac{\partial G(t, s)}{\partial t}\right| ds \quad \left(|G| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}^2\right)^{1/2}\right).$$

Розглянемо узагальнення теореми 3 праці [6].

Теорема 1. *Нехай функція* $f(t, x, y, z)$ *неперервна для* $(t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^{3n}$ *і задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f(t, x, y, z) - f(t, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z})| \leqslant L_0|x - \overline{x}| + L_1|y - \overline{y}| + L_2|z - \overline{z}| \tag{4}$$

із сталими Ліпшиця $L_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ *такими, що* $0 < L_0 g_0 + L_1 g_1 + L_2 < 1$. *Тоді крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок.*

Доведення. Крайова задача (1), (2) еквівалентна рівнянню

$$x(t) = \tilde{x}_0(t) + \int_a^b G(t, s) f\big(s, x(s), x'(s), x''(s)\big)\, ds,$$

де $\tilde{x}_0(t)$ – лінійна векторна функція, яка залежить від A_{ik}, B_{ik}, c_i $(i, k = 1, 2)$. Розглянемо $\mathbb{B}$ – банахів простір функцій $h(t)$, $t \in I$, які мають неперервні другі похідні та норму

$$\|h\| = \max\big(g_1 \max_{t \in I} |h(t)|, \ g_0 \max_{t \in I} |h'(t)|, \ g_0 g_1 \max_{t \in I} |h''(t)|\big).$$

Для фіксованого $0 < R < \infty$ візьмемо в кулі $\|h\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ деяку функцію $h(t)$. Нехай $x(t)$ – єдиний розв'язок рівняння $x'' = f\big(t, h(t), h'(t), h''(t)\big)$, який задовольняє умови (2). Визначимо в кулі $\|h\| \leqslant R$ із $\mathbb{B}$ оператор T_0, прийнявши $T_0\big(h(t)\big) = x(t)$. Тоді

$$x(t) = \tilde{x}_0(t) + \int_a^b G(t, s) f\big(s, h(s), h'(s), h''(s)\big)\, ds \tag{5}$$

і $\forall\, t \in I$ виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leqslant \tilde{p}_0 + g_0 \max_{s \in I} \big|f\big(s, h(s), h'(s), h''(s)\big)\big|; \\ |x'(t)| &\leqslant \tilde{p}_1 + g_1 \max_{s \in I} \big|f\big(s, h(s), h'(s), h''(s)\big)\big|, \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\tilde{p}_0 = \max_{t\in I} |\tilde{x}_0(t)|, \qquad \tilde{p}_1 = \max_{t\in I} |\tilde{x}_0'(t)|.$$

Нехай $x_0 = T_0(0)$ і $|f(t,0,0,0)| \leqslant M$, тоді з (6) при $h \equiv 0$ отримуємо

$$|x_0(t)| \leqslant \tilde{p}_0 + Mg_0, \quad |x_0'(t)| \leqslant \tilde{p}_1 + Mg_1, \quad |x_0''(t)| \leqslant M \quad \forall\, t \in I.$$

Отже, норма функції $x_0(t) = T_0(0) \in \mathbb{B}$ задовольняє нерівність

$$\|T_0(0)\| \leqslant \tilde{p}_0 g_1 + \tilde{p}_1 g_0 + g_0 g_1 M.$$

Нехай $x_1 = T_0(h_1)$, $x_2 = T_0(h_2)$ для довільних h_1, $h_2 \in \mathbb{B}$, тоді згідно з (4)–(6) маємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant g_0 H, \quad |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant g_1 H, \quad |x_1''(t) - x_2''(t)| \leqslant H \quad \forall\, t \in I,$$

де

$$H = L_0 \max_{t\in I} |h_1 - h_2| + L_1 \max_{t\in I} |h_1' - h_2'| + L_2 \max_{t\in I} |h_1'' - h_2''|.$$

Якщо ці три нерівності домножити відповідно на g_1, g_0 і g_0g_1, то одержимо оцінку

$$\|T_0(h_1) - T_0(h_2)\| \leqslant (L_0 g_0 + L_1 g_1 + L_2)\|h_1 - h_2\|.$$

Оскільки $0 < L_0g_0 + L_1g_1 + L_2 < 1$, то для виконання умов принципу стискаючих відображень (теорема 0.1 [7, с.475]) достатньо взяти R, що задовольняє нерівність

$$\tilde{p}_0 g_1 + \tilde{p}_1 g_0 + g_0 g_1 M \leqslant R\big[1 - (L_0 g_0 + L_1 g_1 + L_2)\big].$$

Теорему доведено.

2. Випадкові еволюції, які будують за допомогою розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо напівмарківський процес $z(t)$ із скінченною множиною станів $\{1, 2, \ldots, m\}$ та неперервним часом. Позначимо через $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$ моменти послідовних стрибків процесу, тобто

$$\tau = \inf\{t > 0 : \; z(t) \neq z(0)\}; \quad \tau_1 = \tau, \quad \tau_2 = \inf\{t > \tau_1 : \; z(t) \neq z(\tau_1)\}; \ldots;$$
$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : \; z(t) \neq z(\tau_{k-1})\}; \ldots.$$

Вкладений однорідний ланцюг Маркова $z(\tau_0)$, $z(\tau_1)$, $\ldots$, $z(\tau_k)$,$\ldots$ вважатимемо нерозкладним [8, гл.12] з єдиним стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$ таким, що

$$\sum_{i=1}^{m} p_i p_{ij} = p_j, \quad j = \overline{1,m},$$

де $p_{ij} = P\{z(\tau_1) = j \,/\, z(\tau_0) = i\}$ – перехідні ймовірності ланцюга Маркова.

Розглянемо m систем звичайних диференціальних рівнянь

$$x_s''(t) = f_s(t, x_s, x_s', x_s''), \quad t \in I_s = [0, t_s] \subset \mathbb{R}, \quad s = \overline{1,m}, \tag{7}$$

з неперервними векторними функціями $f_s : I_s \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^n$ та крайовими умовами

$$\begin{aligned} &\nu_i^{(s)}\big(x_s(0), x_s(t_s), x_s'(0), x_s'(t_s)\big) \equiv \\ &\equiv A_{i1}^{(s)} x_s(0) + A_{i2}^{(s)} x_s'(0) + B_{i1}^{(s)} x_s(t_s) + B_{i2}^{(s)} x_s'(t_s) = c_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \quad s = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут для всіх $s = \overline{1,m}$ $c_i^{(s)} \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1,2)$, $A_{ik}^{(s)}$ і $B_{ik}^{(s)}$ $(i,k = 1,2)$ – дійсні $n \times n$–матриці такі, що кожна з однорідних крайових задач

$$x_s''(t) = 0, \quad t \in I_s; \quad \nu_i^{(s)}\big(x_s(0), x_s(t_s), x_s'(0), x_s'(t_s)\big) = 0, \quad i = 1,2, \quad s = \overline{1,m} \tag{9}$$

має лише тривіальний розв'язок. Позначимо через $G_s(t,\xi)$ $(s = \overline{1,m})$ матрицю Гріна відповідної s–ої крайової задачі (9) і приймемо

$$g_{0s} = \max_{t \in I_s} \int_0^{t_s} |G_s(t,\xi)|\, d\xi, \quad g_{1s} = \max_{t \in I_s} \int_0^{t_s} \left| \frac{\partial G_s(t,\xi)}{\partial t} \right| d\xi, \quad s = \overline{1,m}.$$

Припускаючи, що кожна з крайових задач (7), (8) має єдиний розв'язок, побудуємо стохастичну еволюцію на траєкторії напівмарківського процесу $z(t)$ у вигляді

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x_i(t), & \text{якщо } 0 \leqslant t < \tau_1, \quad z(0) = i; \\ x_j(t - \tau_1), & \text{якщо } \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \quad z(\tau_1) = j; \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_s(t - \tau_k), & \text{якщо } \tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}, \quad z(\tau_k) = s; \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{10}$$

де $x_s(t)$, $t \in I_s$ $(s = \overline{1,m})$ – розв'язок s–ої крайової задачі (7), (8). Очевидно, що випадкова еволюція $\tilde{x}(t)$ є процесом з марківським втручанням випадку τ [1].

Для коректної визначеності еволюції $\tilde{x}(t)$ необхідно вважати, що $P\{\tau_1 \leqslant t_i / z(0) = i\} = 1$ для всіх $i = \overline{1,m}$.

Цілком правомірно розглянути поведінку при $t \to \infty$ адитивного функціонала

$$\frac{1}{t} \int_0^t \tilde{x}(u)du,$$

який визначає середнє значення випадкової еволюції $\tilde{x}(u)$ на проміжку часу $[0,t]$.

Теорема 2. *Нехай функції $f_s(t,x,y,z)$ $(s = \overline{1,m})$ неперервні відповідно для $(t,x,y,z) \in I_s \times \mathbb{R}^{3n}$ і кожна з них задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f_s(t,x,y,z) - f_s(t,\overline{x},\overline{y},\overline{z})| \leqslant L_{0s}|x - \overline{x}| + L_{1s}|y - \overline{y}| + L_{2s}|z - \overline{z}|, \quad s = \overline{1,m}$$

зі сталими L_{0s}, L_{1s}, $L_{2s} > 0$ $(s = \overline{1,m})$ такими, що $0 < L_{0s}g_{0s} + L_{1s}g_{1s} + L_{2s} < 1$, $s = \overline{1,m}$. Нехай напівмарківський процес $z(t)$ – нерозкладний, з єдиним стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$ і $\tilde{x}(t)$ – стохастична еволюція вигляду (10), де $x_s(t)$, $t \in I_s$ $(s = \overline{1,m})$ – розв'язок s–ої крайової задачі (7), (8), причому час перебування в стані i зосереджений на I_i. Тоді для всіх $s = \overline{1,m}$

$$P_s\left\{ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{\sum\limits_{i=1}^m p_i E_i \int\limits_0^{\tau_1} x_i(u)du}{\sum\limits_{i=1}^m p_i E_i \tau_1} \right\} = 1, \tag{11}$$

де P_i – умовна ймовірність за умови, що $z(0) = i$, E_i – умовне математичне сподівання за умови, що $z(0) = i$.

Доведення. Насамперед зазначимо, що умови щодо функцій $f_s(t,x,y,z)$ $(s = \overline{1,m})$ забезпечують згідно з теоремою 1 однозначну розв'язність кожної з крайових задач (7), (8), а, отже, й коректну визначеність еволюції $\tilde{x}(t)$. Для доведення теореми необхідно перевірити виконання умов загальної ергодичної теореми для процесів з марківським втручанням випадку (теорема 2 [1, с.362]).

Згідно з нашими припущеннями $P_i\{\tau_1 \leqslant t_i\} = 1$ для всіх $i = \overline{1,m}$, тому $E_i\tau_1 < \infty$ $(i = \overline{1,m})$, і, отже,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i E_i \tau_1 < \infty.$$

Оскільки $x_i(t)$ – обмежений розв'язок на I_i $(i = \overline{1,m})$, то

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \int_0^{\infty} P_i\{\tau_1 < t\} x_i(t)dt = \sum_{i=1}^{m} p_i E_i \int_0^{\tau_1} x_i(u)du < \infty.$$

Отже, всі умови згаданої вище теореми 2 [1, с.362] виконуються, тому для всіх $i = \overline{1,m}$ з ймовірністю $P_i = 1$ існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{x}(u)du = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i \int\limits_0^{\tau_1} x_i(u)du}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i E_i \tau_1},$$

значення якої не залежить від початкового стану $z(0) = i$ напівмарківського процесу. Теорему доведено.

Аналогічні міркування можна провести, будуючи стохастичну еволюцію вигляду (10) за допомогою розв'язків $x_s(t)$, m систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$x_s'(t) = f_s(t, x_s, x_s'), \quad t \in I_s, \quad s = \overline{1,m} \tag{12}$$

з неперервними векторними функціями $f_s : I_s \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ та початковими умовами

$$x_s(0) = x_0^{(s)}, \qquad s = \overline{1,m}, \tag{13}$$

де $x_0^{(s)} \in \mathbb{R}^n$ – задане початкове значення $x_s(t)$.

Теорема 3. *Нехай функції $f_s(t, x, y)$ $(s = \overline{1,m})$ неперервні відповідно для $(t, x, y) \in I_s \times \mathbb{R}^{2n}$ і кожна з них задовольняє умову Ліпшиця*

$$|f_s(t, x, y) - f_s(t, \overline{x}, \overline{y})| \leqslant L_{0s}|x - \overline{x}| + L_{1s}|y - \overline{y}|, \quad s = \overline{1,m}$$

зі сталими L_{0s}, $L_{1s} > 0$ $(s = \overline{1,m})$ такими, що $0 < L_{0s}t_s + L_{1s} < 1$, $s = \overline{1,m}$. Нехай напівмарківський процес $z(t)$ – нерозкладний, з єдиним стаціонарним розподілом $p_1, p_2, \ldots, p_m$ і $\tilde{x}(t)$ – стохастична еволюція вигляду (10), де $x_s(t)$, $t \in I_s$ $(s = \overline{1,m})$ – розв'язок s-ої задачі Коші (12), (13), причому час перебування в стані i зосереджений на I_i. Тоді для всіх $s = \overline{1,m}$ виконуються рівності (11).

Доведення. Згідно з теоремою 1 [6] існує єдиний розв'язок $x_s(t)$ кожної з задач Коші (12), (13). Далі так само, як у доведенні теореми 2 перевіряємо виконання умов теореми 2 [1, с.362].

---

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. – М., 1973. – Т.2.

2. *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. – М., 1989.
3. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М., 1987.
4. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М., 1976.
5. *Королюк В.С., Свищук А.В.* Полумарковские случайные эволюции. – К., 1990.
6. *Жерновий Ю.В.* Про розв'язність задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старшої похідної// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.80–90.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., 1970.
8. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – М., 1986.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF STOCHASTIC EVOLUTIONS DESCRIBED BY THE SOLUTIONS OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS PARTIALLY SOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHER DERIVATIVES

Yaroslav Yeleyko, Yuriy Zhernovyi

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Conditions of unique solvability of the two-point boundary problem for the system of ordinary differential equations $x'' = f(t, x, x', x'')$ with a continuous function f and linear boundary conditions are obtained. Asymptotic behavoir for $t \to \infty$ of the additive functionals on the stochastic evolutions constructed on the trajectory of the semi-Markov process with the finite set of states with the help of solutions of the boundary problems for the systems of the form $x'' = f(t, x, x', x'')$ and the Cauchy problems for the systems of the form $x' = f(t, x, x')$ is examined.

Key words: stochastic evolution, additive functional, semi-Markov process, asymptotic behavior, ordinary differential equations.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.67–76

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.67–76

УДК 517.927

УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНИХ СТОСОВНО ПОХІДНИХ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

За допомогою відомих умов розв'язності крайових задач для системи рівнянь $x'' = F(t, x, x', x'')$, а також методу верхніх і нижніх функцій одержано умови існування розв'язків крайових задач для системи $x' = h(t, x, y, x', y')$, $y' = f(t, x, y, x', y')$ з неперервними функціями h, f і лінійними крайовими умовами.

Ключові слова: система звичайних диференціальних рівнянь, умови розв'язності, метод верхніх і нижніх функцій.

Питання існування та єдиності розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з нелінійним входженням старшої похідної вивчали в [1-4]. У цій праці для дослідження розв'язності системи двох звичайних диференціальних рівнянь $x' = h(t, x, y, x', y')$, $y' = f(t, x, y, x', y')$ з лінійними двоточковими крайовими умовами використано умови існування розв'язків деяких двоточкових крайових задач для системи диференціальних рівнянь $x'' = F(t, x, x', x'')$ [3], а також узагальнено метод верхніх і нижніх функцій, який в [5, гл.4] застосували для вивчення двоточкових крайових задач для системи $x' = h(t, x, y)$, $y' = f(t, x, y)$.

1. Задача з лінійними крайовими умовами загального вигляду. Для системи рівнянь

$$x'(t) = h(t, x, y, x', y'), \quad y'(t) = f(t, x, y, x', y'), \quad t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

з неперервними функціями h, $f : I \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ розглянемо крайову задачу

$$\nu_i\big(x(a), y(a), x(b), y(b)\big) \equiv A_{i1}x(a) + A_{i2}y(a) + B_{i1}x(b) + B_{i2}y(b) = c_i, \quad i = 1, 2, \tag{2}$$

де $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$, A_{ik}, $B_{ik} \in \mathbb{R}$ $(i, k = 1, 2)$, причому $(A_{11}+B_{11})(A_{22}+B_{22})-(A_{21}+$ $+B_{21})(A_{12} + B_{12}) \neq 0$. Крайова задача для системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$z_i''(t) = 0, \quad t \in I, \quad \nu_i\big(z_1'(a), z_2'(a), z_1'(b), z_2'(b)\big) = 0, \quad i = 1, 2, \\ z_1(a) = z_2(a) = 0 \tag{3}$$

має лише тривіальний розв'язок. Позначимо через $G(t,s)$ матрицю Гріна задачі (3) і приймемо

$$\tilde{h} = \max_{t\in I} \int_a^b \left| \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \right| ds \quad \left(|G| = \left(\sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}^2 \right)^{1/2} \right).$$

Ввівши позначення $g = (h, f)$, $\xi = (x, y)$, $\eta = (x', y')$, одержимо векторний запис системи (1) $\quad \xi' = g(t, \xi, \xi')$.

Теорема 1. *Нехай функція $g(t,\xi,\eta)$ неперервна для $(t,\xi,\eta) \in I \times \mathbb{R}^4$, задовольняє умову Ліпшиця стосовно змінної η $\quad |g(t,\xi,\eta_1) - g(t,\xi,\eta_2)| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|$ зі сталою Ліпшиця $L \in (0,1)$, і нехай існують сталі L_0, $\tilde{L} \geqslant 0$ такі, що $|g(t,\xi,0)| \leqslant L_0 + \tilde{L}|\xi|$*
$\forall (t,\xi) \in I \times \mathbb{R}^2$, причому $0 < \tilde{L}\tilde{h} + L < 1$. Тоді крайова задача (1), (2) має хоча б один розв'язок.

Доведення. Виконання умов теореми 1 гарантує згідно з теоремою 1 [3] існування розв'язку крайової задачі

$$\begin{gathered} z''(t) = g(t, z', z''), \quad t \in I, \quad \nu_i\big(z_1'(a), z_2'(a), z_1'(b), z_2'(b)\big) = c_i, \quad i = 1,2, \\ z_1(a) = z_2(a) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

де $z = (z_1, z_2)$. Тому, припустивши, що не існує жодного розв'язку задачі (1), (2), прийдемо до суперечності, оскільки зв'язок між розв'язками крайових задач (4) та (1), (2) виражається співвідношеннями

$$z_1(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau, \quad z_2(t) = \int_a^t y(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. В (3) замість умов $z_1(a) = z_2(a) = 0$ можна розглядати інші варіанти крайових умов: 1) $z_1(a) = z_2(b) = 0$; 2) $z_1(b) = z_2(b) = 0$; 3) $z_1(b) = z_2(a) = 0$. Відповідно в доведенні теореми 1 співвідношення (5) треба замінити на інші, наприклад, у випадку 1) на такі:

$$z_1(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau, \quad z_2(t) = -\int_t^b y(\tau)\,d\tau.$$

2. Метод верхніх і нижніх функцій для системи (1). Для системи (1) розглянемо крайову задачу

$$l_0\big(x(a), y(a)\big) \equiv a_0 x(a) - b_0 y(a) - A = 0, \quad l_1\big(x(b), y(b)\big) \equiv a_1 x(b) + b_1 y(b) - B = 0, \tag{6}$$

де a_0, b_0, a_1, b_1, A, $B \in \mathbb{R}$, a_i, $b_i \geqslant 0$, $a_i + b_i > 0$, $(i = 0,1)$. Оскільки крайова задача (1), (6) – це частковий випадок задачі (1), (2), то як наслідок з теореми 1 отримаємо таке допоміжне твердження.

Лема. *Якщо функція* $g(t,\xi,\eta) = \big(h(t,\xi,\eta), f(t,\xi,\eta)\big)$ *неперервна і обмежена для* $(t,\xi,\eta) \in I \times \mathbb{R}^4$ *і задовольняє умову Ліпшиця стосовно* η *зі сталою* $L \in (0,1)$, *то крайова задача (1), (6) має хоча б один розв'язок.*

Далі для скорочення казатимемо, що функція $g(t,\xi,\eta)$ задовольняє умову (L), якщо $g(t,\xi,\eta)$ неперервна і задовольняє умову Ліпшиця стосовно η зі сталою $L \in (0,1)$.

Теорема 2. *Нехай функція* $g(t,\xi,\eta)$ *задовольняє умову* (L) *і нехай існують функції* α, β, u, $v \in C^1(I)$, φ, ψ, λ_x, μ_x, λ_y, μ_y, u_1, $v_1 \in C(I)$ *такі, що для будь-якого* $t \in I$

1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$;

2) $\alpha'(t) = h\big(t,\alpha(t),u(t),\alpha'(t),u_1(t)\big)$, $\quad u'(t) \geqslant f\big(t,\alpha(t),u(t),\alpha'(t),w(t)\big)$,
$\beta'(t) = h\big(t,\beta(t),v(t),\beta'(t),v_1(t)\big)$, $\quad v'(t) \leqslant f\big(t,\beta(t),v(t),\beta'(t),w(t)\big)$
$\forall\ w(t) \in C(I) : \lambda_y(t) \leqslant w(t) \leqslant \mu_y(t)$;

3) $l_0\big(\alpha(a),u(a)\big) \leqslant 0 \leqslant l_0\big(\beta(a),v(a)\big)$, $\quad l_1\big(\alpha(b),u(b)\big) \leqslant 0 \leqslant l_1\big(\beta(b),v(b)\big)$;

4) для будь-яких y_1, $y_2 \in \big[\varphi(t),\psi(t)\big]$ *з умови* $y_1 > y_2$ *випливає, що*
$h\big(t,\alpha(t),y_1,\alpha'(t),u_1(t)\big) > h\big(t,\alpha(t),y_2,w_x(t),w_y(t)\big)$,
$h\big(t,\beta(t),y_1,\beta'(t),v_1(t)\big) > h\big(t,\beta(t),y_2,w_x(t),w_y(t)\big)$
$\forall\ w_x$, $w_y \in C(I)$, $w_x(t) \in \big[\lambda_x(t),\mu_x(t)\big]$, $w_y(t) \in \big[\lambda_y(t),\mu_y(t)\big]$,

5) $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$, $\quad \lambda_x(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\quad \lambda_y(t) \leqslant \mu_y(t)$;

6) $\varphi(t) \leqslant u(t) \leqslant \psi(t)$, $\quad \varphi(t) \leqslant v(t) \leqslant \psi(t)$, $\quad \lambda_x(t) \leqslant \alpha'(t) \leqslant \mu_x(t)$,
$\lambda_y(t) \leqslant \beta'(t) \leqslant \mu_y(t)$;

7) для будь-яких x, $y \in C^1(I)$ *з умов* $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$ $\forall t \in I$,

$$x'(t) = h\big(t,x(t),\delta\big(\varphi(t),y(t),\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y'(t),\mu_y(t)\big)\big)+ \\ +\delta\big(0,y(t)-\psi(t),1\big)-\delta\big(0,\varphi(t)-y(t),1\big),$$

$$y'(t) = f\big(t,x(t),\delta\big(\varphi(t),y(t),\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y'(t),\mu_y(t)\big)\big),$$

де

$$\delta(x,y,z) = \begin{cases} x, & y < x, \\ y, & x \leqslant y \leqslant z, \\ z, & z < y \end{cases}$$

випливає, що $\varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t)$, $\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t)$ $\forall t \in I$. *Тоді існує хоча б один розв'язок* $\big(x(t),y(t)\big)$ *задачі (1), (6) і для нього є оцінки* $\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t)$, $\varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t)$, $\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t)$ $\forall$ $t \in I$.

Доведення. Визначимо для $(t,x,y,x',y') \in I \times \mathbb{R}^4$ функції

$$H(t,x,y,x',y') = \\ = h\big(t,\delta\big(\alpha(t),x(t),\beta(t)\big),\delta\big(\varphi(t),y(t),\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y',\mu_y(t)\big)\big)+ \\ +\delta\big(0,y(t)-\psi(t),1\big)-\delta\big(0,\varphi(t)-y(t),1\big),$$

$$F(t,x,y,x',y') = \\ = f\big(t,\delta\big(\alpha(t),x(t),\beta(t)\big),\delta\big(\varphi(t),y(t),\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y',\mu_y(t)\big)\big)+ \\ +\delta\big(0,x(t)-\beta(t),1\big)-\delta\big(0,\alpha(t)-x(t),1\big).$$

Розглянемо вектор-функцію $G(t,\xi,\eta) = \big(H(t,\xi,\eta), F(t,\xi,\eta)\big)$ та вектори $\eta_i = (\eta_{ix}, \eta_{iy})$, $i = 1,2$. З того, що вектор-функція $g = (h, f)$ задовольняє умову (L), випливає виконання умови (L) для функції $G(t,\xi,\eta)$, оскільки $\forall\ t \in I$, $\forall\ \eta_1$, $\eta_2 \in \mathbb{R}^2$

$$|G(t,\xi,\eta_1) - G(t,\xi,\eta_2)| = |g(t,\tilde{\xi},\tilde{\eta}_1) - g(t,\tilde{\xi},\tilde{\eta}_2)| \leqslant L|\tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_2| \leqslant L|\eta_1 - \eta_2|,$$

де $\tilde{\xi} = \big(\delta(\alpha,x,\beta), \delta(\varphi,y,\psi)\big)$, $\tilde{\eta}_i = \big(\delta(\lambda_x,\eta_{ix},\mu_x), \delta(\lambda_y,\eta_{iy},\mu_y)\big)$, $i = 1,2$. Крім того, функції H і F обмежені, тому згідно з лемою крайова задача

$$\begin{gathered} x'(t) = H(t,x,y,x',y'), \quad y'(t) = F(t,x,y,x',y'), \quad t \in I; \\ l_0\big(x(a),y(a)\big) = l_1\big(x(b),y(b)\big) = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

має хоча б один розв'язок. Позначимо його через $\big(\overline{x}(t), \overline{y}(t)\big)$. Умови 1)–6) теореми та вигляд функцій $H(t,x,y,x',y')$ і $F(t,x,y,x',y')$ дають змогу далі, міркуючи так само як в доведенні теореми 1 [5, с.62–65], одержати оцінку $\alpha(t) \leqslant \overline{x}(t) \leqslant \beta(t)$ $\forall t \in I$. Оскільки тепер з умови 7) випливає, що $\varphi(t) \leqslant \overline{y}(t) \leqslant \psi(t)$, $\lambda_x(t) \leqslant \overline{x}'(t) \leqslant$ $\leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant \overline{y}'(t) \leqslant \mu_y(t)$ $\forall t \in I$, то $\big(\overline{x}(t), \overline{y}(t)\big)$ є не лише розв'язком задачі (7), а й задачі (1), (6). Теорему доведено.

Конкретизуємо умови теореми 2 для крайової задачі

$$\begin{gathered} x'(t) = h(t,x,y), \quad y'(t) = f(t,x,y,y'), \quad t \in I; \\ l_0\big(x(a),y(a)\big) = l_1\big(x(b),y(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Введемо позначення

$$\omega = \big\{\,(t,x) : t \in I,\ x \in [\alpha(t), \beta(t)]\big\}, \quad \alpha_* = \min_{t\in I} \alpha(t), \quad \beta^* = \max_{t\in I} \beta(t),$$
$$I_{\alpha\beta} = [\alpha_*, \beta^*], \quad \rho = \max\big\{|\alpha(b) - \beta(a)|/(b-a),\ |\alpha(a) - \beta(b)|/(b-a)\big\}.$$

Теорема 3. *Нехай функції $h(t,x,y)$, $f(t,x,y,z)$ неперервні відповідно для $(t,x,y) \in I \times \mathbb{R}^2$, $(t,x,y,z) \in I \times \mathbb{R}^3$, а функція f задовольняє умову Ліпшиця стосовно z зі сталою $L \in (0,1)$. Нехай існують функції α, β, u, $v \in C^1(I)$ такі, що для будь-якого $t \in I$*

1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t)$;

2) $\alpha'(t) = h\big(t,\alpha(t),u(t)\big)$, $\quad u'(t) \geqslant f\big(t,\alpha(t),u(t),w(t)\big)$,
$\beta'(t) = h\big(t,\beta(t),v(t)\big)$, $\quad v'(t) \leqslant f\big(t,\beta(t),v(t),w(t)\big)$
$\forall\ w(t) \in C(I) : |w(t)| \leqslant K_0$;

3) $l_0\big(\alpha(a),u(a)\big) \leqslant 0 \leqslant l_0\big(\beta(a),v(a)\big)$, $\quad l_1\big(\alpha(b),u(b)\big) \leqslant 0 \leqslant l_1\big(\beta(b),v(b)\big)$;

4) для будь-яких y_1, y_2 таких, що $|y_1| \leqslant N_0$, $|y_2| \leqslant N_0$, з умови $y_1 > y_2$ випливає, що

$$h\big(t,\alpha(t),y_1\big) > h\big(t,\alpha(t),y_2\big), \quad h\big(t,\beta(t),y_1\big) > h\big(t,\beta(t),y_2\big).$$

Нехай виконуються умови:

а) існують числа $\underline{N}$, $\overline{N} > 0$ такі, що $\forall (t,x) \in \omega$

$$h(t,x,y) > \rho \quad \forall y \geqslant \overline{N}, \quad h(t,x,y) < -\rho \quad \forall y \leqslant -\underline{N};$$

б) існує число $\tilde{N} \geqslant 0$ і неперервні функції $f_\omega(s) > 0$ $\forall s \geqslant 0$, $h_\omega(s) > 0$ $\forall s \geqslant \tilde{N}$; $p(s) > 0$, $q(s) \geqslant 0$ $\forall s \in I_{\alpha\beta}$; $\gamma(s) \geqslant 0$ $\forall s \in \mathbb{R}$ такі, що $\forall (t,x) \in \omega$

$$|h(t,x,y)| \geqslant p(x)h_\omega(|y|) \quad \forall |y| \geqslant \tilde{N}, \quad |f(t,x,y,z)| \leqslant q(x)f_\omega(|y|)\gamma(z) \quad \forall y,z \in \mathbb{R},$$

причому рівняння

$$\nu = \gamma_0\big(q_0\omega_0(M(\nu))\nu\big) \tag{9}$$

має хоча б один додатний розв'язок ν *і*

$$\int\limits_{\overline{y}}^{\infty} \frac{h_\omega(s)}{f_\omega(s)}\,ds > \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(s)}{p(s)}\,ds,$$

де $\overline{y} = \max(\tilde{N}, \underline{N}, \overline{N})$, $\nu = \nu_0$ *- найменший додатний розв'язок рівняння (9),*

$$\gamma_0(K) = \max_{z\in[-K,K]} \gamma(z), \quad q_0 = \max_{x\in[\alpha(t),\beta(t)],\, t\in I} q(x), \quad \omega_0(M) = \max_{|y|\leqslant N(M)} f_\omega(|y|),$$

$$N(M) = \max\big\{M,\, \max_{t\in I}|u(t)|,\, \max_{t\in I}|v(t)|\big\},$$

а $M = M(\nu)$ *знаходимо з рівності*

$$\int\limits_{\overline{y}}^{M} \frac{h_\omega(s)}{f_\omega(s)}\,ds = \nu \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(s)}{p(s)}\,ds,$$

$$N_0 = N(M_0), \quad K_0 = q_0\omega_0(M_0)\nu_0, \quad M_0 = M(\nu_0),$$

тобто

$$\int\limits_{\overline{y}}^{M_0} \frac{h_\omega(s)}{f_\omega(s)}\,ds = \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(s)}{p(s)}\,ds. \tag{10}$$

Тоді крайова задача (8) має хоча б один розв'язок.

Доведення. Задача (8) – це частковий випадок крайової задачі (1), (6), тому для доведення цієї теореми досить перевірити виконання умов теореми 2. Прийнявши $\psi(t) = -\varphi(t) \equiv N_0$, $\mu_y(t) = -\lambda_y(t) \equiv K_0$, бачимо, що всі умови теореми 2, крім умови 7), виконуються. Покажемо, що виконується також і умова 7), тобто

$$-N_0 \leqslant y(t) \leqslant N_0, \quad -K_0 \leqslant y'(t) \leqslant K_0 \quad \forall t \in I,$$

якщо $\big(x(t), y(t)\big)$ – розв'язок системи

$$\begin{aligned} x' &= h\big(t, x, \delta(-N_0, y, N_0)\big) + \delta(0, y - N_0, 1) - \delta(0, -N_0 - y, 1), \\ y' &= f\big(t, x, \delta(-N_0, y, N_0), \delta(-K_0, y', K_0)\big) \end{aligned} \tag{11}$$

такий, що $x(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]$ $\forall t \in I$.

Зазначимо насамперед, що існує точка $t_0 \in I$ така, що $|x'(t_0)| \leqslant \rho$. Справді, якщо, наприклад, $x'(t) > \rho$ $\forall t \in I$, то, інтегруючи цю нерівність від $t = a$ до $t = b$, одержимо оцінку

$$x(b) - x(a) > \max\big(|\alpha(b) - \beta(a)|, |\beta(b) - \alpha(a)|\big),$$

яка суперечить умові $x(t) \in [\alpha(t), \beta(t)]$ $\forall t \in I$. Аналогічно доводимо, що не може виконуватися нерівність $x'(t) < -\rho$ $\forall t \in I$.

Позначимо $y_0^* = y(t_0)$, де $t_0 \in I$ – та точка, в якій $|x'(t_0)| < \rho$. З першого рівняння системи (11) знаходимо

$$x'(t_0) = h\big(t_0, x(t_0), \delta(-N_0, y_0^*, N_0)\big) + \delta(0, y_0^* - N_0, 1) - \delta(0, -N_0 - y_0^*, 1).$$

Враховуючи умову а), робимо висновок, що $y_0^* < \overline{N} \leqslant \overline{y}$. Припустимо, що умова $-N_0 \leqslant y(t) \leqslant N_0$ не виконується, тобто існує точка $t_1 \in I$ і число $N^* > N_0$ такі, що $y(t_1) = N^*$. Оскільки $\overline{y} \leqslant N_0 < N^*$, то знайдеться відрізок $[t_0^*, t_1] \subseteq I$, в якому $\overline{y} \leqslant y(t) \leqslant N^*$ (не зменшуючи загальності, вважаємо, що $t_0^* < t_1$, інакше ми зробили б заміну t на $-t$).

З умови а) $\forall t \in [t_0^*, t_1]$ маємо

$$x'(t) = h\big(t, x(t), \delta(-N_0, y(t), N_0)\big) + \delta(0, y(t) - N_0, 1) > \rho \geqslant 0.$$

Отож, $x'(t) > 0$ $\forall t \in [t_0^*, t_1]$, тому існує обернена, неперервно диференційовна функція $t = t(x)$, і, отже, для таких t $y(t)$ на відрізку $x(t_0^*) \leqslant x \leqslant x(t_1)$ можна розглядати як функцію $y(x)$. Для таких x з системи (11) і умови б) знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f\big(t(x), x, \delta(-N_0, y(x), N_0), \delta(-K_0, y'(t), K_0)\big)}{h\big(t(x), x, \delta(-N_0, y(x), N_0)\big) + \delta(0, y(x) - N_0, 1)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{q(x) f_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)\gamma\big(\delta(-K_0, y'(t), K_0)\big)}{p(x) h_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)} \leqslant \\ &\leqslant \gamma_0(K_0)\frac{q(x) f_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)}{p(x) h_\omega\big(|\delta(-N_0, y(x), N_0)|\big)}.\end{aligned}$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи за x від $x_0^* = x(t_0^*)$ до $x_1 = x(t_1)$ (при цьому $y(x)$ змінюється від $\overline{y}$ до N^*). отримуємо

$$\int\limits_{\overline{y}}^{N^*} \frac{h_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}{f_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}\, dy \leqslant \gamma_0(K_0) \int\limits_{x_0^*}^{x_1} \frac{q(x)}{p(x)}\, dx \leqslant \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(x)}{p(x)}\, dx. \tag{12}$$

Враховуючи, що $M_0 \leqslant N_0 < N^*$, для інтеграла у лівій частині (12) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\overline{y}}^{N^*} \frac{h_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}{f_\omega\big(\delta(\overline{y}, y, N_0)\big)}\, dy > \int\limits_{\overline{y}}^{M_0} \frac{h_\omega(y)}{f_\omega(y)}\, dy.$$

Підставляючи її в (12), одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\overline{y}}^{M_0} \frac{h_\omega(y)}{f_\omega(y)}\, dy < \nu_0 \int\limits_{\alpha_*}^{\beta^*} \frac{q(x)}{p(x)}\, dx,$$

яка суперечить рівності (10). Отже, оцінка $y(t) \leqslant N_0$ $\forall t \in I$ доведена. Аналогічно доводиться нерівність $y(t) \geqslant -N_0$ $\forall t \in I$.

Враховуючи, що $y(t) \in [-N_0, N_0]$, запишемо друге рівняння системи (11) у вигляді $y' = f\big(t, x, y, \delta(-K_0, y', K_0)\big)$, звідки за допомогою умови б) $\forall$ $t \in I$ одержимо оцінку

$$|y'(t)| \leqslant q(x) f_\omega(|y|)\gamma\big(\delta(-K_0, y', K_0)\big) \leqslant q_0\omega_0(M_0)\gamma_0(K_0) = q_0\omega_0(M_0)\nu_0 = K_0,$$

яка завершує доведення теореми 3.

3. Задача з мішаними крайовими умовами. Розглянемо крайову задачу

$$x' = h(t, x, y, x', y'), \quad y' = f(t, x, y, x', y'), \quad t \in I; \quad x(a) = A, \quad x(b) = B, \tag{13}$$

де A, $B \in \mathbb{R}$. Специфіка крайових умов задачі (13) дає змогу спростити теорему 2 для цього часткового випадку задачі (1), (6).

Теорема 4. *Нехай функція* $g(t,\xi,\eta) = \big(h(t,\xi,\eta), f(t,\xi,\eta)\big)$, *де* $\xi = (x,y)$, $\eta = (x',y')$ *задовольняє умову* (L) *і нехай існують функції* α, β, φ, $\psi \in C^1(I)$, λ_x, μ_x, λ_y, $\mu_y \in C(I)$ *такі, що*

1) $\alpha(t) \leqslant \beta(t)\ \forall\, t \in I$;

2) $\alpha'(t) \leqslant h\big(t,\alpha(t),y,z_x,z_y\big), \quad \beta'(t) \geqslant h\big(t,\beta(t),y,z_x,z_y\big)$, $\forall\ (t,y,z_x,z_y) \in \omega_2 = \big\{ (t,y,z_x,z_y) : t \in I,\ \varphi(t) \leqslant y \leqslant \psi(t),$ $\lambda_x(t) \leqslant z_x \leqslant \mu_x(t),\ \lambda_y(t) \leqslant z_y \leqslant \mu_y(t)\big\}$;

3) $\varphi(t) \leqslant \psi(t)\ \forall\, t \in I$;

4) $\varphi'(t) \geqslant f\big(t,x,\varphi(t),z_x,z_y\big), \quad \psi'(t) \leqslant f\big(t,x,\psi(t),z_x,z_y\big)$, $\forall\ (t,x,z_x,z_y) \in \omega_1 = \big\{ (t,x,z_x,z_y) : t \in I,\ \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t),$ $\lambda_x(t) \leqslant z_x \leqslant \mu_x(t),\ \lambda_y(t) \leqslant z_y \leqslant \mu_y(t)\big\}$;

5) $\alpha(a) \leqslant A \leqslant \beta(a), \quad \varphi(b) \leqslant B \leqslant \psi(b)$;

6) $\lambda_x(t) \leqslant \mu_x(t), \quad \lambda_y(t) \leqslant \mu_y(t)\ \forall\, t \in I$;

7) для будь-яких x, $y \in C^1(I)$ *з умов*

$$x'(t) = h\big(t,x(t),y(t),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y'(t),\mu_y(t)\big)\big),$$
$$y'(t) = f\big(t,x(t),y(t),\delta\big(\lambda_x(t),x'(t),\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y'(t),\mu_y(t)\big)\big),$$
$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t), \quad \varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t) \quad \forall t \in I$$

випливає, що $\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t)$, $\lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t)\ \forall\, t \in I$. *Тоді існує хоча б один розв'язок* $\big(x(t),y(t)\big)$ *задачі (13) і для нього є оцінки*

$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t), \quad \varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t),$$
$$\lambda_x(t) \leqslant x'(t) \leqslant \mu_x(t), \quad \lambda_y(t) \leqslant y'(t) \leqslant \mu_y(t) \quad \forall t \in I.$$

Доведення. Задамо для $(t,x,y,x',y') \in I \times \mathbb{R}^4$ функції

$$H(t,x,y,x',y') =$$
$$= h\big(t,\delta\big(\alpha(t),x,\beta(t)\big),\delta\big(\varphi(t),y,\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x',\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y',\mu_y(t)\big)\big),$$
$$F(t,x,y,x',y') =$$
$$= f\big(t,\delta\big(\alpha(t),x,\beta(t)\big),\delta\big(\varphi(t),y,\psi(t)\big),\delta\big(\lambda_x(t),x',\mu_x(t)\big),\delta\big(\lambda_y(t),y',\mu_y(t)\big)\big).$$

Згідно з лемою п.2 крайова задача

$$x' = H(t,x,y,x',y'), \quad y' = F(t,x,y,x',y'), \quad x(a) = A, \quad x(b) = B \tag{14}$$

має розв'язок, який позначимо через $\big(\overline{x}(t),\overline{y}(t)\big)$. Умови 1)–6) цієї теореми та вигляд функцій H і F дають змогу, міркуючи аналогічно як в доведенні теореми 3 [5, с.69–70], одержати оцінки

$$\alpha(t) \leqslant \overline{x}(t) \leqslant \beta(t), \quad \varphi(t) \leqslant \overline{y}(t) \leqslant \psi(t) \quad \forall t \in I.$$

Оскільки з умови 7) випливає, що

$$\lambda_x(t) \leqslant \overline{x}'(t) \leqslant \mu_x(t), \quad \lambda_y(t) \leqslant \overline{y}'(t) \leqslant \mu_y(t) \quad \forall t \in I,$$

то $\big(\overline{x}(t),\overline{y}(t)\big)$ є не лише розв'язком задачі (14), а й задачі (13). Теорему доведено.

Зауваження 2. Умови 1)–5) теореми 4 виконуються, якщо існують сталі c_x, $c_y > 0$ такі, що $\forall\, t \in I$, z_x, $z_y \in \mathbb{R}$

$$xh(t,x,y,z_x,z_y) \leqslant 0, \qquad \forall\ |x| \geqslant c_x, \quad |y| \leqslant \max\{\, c_y, |B|\,\},$$
$$yf(t,x,y,z_x,z_y) \geqslant 0, \quad \forall\ |y| \geqslant c_y, \quad |x| \leqslant \max\{\, c_x, |A|\,\}.$$

Щоб переконатися в правильності такого твердження, достатньо прийняти $\alpha \equiv -c_1$, $\beta \equiv c_1$, $\varphi \equiv -c_2$, $\psi \equiv c_2$, де $c_1 = \max\{\, c_x, |A|\,\}$, $c_2 = \max\{\, c_y, |B|\,\}$.

Зауваження 3. Умова 7) теореми 4 виконується, якщо для $t \in I$

$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t),\ \ \varphi(t) \leqslant y(t) \leqslant \psi(t),\ \ \lambda_x(t) \leqslant z_x \leqslant \mu_x(t),\ \ \lambda_y(t) \leqslant z_y \leqslant \mu_y(t)$$

функції $\lambda_x(t)$, $\lambda_y(t)$, $\mu_x(t)$, $\mu_y(t)$ задовольняють співвідношення

$$\lambda_x(t) \leqslant h\big(t,x,y,\lambda_x(t),z_y\big), \quad \mu_x(t) \geqslant h\big(t,x,y,\mu_x(t),z_y\big); \tag{15}$$

$$\lambda_y(t) \leqslant f\big(t,x,y,z_x,\lambda_y(t)\big), \quad \mu_y(t) \geqslant f\big(t,x,y,z_x,\mu_y(t)\big). \tag{16}$$

Справді, припустивши, наприклад, що існує точка $t_0 \in I$ така, що $x'(t_0) > \mu_x(t_0)$, тобто

$$h\big(t_0, x(t_0), y(t_0), \mu_x(t_0), \delta\big(\lambda_y(t_0), y'(t_0), \mu_y(t_0)\big)\big) > \mu_x(t_0),$$

приходимо до суперечності з другою нерівністю (15). Аналогічно перевіряються інші три нерівності (15), (16).

Зауваження 4. Якщо функція $h(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна (незростаюча) за змінною z_y, то умови (15) записують у вигляді

$$\lambda_x(t) \leqslant h\big(t,x,y,\lambda_x(t),\lambda_y(t)\big), \quad \mu_x(t) \geqslant h\big(t,x,y,\mu_x(t),\mu_y(t)\big); \tag{17}$$

$$\Big(\ \lambda_x(t) \leqslant h\big(t,x,y,\lambda_x(t),\mu_y(t)\big), \quad \mu_x(t) \geqslant h\big(t,x,y,\mu_x(t),\lambda_y(t)\big)\ \Big).$$

Аналогічно, якщо функція $f(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна (незростаюча) за змінною z_x, то умови (16) записують у вигляді

$$\lambda_y(t) \leqslant f\big(t,x,y,\lambda_x(t),\lambda_y(t)\big), \quad \mu_y(t) \geqslant f\big(t,x,y,\mu_x(t),\mu_y(t)\big); \tag{18}$$

$$\Big(\ \lambda_y(t) \leqslant f\big(t,x,y,\mu_x(t),\lambda_y(t)\big), \quad \mu_y(t) \geqslant f\big(t,x,y,\lambda_x(t),\mu_y(t)\big)\ \Big).$$

Доведемо теорему, яка дає достатні умови для виконання умов 6), 7) теореми 4. Введемо позначення $I_M = [-M, M]$, $I_N = [-N, N]$, де M, $N > 0$.

Теорема 5. *Нехай функція $h(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна за змінною z_y, функція $f(t,x,y,z_x,z_y)$ неспадна за змінною z_x; для будь-яких $M > 0$, $N > 0$ існують неперервні додатні функції $\gamma_1(z_x,z_y)$, $\gamma_2(z_x,z_y)$, $(z_x,z_y) \in \mathbb{R}^2$ такі, що*

$$|h(t,x,y,z_x,z_y)| \leqslant \gamma_1(z_x,z_y), \quad |f(t,x,y,z_x,z_y)| \leqslant \gamma_2(z_x,z_y)$$

$\forall\, t \in I$, $(x,y) \in I_M \times I_N$, $(z_x,z_y) \in \mathbb{R}^2$, причому $\gamma_i(-z_x,-z_y) \leqslant \gamma_i(z_x,z_y)$ $(i = 1,2)$, $\forall\ z_x$, $z_y > 0$, і система рівнянь

$$\gamma_1(M_x, M_y) = M_x, \qquad \gamma_2(M_x, M_y) = M_y \tag{19}$$

має хоча б один розв'язок (M_x, M_y), *де* $M_x > 0$, $M_y > 0$. *Тоді виконуються умови 6), 7) теореми 4.*

Доведення. Нехай $M_x > 0$, $M_y > 0$ – розв'язки системи (19). Візьмемо $-\lambda_x = \mu_x \equiv M_x$, $-\lambda_y = \mu_y \equiv M_y$. Тоді $\forall\ t \in I$, $(x, y) \in I_M \times I_N$,

$$h(t, x, y, \mu_x, \mu_y) = h(t, x, y, M_x, M_y) \leqslant \gamma_1(M_x, M_y) = M_x = \mu_x,$$
$$h(t, x, y, \lambda_x, \lambda_y) =$$
$$= h(t, x, y, -M_x, -M_y) \geqslant -\gamma_1(-M_x, -M_y) \geqslant -\gamma_1(M_x, M_y) = -M_x = \lambda_x,$$

тобто виконуються умови (17). Аналогічно перевіряємо виконання умов (18). Теорему доведено.

4. Приклад виконання умов теореми 4. Розглянемо систему рівнянь

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y, y'), \quad t \in I,$$

де

$$f(t, x, y, z) = f_0(t, x, y) \ln\left((x^2 + y^2 + 1)|z| + \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2(z^2 + 1) + \lambda_0}\right),$$

$h(t, x, y) \in C(I \times \mathbb{R}^2)$, $f_0(t, x, y) \in C(I \times \mathbb{R}^2)$, $\lambda_0 = const > 0$,

$$xh(t, x, y) \leqslant 0, \quad yf_0(t, x, y) \geqslant 0, \quad |f_0(t, x, y)| \leqslant 1 \quad \forall\, (t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^2.$$

Тоді маємо $yf(t, x, y, z) \geqslant 0\ \forall\ (t, x, y, z) \in I \times \mathbb{R}^3$, $\forall\ M, N > 0$

$$|f(t, x, y, z)| \leqslant \ln\left((M^2 + N^2 + 1)|z| + \sqrt{(M^2 + N^2 + 1)^2(z^2 + 1) + \lambda_0}\right)$$
$$\forall\ (t, x, y, z) \in I \times I_M \times I_N \times \mathbb{R}.$$

Отже, функція $\gamma_2(z_x, z_y)$ (див. теорему 5) має вигляд

$$\gamma_2(z) = \ln\left((M^2 + N^2 + 1)|z| + \sqrt{(M^2 + N^2 + 1)^2(z^2 + 1) + \lambda_0}\right) > 0,$$

причому $\gamma_2(-z) = \gamma_2(z)\ \forall\ z \in \mathbb{R}$.

Оскільки $|\partial f/\partial z| < 1$, $|\gamma_2'(z)| < 1$ для $z \neq 0$, то міркуючи як в п.6 праці [2], приходимо до висновку, що функції $f(t, x, y, z)$ і $\gamma_2(z)$ задовольняють умову Ліпшиця стосовно z зі сталою $L \in (0, 1)$. Це означає, що функція $g(t, \xi, \eta) = \left(h(t, \xi), f(t, \xi, \eta)\right)$ задовольняє умову (L), а рівняння $\gamma_2(M_y) = M_y$, в яке вироджується в цьому випадку система (19), має єдиний додатний розв'язок. Таким чином, функції $h(t, x, y)$ і $f(t, x, y, y')$ задовольняють умови теореми 5 і зауваження 2, а, отже, й умови теореми 4.

---

1. *Жерновий Ю.В.* Про єдиність розв'язку двоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з нелінійним входженням старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С.64-74.
2. *Жерновий Ю.В.* Про розв'язність задачі Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, частково розв'язаних стосовно старшої похідної// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.80-90.
3. *Жерновий Ю.В.* Умови розв'язності двоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, частково розв'язаних стосовно

старшої похідної// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С.129-138.

4. *Король І.І.* Чисельно-аналітичні методи дослідження розв'язків двоточкових крайових задач з параметрами: Дис... канд. фіз.-мат. наук. – Ужгород, 1996.
5. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1978.

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THE TWO-POINT BOUNDARY PROBLEMS FOR THE SYSTEM OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER PARTIALLY SOLVED WITH RESPECT TO THE DERIVATIVES

Yuriy Zhernovyi

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Existence of solutions of the boundary problems for the system $x' = h(t, x, y, x', y')$, $y' = f(t, x, y, x', y')$ with continuous functions h, f and linear boundary conditions are obtained both with the help of known conditions of solvability of boundary problems for the system $x'' = F(t, x, x', x'')$ and with the help of the method of upper and lower functions.

Key words: system of ordinary differential equations, conditions of solvability, method of upper and lower functions.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.77–79

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.77–79

УДК 517.51

ТИПИ МНОЖИН ТОЧОК НЕПЕРЕРВНОСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В НЕМЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

Олена КАРЛОВА, Володимир МАСЛЮЧЕНКО
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2 Чернівці, Україна

Доведено, що у довільного відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X з першою аксіомою зліченності в сильно σ-метризовний простір Y множина $C(f)$ його точок неперервності є типу G_δ. З'ясовано також, що будь-яка підмножина T_1-простору X без ізольованих точок є множиною точок неперервності деякого відображення $f : X \to [0,1]^X$.

Ключові слова: σ-метризований простір, точки неперервності.

1. Добре відомо [1, с.217], що множина $C(f)$ точок неперервності довільного відображення $f : X \to Y$ топологічного простору X у метризовний простір Y є типу G_δ. Природно поставити питання про тип множини $C(f)$ для неметризовних просторів Y. У цій праці ми доводимо, що $C(f)$ є G_δ-множиною і у тому випадку, коли X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, а Y – сильно σ-метризовний простір [2, с.199]. Крім того, для будь-якої підмножини A довільного T_1-простору без ізольованих точок і тихоновського куба $Y = [0,1]^X$ будуємо відображення $f : X \to Y$, для якого $C(f) = A$. Щодо термінів, які не введено в цій праці, див. [3].

2. Нагадаємо, що топологічний простір Y називається *сильно σ-метризовним*, якщо його можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів Y_n, причому кожна збіжна в Y послідовність обов'язково міститься в деякому дограничному просторі Y_n. Така послідовність підпросторів Y_n називається *вичерпуванням* простору Y.

Ми використовуватимемо таке твердження [2, лема 1.4.4, с.200].

Лема. *Нехай X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Y - сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Y_n : n \in \mathbf{N})$ і відображення $f : X \to Y$ неперервне в точці $x_0 \in X$. Тоді існує окіл U точки x_0 в X і номер $m \in \mathbf{N}$ такі, що $f(U) \subseteq Y_m$.*

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Y – сильно σ-метризовний простір і $f : X \to Y$ – довільне відображення. Тоді $C(f)$ є G_δ-множиною в X.*

Доведення. Оскільки Y – сильно σ-метризовний простір, то $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, де (Y_n) – зростаюча послідовність замкнених метризовних підпросторів Y. Нехай d_1 – метрика, що породжує на просторі Y_1 його топологію. Оскільки Y_1 – замкнений підпростір метризовного простору Y_2, то згідно з теоремою Гаусдорфа [3, с.439] d_1 можна неперервно продовжити до метрики d_2 на весь простір Y_2. Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримаємо узгоджену послідовність метрик (d_n). Визначимо на просторі Y метрику d так: $d(y', y'') = d_n(y', y'')$, де n – той перший номер, що $y' \in Y_n$ і $y'' \in Y_n$.

Нехай $I : Y \to (Y, d)$ – тотожне відображення. Оскільки $I \circ f$ набуває значень у метризовному просторі, то згідно з [1, с.217] його множина точок неперервності $C(I \circ f)$ є G_δ-множиною в X.

Згідно з лемою для кожної точки $x \in C(f)$ існують відкрита в X множина $U(x)$ і номер n_x, такі, що $x \in U(x)$ і $f(U(x)) \subseteq Y_{n_x}$. Приймемо $U = \bigcup\limits_{x \in C(f)} U(x)$. Покажемо, що $C(f) = C(I \circ f) \bigcap U$. Нехай $x \in C(f)$. Тоді $x \in U(x) \subseteq U$. Крім того, $f(U(x)) \subseteq Y_{n_x}$, а метрика d індукує на Y_{n_x} ту саму топологію, що й Y. Отже, $x \in C(I \circ f)$. Нехай $x \in C(I \circ f) \bigcap U$. Тоді існує x' таке, що $x \in U(x')$. Оскільки $f(U(x')) \subseteq Y_m$ для деякого m, то вихідна і метрична топології на $f(U(x'))$ збігаються. Отже, $x \in C(f)$.

Оскільки $C(I \circ f)$ – G_δ-множина, U – відкрита, то $C(f)$ є G_δ-множиною.

Зауваження 1. Якщо X – спадково паракомпактний досконалий простір з першою аксіомою зліченності, то можна подати інше доведення теореми 1, яке ґрунтується на одній теоремі Майкла [3, с.430].

У цьому випадку множину $C(f)$ точок неперервності відображення f можна подати у вигляді

$$C(f) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (C(f) \bigcap V) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} C(f_V),$$

де $\mathcal{V}$ – локально скінченне відкрите покриття підпростору $X_0 = \bigcup\limits_{x \in C(f)} U(x)$, а відображення $f_V = f_{|V}$ набуває значень у метризовному просторі.

Саме це доведення було в первісній редакції цієї статті, а покращити результат вдалося завдяки порадам рецензента.

3. Наступний результат свідчить про те, що загалом множини точок неперервності відображень $f : X \to Y$ можуть мати довільну природу.

Теорема 2. *Нехай X – довільний T_1-простір без ізольованих точок, $A \subseteq X$ і $Y = [0,1]^X$ – тихоновський куб. Тоді існує відображення $f : X \to Y$ таке, що $C(f) = A$.*

Доведення. Приймемо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ g_x, & x \notin A, \end{cases}$$

де

$$g_x(t) = \begin{cases} 1, & t = x, \\ 0, & t \neq x, \end{cases}$$

і доведемо, що відображення f є шуканим.

Нехай $x_0 \in A$. Тоді $y_0 = f(x_0) = 0$. Перевіримо, що $x_0 \in C(f)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$, точки $x_1, \ldots, x_n \in X$ і розглянемо окіл $V = \{y \in Y : \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y(x_i) < \varepsilon\}$ точки y_0 в Y. З того, що X задовольняє аксіому T_1 випливає, що множина $F = \{x_i : i = 1, \ldots, n\} \setminus \{x_0\}$ замкнена. Тоді $U = X \setminus F$ є відкритим околом точки

x_0 в X, причому $f(U) \subseteq V$. Справді, якщо $x \in V \setminus A$, то $x \neq x_i$ для кожного $i = 1, \ldots, n$, отже $g_x(x_i) = 0$, при $i = 1, \ldots, n$ випливає, що $f(x) = g_x \in V$. Якщо $x \in V \bigcap A$, то $f(x) = 0 \in V$. Таким чином, $x_0 \in C(f)$, отже, $A \subseteq C(f)$.

Припустимо, що $x_0 \in X \setminus A$. Тоді $y_0 = f(x_0) = g_{x_0}$. Розглянемо множину $V_0 = \{y \in Y : y(x_0) > \frac{1}{2}\}$, яка є околом точки y_0 в просторі Y, бо $y_0(x_0) = g_{x_0}(x_0) = 1 > \frac{1}{2}$. Нехай U – довільний окіл точки x_0 в X. Оскільки x_0 не є ізольованою точкою в X, то існує $x^* \in U \setminus \{x_0\}$. Приймемо $y^* = f(x^*)$ і покажемо, що $y^* \notin V_0$. Якщо $x^* \in A$, то $y^* = 0$, зокрема $y^*(x_0) = 0$; якщо ж $x^* \notin A$, то $y^* = g_{x^*}$, а отже, $y^*(x_0) = g_{x^*}(x_0) = 0$, бо $x^* \neq x_0$. Ми бачимо, що у кожному випадку $y^*(x_0) = 0$, отже, $y^* \notin V_0$. Таким чином, $f(U) \not\subseteq V_0$ для будь-якого околу U точки x_0, звідки випливає, що f розривне в точці x_0. Отже, ми довели обернене включення $C(f) \subseteq A$, а з ним і рівність $C(f) = A$.

Зауваження 2. Оскільки образ $f(X)$ є копією одноточкової компактифікації αD дискретного простору потужності $|X|$, то в теоремі 2 тихоновський куб $[0,1]^X$ можна замінити на довільний простір, що містить αD, наприклад, на довільний діадичний компакт ваги $\geqslant |D|$.

Автори висловлюють щиру вдячність О.В. Маслюченку і О.В.Собчуку за допомогу при написанні статті та рецензентові за корисні поради.

---

1. *Куратовский К.* Топология. Т.1. – М., 1966.
2. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам'яті Ганса Гана. – Чернівці, 1995. – С.192-246.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М., 1986.

TYPES SETS OF CONTINUITY POINTS OF MAPPINGS WITH VALUES IN NONMETRIZABLE SPACES

Olena Karlova, Volodymyr Maslyuchenko

Yuriy Fed'kovych National University in Chernivtsi
2 Kotsyubyns'koho Str. Chernivtsi, Ukraine

It is shown that any mapping $f : X \to Y$, where X is a first countable space and Y is a strong σ-metrizable space, the set $C(f)$ of continuity points is G_δ-set. Furthermore, it is obtained that any subset of T_1-space X without isolated points is the set of continuity points of some mapping $f : X \to [0,1]^X$.

Key words: strong σ-metrizable space, continuity points.

Стаття надійшла до редколегії 22.10.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.80–91

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.80–91

УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕЗАЛЕЖНИМИ ЗМІННИМИ

Сергій ЛАВРЕНЮК, Маріанна ОЛІСКЕВИЧ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено певні достатні умови, за яких задача без початкових умов для системи гіперболічних рівнянь першого порядку з трьома незалежними змінними має єдиний узагальнений розв'язок (у сенсі інтегральної тотожності) незалежно від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Для дослідження застосовано метод Гальоркіна.

Ключові слова: гіперболічна система першого порядку, задача без початкових умов.

Деякі задачі без початкових умов для гіперболічних систем першого поряку з двома незалежними змінними досліджено в працях [1 – 3]. Зокрема в працях [1,2] за допомогою методу характеристик одержано певні умови коректності задачі для лінійних систем у класах обмежених функцій. У праці [3] для дослідження використано метод Гальоркіна. Одержано певні умови однозначної розв'язності задачі Фур'є в класі функцій, які можуть зростати при $t \to -\infty$ не швидше ніж $e^{-\alpha t}$, де додатний параметр α залежить від коефіцієнтів системи.

У цій праці визначено певні достатні умови, за яких задача Фур'є для системи гіперболічних рівнянь першого порядку з трьома незалежними змінними має єдиний узагальнений розв'язок (у сенсі інтегральної тотожності) незалежно від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Для дослідження застосовано метод Гальоркіна.

Розглянемо в області $Q_T = \{(x, y, t) \,:\, 0 < x < a,\, 0 < y < b,\, -\infty < t < T\}$ систему гіперболічних рівнянь вигляду

$$u_{it} + \lambda_i(x,y,t)u_{ix} + \mu_i(x,y,t)u_{iy} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_j + \\ + g_i(t, u_1, \ldots, u_n) = f_i(x,y,t), \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Позначимо через $L^\infty_{loc}(\overline{Q}_T)$ простір функцій, які належать до $L^\infty(Q_{t_1,t_2})$ для довільних t_1, t_2, $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, де $Q_{t_1,t_2} = \{(x,y,t) \,:\, 0 < x < a,\, 0 < y < b,\, t_1 < t < t_2\}$.

Припускатимемо, що коефіцієнти системи (1) задовольняють такі умови:

$$(\Lambda) \quad \{\lambda_i, \lambda_{ix}, \lambda_{iy}, \mu_i, \mu_{ix}, \mu_{iy}\} \in L^\infty(Q_T),$$

$$\lambda_i(x,y,t) \geqslant \lambda_0 > 0, \quad \mu_i(x,y,t) \geqslant \mu_0 > 0, \quad (x,y,t) \in Q_T,$$
$$i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \lambda_0 = \text{const}, \quad \mu_0 = \text{const};$$

(A) $\{a_{ij}, a_{ijx}, a_{ijy}\} \in L^\infty_{loc}(\overline{Q}_T)$, $\{i,j\} \in \{1,\ldots,n\}$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2 \quad \text{для майже всіх} \quad (x,y,t) \in Q_T$$

і всіх $\xi \in \mathbf{R}^n$, $a_0 = \text{const}$;

(G) функції $t \to g_i(t,\xi)$ вимірні на $(-\infty,T)$ для всіх $\xi \in \mathbf{R}^n$, функції $\xi \to g_i(t,\xi)$ неперервні в $\mathbf{R}^n$ майже для всіх $t \in (-\infty,T)$,

$$\sum_{i=1}^n (g_i(t,\xi) - g_i(t,\eta))(\xi_i - \eta_i) \geqslant g_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^p, \quad g_0 > 0,$$

$$|g_i(t,\xi)| \leqslant g^{(0)} \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p-1}, \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \quad p > 2,$$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_i(t,\xi)}{\partial \xi_j}\eta_i\eta_j \geqslant 0 \quad \text{для довільних } \xi,\eta \in \mathbf{R}^n \text{ і майже всіх}$$

$$t \in (-\infty,T), \quad g_0 = \text{const}, \quad g^{(0)} = \text{const}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Для системи (1) задамо крайові умови

$$u_i(0,y,t) = 0, \quad u_i(x,0,t) = 0, \quad i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{2}$$

Означення. *Функцію $u = (u_1,\ldots,u_n)$ називаємо узагальненим розв'язком задачі (1), (2), якщо $u_i \in C((-\infty,T];L^2(\Omega)) \bigcap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$ і виконуються рівності*

$$\int\limits_{\Omega_t} u_i v_i \, dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_i(a,y,t)v_i(a,y,t)\,dydt+$$
$$+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_i(x,b,t)v_i(x,b,t)\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i(v_{it} + \lambda_i v_{ix} + \mu_i v_{iy}) - (\lambda_{ix} + \mu_{iy})u_i v_i +$$
$$+\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j v_j + (g_i(t,u) - f_i)v_i\Big]\,dxdydt = 0 \tag{3}$$

для довільних $t_t, t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$ і довільних функцій $v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \bigcap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ та умови (2).

Позначимо

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sup_{Q_T} |\lambda_{ix}(x,t)| = \lambda^{(1)}, \qquad \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \sup_{Q_T} |\mu_{iy}(x,t)| = \mu^{(1)}.$$

Теорема. *Нехай виконуються умови* (Λ), (A), (G) *і, крім того,* $f_i \in L^{p'}_{loc}(\overline{Q}_T)$, $\{f_{ix}, f_{iy}\} \in L^2_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)} > 0$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Розглянемо спочатку систему (1) з крайовими умовами (2) в обмеженій області $Q_{t_0,T}$ з початковими умовами

$$u_i(x,y,t_0) = 0, \quad i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{4}$$

Побудуємо послідовність функцій

$$u_i(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{N} c^N_{ikm}(t)\omega_k(x)\sigma_m(y), \quad i \in \{1,\ldots,n\},$$

де

$$\omega_k(x) = \sin\frac{(2k-1)\pi}{2a}x, \quad \sigma_m(y) = \sin\frac{(2m-1)\pi}{2b}y,$$

а функції c^N_{ikm} є розв'язком такої задачі Коші:

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b \biggl(u^N_{it} + \lambda_i u^N_{ix} + \mu_i u^N_{iy} + \sum_{j=1}^n a_{ij}u^N_j +$$

$$+ g_i - f_i\biggr)\omega_k\sigma_m\,dxdy = 0, \tag{5}$$

$$c^N_{ikm}(t_0) = 0, \quad \{k,m\} \in \{1,\ldots,N\}, \quad i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{6}$$

Помножимо кожне рівняння (5) відповідно на функцію c^N_{ikm}, підсумуємо за індексами k,m від 1 до N та за індексом i від 1 до n і проінтегруємо по відрізку $[t_0,\tau]$, $\tau \in (t_0,T]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \biggl[\sum_{i=1}^n u^N_{it}u^N_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i u^N_{ix}u^N_i + \sum_{i=1}^n \mu_i u^N_{iy}u^N_i +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u^N_j u^N_i + \sum_{i=1}^n g_i u^N_i - \sum_{i=1}^n f_i u^N_i\biggr]\,dxdydt = 0. \tag{7}$$

Перетворимо й оцінимо кожен доданок рівності (7) окремо. На підставі умов (Λ), (A) та (G) матимемо

$$I_1 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n u^N_{it}u^N_i\,dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n [u^N_i]^2\,dxdy,$$

$$I_2 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \lambda_i u^N_{ix}u^N_i\,dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2}\biggl[\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_0^b \sum_{i=1}^n \lambda_i(a,y,t)[u^N_i(a,y,t)]^2\,dydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n \lambda_{ix}[u^N_i]^2\,dxdydt\biggr] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\lambda_0 \int_{t_0}^{\tau}\int_0^b \sum_{i=1}^n [u_i^N(a,y,t)]^2\,dydt - \frac{1}{2}\lambda^{(1)} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n [u_i^N]^2\,dxdydt,$$

$$I_3 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \mu_i(x,y,t) u_{iy}^N u_i^N\,dxdydt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\mu_0 \int_{t_0}^{\tau}\int_0^a \sum_{i=1}^n [u_i^N(x,b,t)]^2\,dxdt - \frac{1}{2}\mu^{(1)} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n [u_i^N]^2\,dxdydt,$$

$$I_4 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,y,t) u_j^N u_i^N\,dxdydt \geqslant a_0 \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n [u_i^N]^2\,dxdydt,$$

$$I_5 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n g_i(t,u) u_i^N\,dxdydt \geqslant g_0 \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^p\,dxdydt;$$

$$I_6 = \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n f_i(x,y,t) u_i^N\,dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{p} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^p\,dxdydt + \frac{C(\delta)}{2} \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |f_i(x,y,t)|^{p'}\,dxdydt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1, \ldots, I_6$, з рівності (5) одержимо нерівність

$$\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^2\,dxdy + \lambda_0 \int_{t_0}^{\tau}\int_0^b \sum_{i=1}^n |u_i^N(a,y,t)|^2\,dydt +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau}\int_0^a \sum_{i=1}^n |u_i^N(x,b,t)|^2\,dxdt + (2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^2\,dxdydt +$$
$$+ 2\Big(g_0 - \frac{\delta}{p}\Big) \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^p\,dxdydt \leqslant C(\delta) \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n |f_i(x,y,t)|^{p'}\,dxdydt. \tag{8}$$

Згідно з умовою теореми $2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)} > 0$. Тому з (8) випливають оцінки

$$\int_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_i^N|^2\,dxdy \leqslant C_1, \quad \tau \in [t_0, T], \tag{9}$$

$$\int_{t_0}^{T}\int_0^b \sum_{i=1}^n |u_i^N(a,y,t)|^2\,dydt \leqslant C_1, \tag{10}$$

$$\int_{t_0}^{T}\int_0^a \sum_{i=1}^n |u_i^N(x,b,t)|^2\,dxdt \leqslant C_1, \tag{11}$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^N|^p \, dxdydt \leqslant C_1, \tag{12}$$

причому стала C_1 не залежить від N.

Враховуючи те, що

$$\omega_k''(x) = -\left[\frac{(2k-1)\pi}{2a}\right]^2 \omega_k(x), \quad \sigma_m''(y) = -\left[\frac{(2m-1)\pi}{2b}\right]^2 \sigma_m(y),$$

з рівнянь (5) легко одержати рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \Big[u_{it}^N + \lambda_i(x,y,t) u_{ix}^N + \mu_i(x,y,t) u_{iy}^N + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_j^N +$$

$$+ g_i(t,u) - f_i(x,y,t) \Big] u_{ixx}^N \, dxdydt = 0. \tag{13}$$

Перетворимо кожний доданок рівності (13) окремо. Матимемо

$$I_7 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} u_{it}^N u_{ixx}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{ix}^N|^2 \, dxdy;$$

$$I_8 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ix}^N u_{ixx}^N \, dxdydt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(0,y,t) |u_{ix}^N|^2 \, dydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ix} |u_{ix}^N|^2 \, dxdydt;$$

$$I_9 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_{iy}^N u_{ixx}^N \, dxdydt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{0}^{a} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x,b,t) |u_{ix}^N|^2 \, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{iy} |u_{ix}^N|^2 \, dxdydt -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{ix} u_{ix}^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{10} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_j^N u_{ixx}^N \, dxdydt =$$

$$= \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jx}^N u_{ix}^N \, dxdydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijx} u_j^N u_{ix}^N \, dxdydt;$$

$$I_{11} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} g_i(t,u^N) u_{ixx}^N \, dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i(t,u^N)}{\partial u_j^N} u_{jx}^N u_{ix}^N \, dxdydt;$$

$$I_{12} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x,y,t) u_{ixx}^N \, dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} f_i(0,y,t) u_{ix}^N \, dydt - \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_{ix}(x,y,t) u_{ix}^N \, dxdydt.$$

Аналогічно до (13) одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \Big[u_{it}^N + \lambda_i u_{ix}^N + \mu_i u_{iy}^N + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j^N +$$

$$+ g_i(t,u) - f_i(x,y,t) \Big] u_{iyy}^N \, dxdydt = 0. \tag{14}$$

Знову перетворимо кожний доданок рівності (14) окремо. Отримаємо

$$I_{13} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} u_{it}^N u_{iyy}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u_{iy}^N|^2 \, dxdy;$$

$$I_{14} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ix}^N u_{iyy}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a,y,t) |u_{iy}^N|^2 \, dydt +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ix} |u_{iy}^N|^2 \, dxdydt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{iy} u_{ix}^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{15} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_{iy}^N u_{iyy}^N \, dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{0}^{a} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x,0,t) |u_{iy}^N|^2 \, dxdt -$$

$$- \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{iy} |u_{iy}^N|^2 \, dxdydt;$$

$$I_{16} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_j^N u_{iyy}^N \, dxdydt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{jy}^N u_{iy}^N \, dxdydt -$$

$$- \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ijy} u_j^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{17} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} g_i(t,u^N) u_{iyy}^N \, dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i(t,u^N)}{\partial u_j^N} u_{jy}^N u_{iy}^N \, dxdydt;$$

$$I_{18} = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_i u_{iyy}^N \, dxdydt = -\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{0}^{b} \sum_{i=1}^{n} f_i(x,0,t) u_{iy}^N \, dydt -$$
$$-\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} f_{iy} u_{iy}^N \, dxdydt.$$

Додавши рівності (13) і (14), врахувавши інтеграли $I_7, \ldots, I_{18}$ та умови теореми, одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{n} (|u_{ix}^N|^2 + |u_{iy}^N|^2) \, dxdy \leqslant C_2, \quad \tau \in [t_0, T], \tag{15}$$

де стала C_2 не залежить від N. Зазначимо також, що на підставі умови (G) і (12) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{i=1}^{n} |g_i(t,u^N)|^{p'} \, dxdydt \leqslant C_3. \tag{16}$$

З оцінок (9) – (12), (15), (16) випливає існування такої підпослідовності $\{u_i^{N_k}(x,y,t)\}$ послідовності $\{u_i^N(x,y,t)\}$, що $u_i^{N_k} \to u_i$ слабко в $L^2((t_0,T); H^1(\Omega))$, $u_i^{N_k} \to u_i$ слабко в $L^p(Q_{t_0,T})$, $u_i^{N_k}(\cdot,\cdot,T) \to \tilde{u}_i$ слабко в $L^2(\Omega_T)$, $u_i^{N_k}(a,\cdot,\cdot) \to \theta_i$ слабко в $L^2((0,b) \times (t_0,T))$, $u_i^{N_k}(\cdot,b,\cdot) \to \tilde{\theta}_i$ слабко в $L^2((0,a) \times (t_0,T))$, $g_i(\cdot,u^{N_k}) \to \chi_i$ слабко в $L^{p'}(Q_{t_0,T})$ при $k \to \infty$ для $i \in \{1,\ldots,n\}$. Використавши задачу (5), (6) для N_k і збіжність послідовностей $\{u_i^{N_k}(x,y,t)\}$ у відповідних просторах, неважко одержати рівності

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[-u_i v_{it} + \lambda_i(x,y,t) u_{ix} v_i + \mu_i(x,y,t) u_{iy} v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_j v_i +$$
$$+ \chi_i v_i - f_i(x,y,t) v_i\Big] \, dxdydt + \int\limits_{\Omega_T} \tilde{u}_i v_i \, dxdy +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{0}^{b} \lambda_i(a,y,t) \theta_i v_i \, dydt + \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{0}^{a} \mu_i(x,b,t) \tilde{\theta}_i v_i \, dxdt = 0, \tag{17}$$

правильні для кожної функції $v_i \in H^1(Q_{t_0,T}) \cap L^p(Q_{t_0,T})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, яка задовольняє крайові умови (2). Крім того, функція u задовольняє крайові умови (2).

Приймемо, що в (17) $v_i \in C_0^\infty(Q_{t_0,T})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді одержимо, що

$$u_{it} = -\lambda_i(x,y,t) u_{ix} - \mu_i(x,y,t) u_{iy} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_j - \chi_i + f_i(x,y,t).$$

Використовуючи монотонність оператора Немицького, визначеного функцією g_i, аналогічно до [4, с.171] легко переконатися, що $\chi_i(x,y,t) = g_i(t,u(x,y,t)$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Отже, функції u_i, $i \in \{1,\dots,n\}$ є розв'язком задачі (1), (2), (4) майже всюди. Крім того, згідно з лемою 1.2 [4, с.20] $u_i \in C([t_0,T];L^2(\Omega))$, $i \in \{1,\dots,n\}$. На підставі рівностей (17) матимемо, що $\tilde{u_i}(x,y) = u_i(x,y,T)$, $\theta_i(y,t) = u_i(a,y,t)$, $\tilde{\theta}_i(x,t) = u_i(x,b,t)$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

Продовжимо функції u_i, $i \in \{1,\dots,n$ нулем на область $Q_{-\infty,t_0}$ і збережемо для них ті самі позначення. Тоді ці функції задовольняють рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[u_{it}v_i + \lambda_i(x,y,t)u_{ix}v_i + \mu_i(x,y,t)u_{iy}v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_jv_i +$$
$$+ g_i(t,u)v_i - f_i^{t_0}(x,y,t)v_i\Big]\,dxdydt = 0$$

для довільних функцій $v_i \in H^1(Q_{t_1,T}) \cap L^p(Q_{t_1,T})$, $i \in \{1,\dots,n\}$ і довільного t_1, $t_1 \leqslant t_0$, де

$$f_i^{t_0}(x,y,t) = \begin{cases} f_i(x,y,t), & (x,y,t) \in Q_{t_0,T}, \\ 0, & (x,y,t) \in Q_{-\infty,t_0}. \end{cases}$$

Використовуючи методику [4, с.225], легко довести, що для довільних функцій $v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$ і довільних $t_1,t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$ є правильними рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_iv_{it} + \lambda_i(x,y,t)u_{ix}v_i + \mu_i(x,y,t)u_{iy}v_i +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_jv_i + g_i(t,u))v_i\Big]\,dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} u_iv_i\,dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_iv_i\,dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_iv_i\,dxdt = 0. \tag{18}$$

Нехай t_0 набуває значення $T-1$, $T-2$, ... , $T-s$, ... Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^s(x,y,t)\}$, кожна з яких задовольняє (18). Приймемо, що $v_i = (u_i^s - u_i^l)\psi(t)$, $s,l \in \mathbf{N}$, де

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \tau_0 \leqslant t \leqslant T, \\ \left(\dfrac{t-t_1}{\tau_0 - t_1}\right)^{\alpha}, & t_1 \leqslant t < \tau_0, \\ 0, & t < t_1, \end{cases}$$

а $\alpha > 1$. Нехай $t_2 \in [\tau_0, T]$. Запишемо рівності (18) для функцій u_i^s і u_i^l та віднімемо від перших другі. Позначивши $u_i^{s,l} = u_i^s - u_i^l$, одержимо рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i^{s,l}u_{it}^{s,l}\psi(t) - |u_i^{s,l}|^2\psi'(t) + \lambda_i(x,y,t)u_{ix}^{s,l}u_i^{s,l}\psi(t) +$$

$$+ \mu_i(x,y,t)u_{iy}u_i^{s,l}\psi(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_j u_i^{s,l}\psi(t) +$$

$$+ (g_i(t,u^s) - g_i(t,u^l))u_i^{s,l}\psi(t)\Big] \,dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} u_i^{s,l}u_i^{s,l}\,dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_i^{s,l}u_i^{s,l}\psi(t)\,dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_i^{s,l}u_i^{s,l}\psi(t)\,dxdt = 0, \tag{19}$$

$i \in \{1,\dots,n\}$ для s і l більших від $T - t_1$. Повторивши перетворення і оцінки доданків рівності (19) аналогічно до інтегралів $I_1, \dots, I_5$, одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}|^2\,dxdy + \lambda_0 \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}(a,y,t)|^2\psi(t)\,dydt +$$

$$+ \mu_0 \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}(x,b,t)|^2\psi(t)\,dxdt +$$

$$+ (2a_0 - \lambda^{(1)} - \mu^{(1)}) \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}|^2\psi(t)\,dxdydt +$$

$$+ g_0 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_i^{s,l}|^p\,dxdydt \leqslant C_4 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \frac{|\psi'(t)|^{p/(p-2)}}{|\psi(t)|^{2/(p-2)}}\,dxdydt, \tag{20}$$

причому стала C_4 не залежить від s, l і t_1. Легко бачити, що права частина нерівності (20) може бути оцінена величиною $C_5(\tau_0 - t_1)^{1-p/(p-2)}$ і оскільки $p/(p-2) > 1$, може бути зроблена як завгодно малою за рахунок вибору t_1. Отже, послідовності $\{u_i^s\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ є фундаментальними в просторах $L^2(Q_{\tau_0,T})$, $L^p(Q_{\tau_0,T})$, $C([\tau_0,T];L^2(\Omega))$. Крім того, послідовності $\{u_i^s(a,y,t)\}$ є фундаментальними в просторі $L^2((0,a)\times(\tau_0,T))$, послідовності $\{u_i^s(x,b,t)\}$ є фундаментальними в просторі $L^2((0,b)\times(\tau_0,T))$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Запишемо рівності (18) для функцій u_i^s у вигляді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i^s v_{it} - \lambda_i(x,y,t)u_i^s v_{ix} - \mu_i(x,y,t)u_i^s v_{iy} -$$

$$- \lambda_{ix}(x,y,t)u_i^s v_i - \mu_{iy}(x,y,t)u_i^s v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_j^s v_i +$$

$$+ g_i(t,u^s)v_i - f_i(x,y,t)v_i\Big] \,dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} u_i^s v_i\,dxdy\Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)u_i^s v_i\,dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)u_i^s v_i\,dxdt = 0, \tag{21}$$

$v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Перейшовши до границі в (21) при $s \to \infty$, одержимо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_i(v_{it} + \lambda_i(x,y,t)v_{ix} + \mu_i(x,y,t)v_{iy}) -$$

$$- \lambda_{ix}(x,y,t)u_iv_i - \mu_{iy}(x,y,t)u_iv_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_jv_i +$$

$$+ g_i(t,u)v_i - f_i(x,y,t)v_i \Big] \, dxdydt + \int\limits_{\Omega_t} \tilde{u}_i v_i \, dxdy \Big|_{t_1}^{t_2} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^b \lambda_i(a,y,t)\theta_i v_i \, dydt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^a \mu_i(x,b,t)\tilde{\theta}_i v_i \, dxdt = 0, \tag{22}$$

$v_i \in H^1_{loc}(\overline{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\overline{Q}_T)$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

Нехай $x = \rho_i(t,\xi,\eta,\tau)$, $y = \varphi_i(t,\xi,\eta,\tau)$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = \mu_i(x,y,t),$$
$$x(\tau) = \xi, \quad y(\tau) = \eta,$$

$i \in \{1,\dots,n\}$. Тоді

$$\frac{dv_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{\partial t} +$$
$$+ \lambda_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)\frac{\partial v_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{\partial x} +$$
$$+ \mu_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)\frac{\partial v_i(\rho_i(t,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(t,\xi,\eta,\tau),t)}{\partial y}.$$

Розглянемо відображення

$$x = \rho_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau), \quad y = \varphi_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau), \quad t = \tau \tag{23}$$

деякої області D_i на $Q_{\tau_0,T}$. Нехай функції v_i мають компактний носій в $Q_{\tau_0,T}$. Тоді рівності (22) можна записати у вигляді

$$-\int\limits_{D_i} \widehat{u}_i \frac{d\widehat{v}_i}{d\tau} J(\xi,\eta,\tau)\, d\xi d\eta d\tau = \int\limits_{D_i} \Big[\widehat{\lambda}_{ix}\widehat{u}_i + \widehat{\mu}_{iy}\widehat{u}_i -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}\widehat{u}_j - g_i(\tau,\widehat{u}) + \widehat{f}_i \Big] \widehat{v}_i J(\xi,\eta,\tau)\, d\xi d\eta d\tau, \tag{24}$$

де через $J(\xi,\eta,\tau)$ позначено Якобіан відображення (23), а $\widehat{w}$ – значення функції w у точці $(\rho_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau),\varphi_i(\tau_0,\xi,\eta,\tau),\tau)$.

З рівності (24) випливає, що

$$\frac{d\widehat{u}_i}{d\tau} = \widehat{\lambda}_{ix}\widehat{u}_i + \widehat{\mu}_{iy}\widehat{u}_i - \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_{ij}\widehat{u}_j - g_i(\tau, \widehat{u}) + \widehat{f}_i \tag{25}$$

в області D_i. Отже, функції u_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ майже всюди задовольняють систему (1). Використовуючи рівняння (22), легко показати, що $\theta_i(y,t) = u_i(a,y,t)$, $\widehat{\theta}_i(x,t) = u_i(x,b,t)$, $u_i(0,y,t) = 0$, $u_i(x,0,t) = 0$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Крім того, рівності (22) є правильними і для функцій $v_i = u_i$. Оскільки τ_0 є довільним з інтервалу $(-\infty, T)$, то це завершує доведення існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

Доведемо єдиність узагальненого розв'язку від супротивного. Нехай існують два узагальнені розв'язки $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (1), (2). Тоді віднявши рівності (3), записані для кожної функції $u^{(j)}$ $j \in \{1,2\}$ і вибравши $v(x,y,t) = (u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t))\psi(t)$, аналогічно як (20) одержимо, що інтеграл

$$\int_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^{n} [u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t)]^2 \, dxdydt$$

є як завгодно малим для довільного фіксованого t_1. Звідси випливає, що $u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t) = 0$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

---

1. *Кирилич В.М., Мишкіс А.Д.* Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу //Доп. АН УРСР. Сер.А.- 1991. – N 5.– С.8–10.

2. *Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Краевые задачи без начальных условий для линейной однородной системы уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т.28. – N 3. – С.463–469.

3. *Lavrenyuk S.P., Zareba L.* Nonlocal problem for the nonlinear system of the first order without initial conditions // Математичні студії. – 2000. – Т.14. – N 2. – 150–158.

4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М., 1972.

FOURIER PROBLEM FOR ONE NONLINEAR HYPERBOLIC SYSTEM WITH THREE INDEPENDENT VARIABLES

Sergiy Lavrenyuk, Marianna Oliskevych

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Some sufficient conditions the uniqueness and existence of a solution (in the sence of an integral equality) of the problem without initial conditions for nonlinear hyperbolic system of the first order with three independent variables are obtained. These conditions do not depend on the behaviour of a solution at $t \to -\infty$. For investigation there is used the Galiorkin's method.

Key words: hyperbolic system of the first order, problem without initial conditions.

Стаття надійшла до редколегії 05.06.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.92–101

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.92–101

УДК 517.927.2

УЗАГАЛЬНЕНИЙ НЕСАМОСПРЯЖЕНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПІВОСІ

Олександр МАХНЕЙ

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

За допомогою класичного і некласичного інтегралів Рімана-Стільтьєса та методу введення квазіпохідних побудовано деякі розв'язки несамоспряженого диференціального рівняння другого порядку з мірою (узагальненою похідною функції обмеженої варіації) на додатній півосі. Їх використання дає змогу визначити спектральні властивості диференціального оператора й побудувати розкладення за головними функціями.

Ключові слова: диференціальний оператор другого порядку з мірою на необмеженому проміжку, спектр оператора.

Властивості диференціальних операторів з гладкими (достатню кількість разів неперервно диференційовними) або принаймні сумовними за Лебегом коефіцієнтами вивчено і висвітлено в літературі досить добре. Однак в задачах прикладного характеру часто трапляються узагальнені функції в коефіцієнтах відповідних диференціальних виразів. У зв'язку з бурхливим розвитком теорії узагальнених функцій можна провести узагальнення деяких відомих результатів за допомогою введення квазіпохідних.

Д. Шин [1] першим застосував для досліджень апарат квазіпохідних, що дало змогу відмовитись від вимоги гладкості коефіцієнтів. Однак він і його послідовники вивчали лише диференціальні оператори з неперервними чи сумовними коефіцієнтами.

У цій праці на основі аналізу розв'язків диференціального рівняння

$$l(y) = \lambda y, \tag{1}$$

де $l(y) = -y'' + p(x)\,y$, $p(x) = q'(x)$, $q(x) \in BV^+[0,\infty)$ (тут $BV^+[0,\infty)$ – простір неперервних праворуч функцій обмеженої варіації на додатній півосі, λ – комплексний параметр, $q(x)$ – комплекснозначна функція, а знак "$'$" означає узагальнене диференціювання), робимо висновок про спектр диференціального оператора L, породженого диференціальним виразом $l(y)$ і крайовою умовою

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

та про можливість розкладення в ряд за головними функціями. Результати виявляються аналогічними до відомого випадку, коли $p(x)$ є сумовною функцією (див. [2]).

1. Розв'язки $s(x,\lambda)$ **і** $c(x,\lambda)$**.** Прийнявши $\lambda = \rho^2$, ми отримаємо з (1) рівняння

$$y'' + \rho^2 y = p(x)y. \tag{3}$$

За допомогою вектора $Y = \operatorname{colon}(y, y')$ зведемо це рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$Y' = C'(x)Y \tag{4}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(x) - \rho^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

звідки видно, що

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta q(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому $[\Delta C(x)]^2 \equiv 0$ на $[0,\infty)$, а, отже, система (4) – коректна, тобто розв'язок рівняння (1) з початковими умовами

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = Y_0 \tag{5}$$

існує і єдиний [3]. Відомо з [4, с. 28], що він є абсолютно неперервним на проміжку $[0,B]$ ($y(x) \in AC[0,B]$) для як завгодно великого $B > 0$; крім того, $y'(x) \in BV^+[0,B]$. Тим самим методом можна показати, що для $y(x) \in L_2[0,\infty)$ виконується сильніше твердження $y(x) \in AC[0,\infty) \bigcap L_2[0,\infty)$, $y'(x) \in BV^+[0,\infty) \bigcap L_2[0,\infty)$.

Якщо розглядати праву частину рівняння (3) як "неоднорідність", то векторне рівняння (4) можна подати у такому вигляді:

$$Y' = C_1'Y + C_2'Y, \;\; C_1'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\rho^2 & 0 \end{pmatrix}, \; C_2'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

За формулою Коші для неоднорідного рівняння (див. [5])

$$Y(x) = B(x,0)Y_0 + \int\limits_0^x B(x,t)dC_2(t)Y(t), \tag{6}$$

де $B(x,t)$ – фундаментальна матриця "однорідної" системи

$$Y' = C_1'Y \tag{7}$$

має вигляд (див. [6])

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} Q^{\{1\}}(x,t) & Q(x,t) \\ Q^{(1)\{1\}}(x,t) & Q^{(1)}(x,t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де $Q(x,t)$ – функція Коші рівняння $y'' + \rho^2 y = 0$, якому відповідає векторне рівняння (7). Круглі дужки в (8) позначають похідну за змінною x, а фігурні – квазіпохідну за t, яка згідно з [4, с. 29] визначається формулою $z^{\{1\}} = -z'$. Легко перевірити, що функція Коші

$$Q(x,t) = \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}.$$

Використавши дві останні формули та (8), можна розписати (6) у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерри-Стільтьєса

$$\begin{cases} y(x) = c_1\cos\rho x + \frac{c_2}{\rho}\sin\rho x + \int\limits_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} y(t)dq(t), \\ y'(x) = -c_1\rho\sin\rho x + c_2\cos\rho x + \int\limits_0^x \cos\rho(x-t)y(t)dq(t). \end{cases}$$

Позначимо через $s(x,\rho^2)$ і $c(x,\rho^2)$ розв'язки рівняння (3), що задовольняють початкові умови

$$s(0,\rho^2) = 0,\ s'_x(0,\rho^2) = 1,\ :c(0,\rho^2) = 1,\ c'_x(0,\rho^2) = 0.$$

Неважко довести (так само, як це зроблено в праці [7]), що $s(x,\rho^2)$ і $c(x,\rho^2)$ при $x \geqslant 0$ є цілими аналітичними функціями параметра ρ^2.

Зрозуміло, що при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $\rho \neq 0$, з першого рівняння системи (10) отримуємо функцію $s(x,\rho^2)$. Прийнявши, що $s(x,\rho^2) = \rho^{-1}e^{-i\rho x}z(x,\rho)$, одержимо

$$z(x,\rho) = \sin\rho x e^{i\rho x} + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-t)e^{i\rho(x-t)}z(t,\rho)dq(t).$$

Припустимо, що $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, а, отже, $\left|\sin\rho x e^{i\rho x}\right| \leqslant 1$ для всіх $x \geqslant 0$. Тоді

$$|z(x,\rho)| \leqslant 1 + \frac{1}{|\rho|}\int\limits_0^x |z(t,\rho)||dq(t)|.$$

Внаслідок узагальненої леми Гронуолла-Беллмана (див. [8]) з останньої нерівності випливає такий результат.

Теорема 1. *При* $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$ *для всіх* $x \geqslant 0$ *виконується нерівність*

$$\left|\rho s(x.\rho^2)\right| \leqslant \exp\left\{\frac{1}{|\rho|}\overset{x}{\underset{0}{V}}[q] + x\mathrm{Im}\rho\right\},$$

де $\overset{b}{\underset{a}{V}}[g]$ *– варіація функції* $q(x)$ *від 0 до* x.

2. Розв'язок $e(x,\rho)$. Нехай $\sigma(x) = \int\limits_x^\infty |dq(t)| < \infty$, $x \geqslant 0$.

Теорема 2. *Рівняння (3) має розв'язок $y = e(x,\rho)$, що задовольняє інтегральне рівняння*

$$e(x,\rho) = e^{ix\rho} - \int\limits_x^\infty \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} e(t,\rho)dq(t) \tag{11}$$

при $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$ *і виконанні умови* $\frac{\sigma(x)}{|\rho|} < 1$ *для* $x \geqslant 0$. *Для кожного* $\delta > 0$ *при* $x \to \infty$

$$e(x,\rho) = e^{i\rho x}[1 + o(1)],\ e'_x(x,\rho) = e^{i\rho x}[i\rho + o(1)]$$

рівномірно в області $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| \geqslant \delta$. *Крім того, при* $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$ *і* $\rho \to \infty$

$$e(x,\rho) = e^{i\rho x}[1 + O(1/\rho)],\ e'_x(x,\rho) = i\rho e^{i\rho x}[1 + O(1/\rho)]$$

рівномірно за $x \geqslant 0$. *Для кожного* $x \geqslant 0$ *розв'язок* $e(x,\rho)$ *є неперервним за* ρ *при* $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$ *і регулярним за* ρ *при* $\mathrm{Im}\rho > 0$.

Доведення теореми можна провести міркуваннями, аналогічними до [2, с. 446] і [9, с. 195–197] (з тією різницею, що замість інтегралів Рімана фігуруватимуть інтеграли Рімана-Стільтьєса). Зауважимо, що безпосередня перевірка того, що розв'язок рівняння (11) задовольняє рівняння (3), буде правильною, бо $e(x,\rho)$ є тоді розв'язком деякої початкової задачі (3), (5), а, отже, його можна диференціювати, причому друга похідна береться в узагальненому сенсі.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають обмежену варіацію і є неперервними праворуч на кожному підінтервалі $[c,d] \subset (a,b)$. Тоді символ

$$\int\limits_c^d f(x)dg(x) = \int\limits_c^d f(x)dg_c(x) + \sum_{c\leqslant x\leqslant d} f(x-0)[g(x) - g(x-0)], \tag{13}$$

де $g_c(x)$ – неперервна компонента функції $g(x)$, називається *некласичним інтегралом Рімана-Стільтьєса* (див. [10]).

Теорема 3. *Якщо виконується умова*

$$\sigma_1(x) = \int\limits_x^\infty t|dq(t)| < \infty,\ x \geqslant 0, \tag{14}$$

то розв'язок $e(x,\rho)$ *рівняння (3) існує також при* $\rho = 0$. *Він може бути поданий формулою*

$$e(x,\rho) = e^{ix\rho} + \int\limits_x^\infty K(x,t)e^{it\rho}dt,\ x \geqslant 0,\ \mathrm{Im}\rho \geqslant 0, \tag{15}$$

де ядро $K(x,t)$ *зображається у вигляді*

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^\infty dq(s) + R(x,t), \tag{16}$$

$$R(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{x+t}{2}}dq(s)\int\limits_{t+x-s}^{t+s-x}K(s,u)du+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}dq(s)\int\limits_{s}^{t+s-x}K(s,u)du,$$

причому

$$|K(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right). \tag{17}$$

Крім того,

$$e'_x(x,\rho)=i\rho e^{ix\rho}-\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty}\left[e^{i\rho(2s-x)}+e^{ix\rho}\right]dq(s)+\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{\infty}R(x,t)e^{it\rho}dt, \tag{18}$$

причому

$$|R'_x(x,t)|,|R'_t(x,t)|\leqslant\tfrac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma\left(\tfrac{x+t}{2}\right)\sigma(x),\ 0\leqslant x\leqslant t<\infty. \tag{19}$$

Функції $K(x,t)$, $R'_x(x,t)$, $R'_t(x,t)$ за кожною змінною при фіксованій іншій є неперервними праворуч функціями обмеженої варіації на $[0,\infty)$.

Доведення. Розглянемо рівняння (11) і будемо формально шукати його розв'язок у вигляді (15). Підставивши в (11) замість $e(x,\rho)$ його вираз (15), отримаємо

$$\int\limits_{x}^{\infty}K(x,t)e^{it\rho}dt=-\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\sin\rho(x-s)}{\rho}e^{is\rho}dq(s)-\int\limits_{x}^{\infty}dq(s)\int\limits_{s}^{\infty}\frac{\sin\rho(x-s)}{\rho}e^{i\rho u}K(s,u)du=$$

$$=I_1+I_2. \tag{20}$$

Перетворимо інтеграли в правій частині співвідношення (20), скориставшись тим, що

$$\frac{\sin\rho(s-x)}{\rho}e^{i\rho s}=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{2s-x}e^{i\rho t}dt,\ :\ \frac{\sin\rho(s-x)}{\rho}e^{i\rho u}=\frac{1}{2}\int\limits_{u+x-s}^{u+s-x}e^{i\rho t}dt,$$

і змінивши в них порядок інтегрування. В результаті цього одержимо

$$I_1=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty}e^{i\rho t}\left[\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}dq(s)\right]dt;$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\infty}e^{i\rho t}\left[\int\limits_{x}^{\frac{x+t}{2}}dq(s)\int\limits_{t+x-s}^{t+s-x}K(s,u)du+\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}dq(s)\int\limits_{s}^{t+s-x}K(s,u)du\right]dt.$$

Інтеграли в I_1 та I_2 ми розуміємо як некласичні інтеграли Рімана-Стільтьєса (властивості функції $K(x,t)$ визначимо нижче). Зауважимо, що законність перестановки порядку інтегрування в інтегралі I_1 легко доводиться за допомогою умови (14) і формули Діріхле для некласичного інтеграла Рімана-Стільтьєса (див. [10]); щодо інтеграла I_2, то в ньому ця операція виконана формально і буде обґрунтована пізніше.

Підставимо знайдені для I_1 і I_2 вирази в рівність (20) і, скориставшись єдиністю розкладення в інтеграл Фур'є, отримаємо таке інтегральне рівняння $(0 \leqslant x \leqslant t)$

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s) + \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} dq(s)\int_{t+x-s}^{t+s-x} K(s,u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s)\int_{s}^{t+s-x} K(s,u)du. \tag{21}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок, який можна отримати методом послідовних наближень. Прийнявши, що

$$K_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s),$$

$$K_m(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} dq(s)\int_{t+x-s}^{t+s-x} K_{m-1}(s,u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} dq(s)\int_{s}^{t+s-x} K_{m-1}(s,u)du, \tag{22}$$

одержимо такі оцінки:

$$|K_0(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right), \; |K_1(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma_1(x),$$

а потім за індукцією

$$|K_m(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\frac{\sigma_1^m(x)}{m!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \tag{23}$$

З цих оцінок випливає, що ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$ збігається рівномірно в області $0 \leqslant x \leqslant t$ і для його суми $K(x,t)$ справджується нерівність (17).

Формули (22) і (13) означають, що при обмеженості варіації неперервної праворуч функції $K_{m-1}(x,t)$ за кожною змінною при фіксованій іншій і оцінці (23) на нескінченності функція $K_m(x,t)$ має такі самі властивості. Функцію обмеженої варіації можна подати у вигляді різниці двох монотонних функцій; на підставі цього неважко довести, що $K(x,t)$ як сума ряду матиме обмежену варіацію за кожною змінною при фіксованій іншій на $[0,\infty)$.

Внаслідок (14) маємо

$$\int_{x}^{\infty} |K(x,t)|dt \leqslant e^{\sigma_1(x)}\int_{x}^{\infty} \sigma(u)du \leqslant e^{\sigma_1(x)}\sigma_1(x) \tag{24}$$

і тепер можемо виправдати зміну порядку інтегрування в інтегралі I_2. Справді, внаслідок обмеженості варіації підінтегральних функцій в I_2 можна двічі застосувати формулу Діріхле (див. [10]). Доведено, що всі інтеграли, наведені вище, існують, а формула (15) з ядром $K(x,t)$, що задовольняє рівняння (21), дає розв'язок рівняння (3) при $\text{Im}\rho \geqslant 0$.

Залишилось довести формули (18) і (19). Скориставшись позначенням (16) і продиференціювавши (15) за x, легко прийти до рівності (18). Врахувавши (21), можна побачити, що при $0 \leqslant x \leqslant t$

$$R'_x(x,t) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^{\frac{x+t}{2}} K(s,t+x-s)dq(s) - \frac{1}{2}\int\limits_x^{\infty} K(s,t+s-x)dq(s),$$

звідки, на підставі оцінок (14) і (17), отримаємо (19). Обмеженість варіації функції $R'_x(x,t)$ випливає з властивостей функції $K(x,t)$. Для $R'_t(x,t)$ викладення аналогічне. Теорема доведена.

Теорема 4. *Якщо при деякому $\gamma \geqslant 0$ збігається інтеграл*

$$\sigma_{1+\gamma}(x) = \int\limits_x^{\infty} t^{1+\gamma}|dq(t)|,$$

то при $x \to \infty$ $e(x,0) = 1 + o(x^{-\gamma})$, $e'_x(x,0) = o(x^{-1-\gamma})$.

Доведення. Враховуючи формули (15), (24) і умову збіжності інтеграла $\sigma_{1+\gamma}(x)$, маємо при $x \to \infty$ оцінку

$$|e(x,0)| \leqslant 1 + \int\limits_x^{\infty} |K(x,t)|dt \leqslant 1 + e^{\sigma_1(x)}\int\limits_x^{\infty} t|dq(t)| \leqslant 1 + o(x^{-\gamma}).$$

З формули (18) видно, що

$$e'_x(x,0) = -\int\limits_x^{\infty} dq(t) + \int\limits_x^{\infty} R'_x(x,t)dt - R(x,x).$$

Отже, згідно з рівністю (16) і нерівностями (17), (19), (24) та умови теореми при $x \to \infty$ отримаємо

$$|e'_x(x,0)| \leqslant \frac{3}{2}\sigma(x) + e^{\sigma_1(x)}\sigma(x)\sigma_1(x) + \frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma(x) = o(x^{-1-\gamma}),$$

що й доводить теорему.

3. Розв'язок $\hat{e}(x,\rho)$. Обмежений розв'язок $e(x,\rho)$ відповідає розв'язку $e^{ix\rho}$ рівняння $y'' + \rho^2 y = 0$. Можна побудувати також необмежений розв'язок $\hat{e}(x,\rho)$ рівняння (3), відповідний розв'язку $e^{-ix\rho}$ рівняння $y'' + \rho^2 y = 0$.

Теорема 5. *Для кожного $\delta > 0$ існує таке досить велике $a = a_\delta > 0$, що рівняння (3) має розв'язок $y = \hat{e}(x,\rho)$, який задовольняє інтегральне рівняння типу Вольтерри-Стільтьєса*

$$\hat{e}(x,\rho) = e^{-ix\rho} - \frac{i}{2\rho}\int\limits_a^{x} e^{i(x-t)\rho}\hat{e}(t,\rho)dq(t) - \frac{i}{2\rho}\int\limits_x^{\infty} e^{i(t-x)\rho}\hat{e}(t,\rho)dq(t) \tag{25}$$

в області $x \geqslant a$, $\mathrm{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| \geqslant \delta$. *Крім того, для кожного* $\alpha > 0$, *при* $x \to \infty$

$$\hat{e}(x,\rho) = e^{-ix\rho}[1 + o(1)],\ \hat{e}'_x(x,\rho) = e^{-ix\rho}[-i\rho + o(1)]$$

рівномірно в області $\mathrm{Im}\rho \geqslant \alpha$, $|\rho| \geqslant \delta$. *Розв'язок* $\hat{e}(x,\rho)$ *є регулярним за* ρ *в області* $\mathrm{Im}\rho > 0$, $|\rho| \geqslant \delta$, *і при* $|\rho| \to \infty$ *рівномірно стосовно* $x \geqslant 0$

$$\hat{e}(x,\rho) = e^{-i\rho x}[1 + O(1/\rho)],\ \hat{e}'_x(x,\rho) = -i\rho e^{-i\rho x}[1 + O(1/\rho)].$$

Доведення теореми виконується аналогічно до доведення теореми 2.

Інтегральне рівняння (25) визначає функцію $\hat{e}(x,\rho)$ лише при $x \geqslant a$. Ми можемо розглядати функцію $\hat{e}(x,\rho)$ на півосі $x \geqslant 0$, продовжуючи її в інтервал $0 \leqslant x \leqslant a$ як розв'язок рівняння (3).

Розглянемо випадок $\rho = 0$. Так само, як і в [2, с. 449], можна довести, що розв'язок $\hat{e}(x,0)$ інтегрального рівняння

$$\hat{e}(x,0) = x - x\int_x^\infty \hat{e}(t,0)dq(t) - \int_a^x t\hat{e}(t,0)dq(t)\ \ (a > 0)$$

існує і задовольняє рівняння $l(y) = 0$. Зауважимо, що $\hat{e}(x,0) \in AC[0,B]$, $\hat{e}'_x(x,0) \in BV^+[0,B]$ для будь-якого $B > 0$.

Теорема 6. *Якщо при деякому* $\gamma \geqslant 0$ *збігається інтеграл* $\sigma_{1+\gamma}(x)$, *то при* $x \to \infty$

$$\hat{e}(x,0) = x[1 + o(x^{-\gamma})],\ \hat{e}'_x(x,0) = 1 + o(x^{-\gamma}).$$

Доведення цієї теореми можна провести так само, як в [11, с. 31–33] для аналогічного результату при сумовній функції $p(x)$ (зрозуміло, що замість інтегралів Рімана потрібно у відповідних місцях використовувати інтеграли Рімана-Стільтьєса).

4. Спектр оператора L та розкладення за головними функціями. Нехай L – це лінійний диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом $l(y)$ і крайовою умовою (2), з областю визначення

$$D(L) = \left\{f : f \in AC[0,\infty) \bigcap L_2[0,\infty),\ l(f) \in L_2[0,\infty),\ f(0) = 0\right\}.$$

Користуючись теоремами 1–6 міркуваннями аналогічними до праці [2, с. 449–454] можна отримати такі самі спектральні властивості оператора L, що й у "класичному" випадку. Зокрема, множина власних значень оператора L є не більш ніж зліченною; вони задовольняють умови $\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Im}\rho > 0$, $e(0,\rho) = 0$; всі числа вигляду $\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Im}\rho > 0$, $e(0,\rho) \neq 0$ належать резольвентній множині; всі числа $\lambda \geqslant 0$ належать неперервному спектру.

Припустимо, що виконується додаткове обмеження: існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x}|dq(t)| < \infty.$$

Звідси випливає, що

$$\sigma(x)=\int\limits_x^\infty |dq(t)|\leqslant Ce^{-\varepsilon x},\ \sigma_1(x)=\int\limits_x^\infty t|dq(t)|\leqslant C_{\varepsilon'}e^{-\varepsilon' x},$$

де $0<\varepsilon'<\varepsilon$, а C і $C_{\varepsilon'}$ – додатні сталі. Отже, оцінки (17) і (19) можна посилити так:

$$|K(x,t)|\leqslant Ce^{-\varepsilon\frac{x+t}{2}};\ |R'_x(x,t)|,|R'_t(x,t)|\leqslant Ce^{-\varepsilon\left(\frac{3}{2}x+t\right)};$$

тут $0\leqslant x\leqslant t<\infty$, а C – деяке стале число.

Сингулярними числами оператора L назвемо корені ρ_k рівняння $e(0,\rho)=0$, що задовольняють умови $\rho_k\neq 0$, $\mathrm{Im}\rho_k\geqslant 0$. Можна довести (див. [2, с. 456]), що множина їх є скінченною. Недійсні сингулярні числа визначають власні значення оператора $\lambda_k=\rho_k^2$, $k=\overline{1,\alpha}$, а числа $\lambda_k>0$, $k=\overline{\alpha+1,\beta}$ назвемо його *спектральними особливостями.*

Функції $s^{(m)}(x,\lambda_k)=\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m s(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_k}$, $k=\overline{1,\alpha}$, $m=\overline{0,m_k-1}$ (m_k – кратність сингулярного числа ρ_k) назвемо, використовуючи [2, с. 457], *головними функціями точкового спектра* оператора L, а функції $s^{(m)}(x,\lambda_k)$, $k=\overline{\alpha+1,\beta}$, $m=\overline{0,m_k-1}$ – *головними функціями спектральних особливостей.*

Подібно до того, як це зроблено в [2] за допомогою L-перетворення Фур'є, можна показати, що кожна функція $f(x)\in L_2[0,\infty)$ розкладається за головними функціями обох типів, однак це розкладення збігається за слабшою нормою, ніж норма простору $L_2[0,\infty)$. Для тих функцій $f\in L_2[0,\infty)$, для яких виконується ще одна додаткова умова, це розкладення збігається за нормою простору $L_2[0,\infty)$. L-перетворення Фур'є та розкладення за головними функціями можна побудувати і для ширших класів, ніж $L_2[0,\infty)$, зокрема для помірно зростаючих функцій (див. [2, с. 478–490]).

---

1. *Шин Д. Ю.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сб. – 1940. – Т. 7(49). – N 3. – С. 479-532.
2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М., 1969.
3. *Стасюк М. Ф., Таций Р. М.* Корректные дифференциальные системы с мерами // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференциальные уравнения и их приложения. – 1988. – N 222. – С. 89-90.
4. *Тацій Р. М.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Львів, 1994. (Препринт / НАН України. ІППММ; 2-94).
5. *Стасюк М. Ф., Таций Р. М.* Однозначно определенные неоднородные дифференциальные уравнения с мерами // 1 Республ. конф. "Разрывные динамические системы": Тезисы докладов. Киев, 16-18 мая, 1989г. – К., 1989. – С. 53.
6. *Таций Р. М., Пахолок Б. Б.* Про структуру фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Докл. АН УССР. - Сер. А. – 1989. – N 4. – С. 25-28.
7. *Тацій Р. М., Кісілевич В. В., Стасюк М. Ф., Пахолок Б. Б.* Про аналітичну залежність розв'язків лінійного диференціального рівняння з мірами від параметра // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 165-167.

8. *Пахолок Б. Б.* Об одном неравенстве типа Гронуолла-Беллмана // Вестн. Львов. политехн. ин-та: Дифференциальные уравнения и их приложения. – 1989. – N 232. – С. 109-110.

9. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного оператора второго порядка на полуоси // Труды Московского математического общества. – 1954. – Т.3. – С. 181-270.

10. *Стасюк М. Ф.* Неклассический интеграл Римана-Стильтьеса и его применение в теории линейных систем. – К., 1985. – 25 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, 2383.

11. *Агранович З. С., Марченко В. А.* Обратная задача теории рассеяния. – Харьков, 1960.

THE GENERALIZED NONSELFADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR OF THE SECOND ORDER ON SEMIAXIS

Olexander Makhney

National University of Technology in Lviv
12 Bandery Str. 79013 Lviv, Ukraine

Some solutions of a nonselfajoint differential equation of the second order with the measure (generalized derivative of function of bounded variation) on positive semiaxis are constructed with the help of classical and unclassical Riman-Stieltjes's integrals and the method of introduction of quasiderivatives. Their use allows to determine spectral properties of the differential operator and to construct the development by main functions.

Key words: differential operator of the second order with the measure on unbounded interval, spectrum of the operator.

Стаття надійшла до редколегії 15.11.2001

Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.102–108 *Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.102–108*

УДК 539.3

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТЕМПЕРАТУРИ НА ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ШАРУ

Тарас НАГІРНИЙ, Костянтин ЧЕРВІНКА
Центр математичного моделювання
вул. Дудаєва, 15, м.Львів, Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Сформульовано крайові задачі локально-градієнтної термопружності. Ключова система рівнянь, записана для вектора переміщення, збурень температури й хімічного потенціалу, є нелінійною за рахунок нелінійності імпульсу механічного поступального руху. Використовуючи операцію усереднення на періоді коливань, одержано систему рівнянь на усереднені та коливні складові полів і запропоновано методику їх наближеного розв'язування (використано метод розвинення за малим параметром).

Розглянуто власні коливання шару для різних умов закріплення його поверхонь (нерухомі поверхні, одна поверхня нерухома, вільні поверхні). Проведено аналіз відповідних хвильових рівнянь. Досліджено залежність частот власних коливань від температури та параметрів, які характеризують приповерхневу неоднорідність. Одержані результати є важливими для опису хвильових процесів у тонких плівках, для яких властивий розмірний (масштабний) ефект.

Ключові слова: локально-градієнтна термопружність, хімічний потенціал.

Відомо, що поведінка деформівних систем суттєво залежить від температури, при якій вони експлуатуються. Відхилення температури від початкової може призводити до виникнення конструкційних напружень і так суттєво впливати на експлуатаційні властивості конкретних елементів.

У цій праці вивчено вплив температури на приповерхневу неоднорідність і хвильові процеси в шарі за локально-градієнтного підходу. Зазначимо, що вплив приповерхневої неоднорідності на частоти власних коливань шару для ізотермічного наближення досліджено в [4].

Повна система рівнянь локально-градієнтного термопружного тіла складається з рівнянь балансу імпульсу, маси, ентропії та визначальних співвідношень. Якщо за розв'язуючі функції вибрати вектор переміщення $\vec{u}$, відхилення температури $\theta \equiv T - T_*$ від початкової T_* та відхилення хімічного потенціалу $\eta \equiv H - H_*$ від початкового значення H_*, то ключову систему рівнянь, що описує динамічні процеси в термопружному тілі, з врахуванням ефектів локальної неоднорідності відповідно до [5, 6], можна записати у вигляді

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\eta - \alpha_t\vec{\nabla}\theta) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(\varrho_* - (3\lambda+2\mu)\alpha_m \vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \alpha_{mm}\eta - \beta\theta\right)\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right],$$

$$\nabla^2\eta - \kappa^2 : \eta - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\vec{u} - \kappa_\theta^2 : \theta = 0,$$

$$\lambda_s : \nabla^2\theta = (3\lambda+2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + c_v : \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \beta T_* : \frac{\partial \eta}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

де ϱ_* – густина матеріалу тіла у відліковий момент часу, $\vec{\nabla}$ – вектор-оператор Гамільтона, τ – час, "$\cdot$" – внутрішній добуток, $\lambda, \mu, \alpha_m, \alpha_t, \beta, \alpha_{mm}, \kappa, \kappa_u, \kappa_\theta, \lambda_s, c_v$ – сталі матеріалу.

Система рівнянь (1) є нелінійною за рахунок нелінійності імпульсу механічного поступального руху. Якщо поведінка тіла описується нелінійною системою рівнянь і воно перебуває під дією періодичного силового навантаження, то у ньому існують коливні та повільно змінні на періоді коливань складові полів. Тому відповідно до [1, 2] при дослідженні хвильових процесів розв'язок таких рівнянь природно подати у вигляді суми повільно змінної в часі, чи як її ще називають осередненої $\overline{\varphi}$, та коливної $\widetilde{\varphi}$ складових $\varphi = \overline{\varphi} + \widetilde{\varphi}$. Таке подання зробимо, грунтуючись на операції осереднення на періоді коливань τ_0 [1, 3]

$$\overline{\varphi}(\vec{r},\tau) \equiv \frac{1}{\tau_0}\int_{\tau}^{\tau+\tau_0} \varphi(\vec{r},\xi)d\xi,$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки тіла.

Застосовуючи операцію осереднення до рівнянь (1) та нехтуючи осередненою складовою сили інерції, для $\overline{\vec{u}}, \overline{\eta}, \overline{\theta}$ одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$\mu\nabla^2\overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\overline{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\overline{\theta}) = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\eta} - \kappa^2 : \overline{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \overline{\theta} = 0,$$

$$\lambda_s\nabla^2\overline{\theta} = (3\lambda+2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right) + c_v : \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial \tau} - \beta T_* : \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial \tau}. \qquad (2)$$

На цій підставі для коливних складових $\widetilde{\vec{u}}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\theta}$ маємо

$$\mu\nabla^2\widetilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\widetilde{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\widetilde{\theta}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left(\varrho_* - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \alpha_{mm}\overline{\eta} - \beta\overline{\theta}\right)\frac{\partial \widetilde{\vec{u}}}{\partial \tau}\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\widetilde{\left((3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}} + \alpha_{mm}\widetilde{\eta} + \beta\widetilde{\theta}\right)\frac{\partial \widetilde{\vec{u}}}{\partial \tau}}\right),$$

$$\nabla^2\widetilde{\eta} - \kappa^2 : \widetilde{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \widetilde{\theta} = 0,$$

$$\lambda_s : \nabla^2\widetilde{\theta} = (3\lambda+2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}\right) + c_v : \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \tau} - \beta T_* : \frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \tau}. \qquad (3)$$

Обмежуючись усталеним режимом та розглядом хвиль основної гармоніки, системи (2), (3) зводимо до вигляду

$$\mu\nabla^2\overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\overline{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\overline{\theta}) = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\eta} - \kappa^2 : \overline{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \overline{\theta} = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\theta} = 0; \tag{4}$$

$$\mu\nabla^2\widetilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}) + (3\lambda+2\mu)(\alpha_m\vec{\nabla}\widetilde{\eta} - \alpha_t\vec{\nabla}\widetilde{\theta}) =$$

$$= \left(\varrho_* - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} - \alpha_{mm}\overline{\eta} - \beta\overline{\theta}\right)\frac{\partial^2\widetilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2},$$

$$\nabla^2\widetilde{\eta} - \kappa^2 : \widetilde{\eta} - \kappa_u^2 : \vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}} - \kappa_\theta^2 : \widetilde{\theta} = 0,$$

$$\lambda_s : \nabla^2\widetilde{\theta} = (3\lambda+2\mu)\alpha_t T_* : \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\vec{\nabla}\cdot\widetilde{\vec{u}}\right) + c_v : \frac{\partial\widetilde{\theta}}{\partial\tau} - \beta T_* : \frac{\partial\widetilde{\eta}}{\partial\tau}. \tag{5}$$

Система рівнянь (4) описує рівноважний стан, а (5) — хвильові процеси у термопружному тілі з врахуванням приповерхневої неоднорідності. Тому математично вивчення хвильових процесів зводиться до послідовного визначення осереднених складових на основі (4) при наступному визначенні коливних складових на підставі системи рівнянь (5). Зазначимо, що вона є системою рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

Застосуємо співвідношення (4), (5) для вивчення власних частот поперечних коливань шару $|x| \leqslant l$ за різних умов закріплення його поверхонь $x = \pm l$. Нехтуватимемо зв'язаністю коливних складових розглядуваних полів. Вважаючи, що в тілі реалізується одновимірна за просторовою координатою ситуація і приймаючи $u_x = \overline{u} + \widetilde{u}$, одержуємо

$$\overline{u}'' + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}(\alpha_m\overline{\eta}' - \alpha_t\overline{\theta}') = 0,$$

$$\overline{\eta}'' - \kappa^2\overline{\eta} - \kappa_u^2\overline{u}' - \kappa_\theta^2\overline{\theta} = 0, \qquad \overline{\theta}'' = 0,$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial x^2} = \left[\varrho_* - (3\lambda+2\mu)\alpha_m\overline{u}' - \beta\overline{\theta} - \alpha_{mm}\overline{\eta}\right]\frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\tau^2}, \tag{6}$$

де штрихом позначено похідні осереднених складових за просторовою координатою. Для знаходження складових $\overline{u}, \overline{\eta}, \overline{\theta}$ використаємо перші три рівняння (6) та такі крайові умови:

$$\overline{\theta}|_{x=\pm l} = \theta_a, \qquad \overline{\eta}|_{x=\pm l} = \eta_a,$$

$$\left.\left[\frac{d\overline{u}}{dx} + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}(\alpha_m\overline{\eta} - \alpha_t\overline{\theta})\right]\right|_{x=\pm l} = 0. \tag{7}$$

Розв'язок крайової задачі (6), (7) має вигляд

$$\overline{\theta}(x) = \theta_a, \qquad \overline{\eta}(x) = \left(\eta_a + \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\theta_a\right)\frac{\operatorname{ch}(\xi x)}{\operatorname{ch}(\xi l)} - \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\theta_a,$$

$$\overline{u}(x) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\alpha_m}{\xi}\left(\eta_a + \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\theta_a\right)\frac{\operatorname{sh}(\xi x)}{\operatorname{ch}(\xi l)} + \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\alpha_t + \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\alpha_m\right)\theta_a x,$$

де $\xi^2 = \kappa^2 - \kappa_u^2\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_m$, $\xi_\theta^2 = \kappa_\theta^2 + \kappa_u^2\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\alpha_t$.

Для усталених у часі коливань розв'язок $\widetilde{u}$ останнього рівняння системи (6) подамо у вигляді

$$\widetilde{u}(x,\tau) = u(x)\, e^{i\omega\tau}.$$

Тоді для визначення амплітуди $u(x)$ одержуємо рівняння

$$u''(x) + \zeta^2\left(1 + a\frac{\operatorname{ch}(\xi x)}{\operatorname{ch}(\xi l)}\right)u(x) = 0, \tag{8}$$

де $a = b\left(\eta_a + \theta_a\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right)\Big/(\varrho_* + \gamma\theta_a) \equiv \left(\frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha_m^2}{\lambda+2\mu} - \alpha_{mm}\right)\left(\eta_a + \theta_a\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right)\Big/(\varrho_* + \gamma\theta_a)$, $\zeta^2 = \frac{\omega^2}{\lambda+2\mu}(\varrho_* + \gamma\theta_a)$, $\quad \gamma = \alpha_{mm}\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2} - \frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha_m}{\lambda+2\mu}\left(\alpha_t + \alpha_m\frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right) - \beta$.

Використовуючи розвинення розв'язку за малим порівняно з одиницею параметром $\alpha \equiv a/\operatorname{ch}(\xi l) \ll 1$ та обмежившись першим наближенням $u(x) \approx u_0(x) + \alpha u_1(x)$ для $u_0(x), u_1(x)$, одержуємо

$$u_0''(x) + \zeta^2 u_0(x) = 0,$$

$$u_1''(x) + \zeta^2 u_1(x) + \zeta^2\operatorname{ch}(\xi x)u_0(x) = 0.$$

Розв'язком цих рівнянь є функції

$$u_0(x) = A_0\cos(\zeta x) + B_0\sin(\zeta x),$$

$$u_1(x) = A_1\cos(\zeta x) + B_1\sin(\zeta x) + A_0\zeta\left(-V_1(x)\cos(\zeta x) + \right.$$
$$\left. + V_2\sin(\zeta x)\right) + B_0\zeta\left(V_3(x)\cos(\zeta x) + V_1\sin(\zeta x)\right),$$

де

$$V_1(x) = \frac{1}{\xi^2+4\zeta^2}\left(\zeta\operatorname{ch}(\xi x)\cos(2\zeta x) + \frac{\xi}{2}\operatorname{sh}(\xi x)\sin(2\zeta x)\right),$$

$$V_2(x) = -\frac{1}{2\xi}\operatorname{sh}(\xi x) - \frac{1}{\xi^2+4\zeta^2}\left(\zeta\operatorname{ch}(\xi x)\sin(2\zeta x) + \frac{\xi}{2}\operatorname{sh}(\xi x)\cos(2\zeta x)\right),$$

$$V_3(x) = \frac{1}{2\xi}\operatorname{sh}(\xi x) - \frac{1}{\xi^2+4\zeta^2}\left(\zeta\operatorname{ch}(\xi x)\sin(2\zeta x) + \frac{\xi}{2}\operatorname{sh}(\xi x)\cos(2\zeta x)\right).$$

На цій підставі для $u(x)$ маємо

$$u(x) = A\left\{\cos(\zeta x) + \alpha\zeta\left[-V_1(x)\cos(\zeta x) + V_2(x)\sin(\zeta x)\right]\right\} +$$
$$+B\left\{\sin(\zeta x) + \alpha\zeta\left[V_3(x)\cos(\zeta x) + V_1(x)\sin(\zeta x)\right]\right\}, \tag{9}$$

де $A = A_0 + \alpha A_1, B = B_0 + \alpha B_1$ – довільні константи.

Конкретизуємо розв'язок (9) для таких граничних умов: випадок 1 – коливна складова на поверхнях дорівнює нулю, випадок 2 – коливна складова на одній з поверхонь та її похідна на іншій дорівнюють нулю та випадок 3 – похідні коливних складових переміщення на поверхнях шару нульові. Враховуємо, що можна незалежно забезпечити крайові умови, які накладаються на амплітуди коливних складових та осереднені складові полів, що розглядаються.

Випадок 1. Умови
$$u(-l) = 0, \quad u(l) = 0,$$
разом з (9) дають систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження сталих A і B. Ненульовий розв'язок цієї системи існує, якщо дорівнює нулю її визначник. Нехтуючи доданками вищого порядку малості, ніж α^1, для товстих порівняно з областю приповерхневої неоднорідності шарів ($\zeta l \gg 1$) одержуємо хвильове рівняння
$$\left(1 - \frac{2a\zeta^2}{\xi^2 + 4\zeta^2}\right)\sin(2\zeta l) + \frac{4a\zeta^3}{\xi(\xi^2 + 4\zeta^2)}\cos(2\zeta l) = 0. \tag{10}$$

Введемо у розгляд хвильове число ζ_0, що відповідає коливанням однорідного шару при початковій температурі ($\theta = 0$). Для нього рівняння (10) є таким:
$$\sin(2\zeta_0 l) = 0. \tag{11}$$

Для наближення $|\zeta/\zeta_0 - 1| \ll 1$ з (10) випливає, що
$$\zeta^{(n)} = \zeta_0^{(n)}\left[1 - \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{2b}{(\xi l)^3}\left(\eta_a + \theta_a \frac{\xi_\theta^2}{\xi^2}\right) \Big/ (\varrho_* + \gamma\theta_a)\right], \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{12}$$

Отже, власними частотами є
$$\omega_1^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\left(1 - \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{2b}{(\xi l)^3}\frac{\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2}{\varrho_* + \gamma\theta_a}\right)\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{13}$$

де $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\varrho_*}$ – швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі в однорідному середовищі при $T = T_*$.

Якщо додатково прийняти, що вплив температури на густину є малим, тобто $\gamma\theta_a/\varrho_* \ll 1$, то
$$\omega_1^{(n)} = \zeta_0^{(n)} c_1\left(1 - \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{2b}{\varrho_*(\xi l)^3}(\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2)\right).$$

Випадок 2. Умови на амплітуду коливних складових переміщення мають вигляд
$$u(-l) = 0, \quad u'(l) = 0.$$
Співвідношення, аналогічні до (10)–(13) є такими:
$$\cos(2\zeta l) - \frac{a\zeta}{\xi}\sin(2\zeta l) = 0, \tag{14}$$
$$\cos(2\zeta_0 l) = 0,$$
$$\zeta^{(n)} = \frac{\pi(2n+1)}{4l}\left(1 - \frac{a}{2\xi l}\right), \quad n \in \mathbf{Z},$$
$$\omega_2^{(n)} = \frac{\pi(2n+1)}{4l}\left(1 - \frac{b}{2\xi l}\frac{\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2}{\varrho_* + \gamma\theta_a}\right)\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{15}$$

Випадок 3. Для вільних поверхонь шару крайові умови для амплітуд механічних коливань є такими:

$$u'(-l) = 0, \quad u'(l) = 0.$$

Запишемо рівності, що відповідають (10)–(13)

$$\left(1 + \frac{2a\zeta^2}{\xi^2 + 4\zeta^2}\right)\sin(2\zeta l) + a\zeta\left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{\xi^2 + 4\zeta^2}\right)\cos(2\zeta l) = 0, \tag{16}$$

$$\sin(2\zeta_0 l) = 0,$$

$$\zeta^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\left(1 - \frac{a}{\xi l}\right), \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$\omega_3^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\left(1 - \frac{b}{\xi l}\frac{\eta_a + \theta_a\,\xi_\theta^2/\xi^2}{\varrho_* + \gamma\theta_a}\right)\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{17}$$

З (13), (15), (17) випливає, що якісна залежність $\omega^{(n)}$ від температури є однаковою для розглядуваних умов закріплення поверхонь шару, разом з тим множники $2/(\xi l)^3$, $1/(2\xi l)$, $1/(\xi l)$ можуть суттєво змінити кількісну залежність. Зрозуміло, що така залежність є суттєвішою для тонких плівок порівняно з товстими шарами, для яких ξl значно більше одиниці. Зі зростанням товщини шару вплив температури на власні частоти зменшується, прямуючи відповідно до

$$\omega_1^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \ \omega_2^{(n)} = \frac{\pi(2n+1)}{4l}\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}, \ \omega_3^{(n)} = \frac{\pi n}{2l}\frac{c_1}{\sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}}.$$

Порівнюючи дані співвідношення з аналогічними для моделі пружного тіла, бачимо, що вираз $c_1 \Big/ \sqrt{1 + \gamma\theta_a/\varrho_*}$ можна трактувати як залежність швидкості поширення пружної хвилі від збурення температури. Тобто, для досить товстих шарів вплив температури на частоти власних коливань можна враховувати опосередковано через залежність від температури швидкості поширення пружної хвилі.

---

1. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К., 1971.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., 1974.
3. *Гребенников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. – М., 1986.
4. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Моделювання хвильових процесів у деформівних твердих тілах з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.117-124
5. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах// Прикл. механика. – 1992. – Т.28. – N 12. – С.3-23.
6. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С., Грицина О.Р., Червинка К.А.* Поверхностные напряжения в слое. Влияние температуры и примесей на прочность // Проблемы прочности. – 2000. – N 6. – С.35-43.

7. *Нагірний Т.С., Червінка К.А.* Поверхневі напруження в шарі. Вплив температури на приповерхневий натяг та міцність// Доп. НАН України. – 2000. – N 10. – С.57-62.

SIMULATION AND INVESTIGATION THE INFLUENCE ON TEMPERATURE ON EIGEN VIBRATIONS OF STRIP

Taras Nahirnyi, Kostyantyn Chervinka

Center of mathematical modelling
15 Dudayeva Str, Lviv, Ukraine
Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Boundary value problems of local gradient thermo-elasticity are formulated in the paper. System of differential equations in terms of displacement, disturbances of chemical potential and temperature is nonlinear due to nonlinearity of momentum. With use of the averaging over vibration period procedure it yields a system in term of averaged and wave components and methods to solve the later (using expansion over small parameter) are proposed. The system of averaged components describes nearsurface nonhomogeneity (interface phenomena) in solids. The system of wave components is a nonlinear one (mass density that enters in expression of momentum depends on spatial coordinates and can be derived on the base of averaged component of solution). We consider normal mode of layer vibration under various conditions on its surfaces (the surfaces are fixed, just one is fixed, both are free of load). The corresponding wave equations are analyzed. The frequencies of normal mode vibrations dependences on temperature and nonhomogeneity parameters are investigated. Obtained results mainly contribute to description of wave processes in thin films, where size effects are considerable.

Key words: local gradient thermoelasticity, chemical potential.

Стаття надійшла до редколегії 21.03.2001

Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.109–114 *Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.109–114*

УДК 517.53

ТЕОРЕМА ЄДИНОСТІ ДЛЯ РЯДІВ ДІРІХЛЕ НА СМУГАХ ЖОРДАНА

Олег ПІХ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено умови на експоненти $\lambda = (\lambda_n)$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ цілого ряду Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, за яких з обмеженості ряду на множині $E = \{z = x + iy : |y| \leqslant d(x)\}$, де $d(x) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ є неперервною функцією, яка прямує до нуля при $x \to +\infty$, випливає, що $F(z) = \text{const}$.

Ключові слова: ряд Діріхле, теорема єдиності, ціла функція.

Нехай $Q = \{q_n : n \geqslant 0\} \subset \mathbf{N} \cup \{0\}$, а $E(Q)$ – множина всіх цілих функцій вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{q_n}.$$

У [1] доведено, що у випадку

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty \tag{1}$$

з умови

$$\sup\{|f(x)| : x \in \mathbf{R}_+\} < +\infty \tag{2}$$

випливає таке:

$$f(z) \equiv \text{const},$$

тобто за виконання умови (1) ціла функція $f \in E(Q)$ може бути обмеженою на додатній дійсній півосі тільки у тривіальному випадку.

Нехай $S(\Lambda)$ клас цілих функцій $f(z)$, зображуваних абсолютно збіжними в усій комплексній площині рядами Діріхле вигляду

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n},$$

де $\Lambda = (\lambda_n)$ – фіксована послідовність, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. У статті [2] показано, що за умови

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty \tag{3}$$

ціла функція $f \in S(\Lambda)$ не може бути обмеженою на дійсній осі.

У підкласах класів $E(Q)$ та $S(\Lambda)$, що визначаються різноманітними обмеженнями на зростання максимуму модуля цілої функції, наведені результати неодноразово доповнювали (див., наприклад,[3-6]). Крім того, за умови (3) теореми єдиності доведено в класі $S(\Lambda)$ при заміні в умові (2) $\mathbf{R}_+$ на довільну криву Γ таку, що $z \to \infty$ і $z \in \Gamma$ імплікує $\operatorname{Re} z \to +\infty$ ([7]) або на довільну множину $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$, де $a_k, b_k \in \mathbf{C}$, $|a_k - b_k| = \delta > 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \operatorname{Re} a_k = +\infty$ ([8]).

У класі $E(Q)$ теореми єдиності доводили при заміні в (2) $\mathbf{R}_+$ на так званий криволінійний кут Жордана (див. [9]); усі апріорні умови на послідовність Q є слабшими за (1) і пов'язані з шириною кута Жордана.

У цьому повідомленні в класі $S(\Lambda)$ доведено результат, подібний до отриманих у [9].

Нехай L – клас додатних неперервних монотонно спадних до 0 на $[0; +\infty)$ функцій. Для функцій $d \in L$ множину $E = \{z = x + iy : |y| \leqslant d(x)\}$ називатимемо Жордановою смугою, якщо функція $d(x)$ така, що для кожного достатньо малого $\varepsilon_1 > 0$ і для всіх $x \geqslant x_0$ замкнений круг $\overline{K}(x) = \{z : |z - x| \leqslant (1 - \varepsilon_1)d(x)\} \subset E$ і для кожних $c_1 > 0$ і $c_2 > 0$ функція $\exp\{c_1/d(x + c_2)\}$ опукла на $(0; +\infty)$.

Клас функцій $d \in L$, які задовольняють ці умови, позначимо L_0. Через $D(x)$ позначимо функцію, обернену до функції $\dfrac{1}{d(x)}$, де $d \in L_0$. Доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай $d \in L_0$ і $f \in S(\Lambda)$. Якщо виконуються умови*

$$q = \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} < +\infty, \quad \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t)}{t} \ln t < +\infty, \quad n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1, \tag{4}$$

$$(\forall b > 0): \ \varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{D(b \ln R)} \sum_{\lambda_n \leqslant R} \frac{1}{\lambda_n} < \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\sup\{|f(z)| : z \in E\} = C < +\infty, \tag{6}$$

то $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Доведення. Нехай $P_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{z\lambda_k}$, $n \geqslant 1$, $L(z) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} (1 - (\frac{z}{\lambda_k})^2)$ а $\psi_n(t)$ – асоційована за Борелем з цілою функцією $\dfrac{L(z)}{(z - \lambda_n)L'(\lambda_n)} (n \geqslant 1)$. Тоді за умови $n = o(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$ випливає, що для кожного $\alpha \in \mathbf{C}$ та [5, теорема 1.2.1] $1 \leqslant k \leqslant n$

$$a_k e^{\alpha\lambda_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\varepsilon} \psi_k(z) P_n(z + \alpha) dz, \tag{7}$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне.

Зауважимо, що

$$\psi_k(z) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int\limits_{0}^{\infty e^{i\varphi(t)}} \frac{L(\tau)}{\tau - \lambda_k} e^{-\tau z} d\tau, \tag{8}$$

де $\varphi_0 \in \mathbf{R}$ – довільне (див. [5,c.12]). Нехай $M(\alpha,\varepsilon,f) = \max\{|f(z)| : |z-\alpha| \leqslant \varepsilon\}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\varepsilon > 0$. Позаяк з (8) при $z = re^{i\varphi}, \varphi_0 = -\varphi, \tau = te^{-i\varphi}$ отримуємо

$$\psi_k(re^{i\varphi}) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{L(te^{-i\varphi})}{te^{-i\varphi} - \lambda_k} e^{-tr} e^{-i\varphi} dt,$$

$$\left|\frac{L(\tau)}{\tau - \lambda_k}\right| = \left|\frac{(1+\frac{\tau}{\lambda_k})}{-\lambda_k} \prod_{s=1, s\neq k}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{\tau}{\lambda_s}\right)^2\right)\right| \leqslant \frac{1+\frac{t}{\lambda_k}}{\lambda_k} \prod_{s=1,s\neq k}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{t}{\lambda_s}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{M(0,t,L)}{\lambda_k(1+(\frac{t}{\lambda_k})^2)} \left(1 + \frac{t}{\lambda_k}\right),$$

то

$$\left|\psi_k(re^{i\varphi})\right| \leqslant \frac{1}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} e^{-tr} \frac{(t+\lambda_k)}{t^2+\lambda_k^2} M(0,t,L) dt.$$

Звідси з рівності (7) для всіх $\alpha \in \mathbf{C}$ та $1 \leqslant k \leqslant n$ маємо

$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \left|\int\limits_0^{2\pi} \psi_k(\varepsilon e^{i\varphi}) P_n(\varepsilon e^{i\varphi} + \alpha) e^{i\varphi} d\varphi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,P_n)}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\varepsilon} \frac{t+\lambda_k}{t^2+\lambda_k^2} M(0,t,L) dt.$$

Зауважимо, що наведені викладки подібні до [5, с.25-26]. Якщо в останній нерівності перейти до границі при $n \to +\infty$, то для всіх $\alpha \in \mathbf{C}$ і $k \geqslant 1$ одержимо

$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,f)}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\varepsilon} \frac{t+\lambda_k}{t^2+\lambda_k^2} M(0,t,L) dt, \tag{9}$$

оскільки $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} M(\alpha,\varepsilon,P_n) \leqslant M(\alpha,\varepsilon,f)$. Враховуючи, що

$$\ln M(0,t,L) = 2t^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(x)}{x(x^2+t^2)} dx$$

та у випадку, коли $l(x)$ – додатна повільно змінна функція,

$$2t \int\limits_0^{+\infty} \frac{l(x)}{x^2+t^2} dx \leqslant (\pi + o(1)) l(t) \ (t \to +\infty)$$

за умови

$$n(x) \leqslant Bxl(x) \ (x \geqslant x_0), \ B < +\infty, \tag{10}$$

для всіх $t > 0$ одержимо
$$\ln M(0,t,L) \leqslant Atl(t),$$
де $A > 0$ деяка стала. Тому з (9) для всіх $k \geqslant 1$ за умов (10) і $l(t) \downarrow 0$ $(t \to +\infty)$ маємо
$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,f)}{|L'(\lambda_k)|} \int\limits_0^{+\infty} \exp\left\{Atl(t) - t\varepsilon\right\} dt. \tag{11}$$
Визначимо функцію $\psi(t) = Atl(t) + 2\ln t - t\varepsilon$. Зауважуючи, що при $t \to +\infty$
$$\psi'(t) = Al(t) + Atl'(t) - \varepsilon + \frac{2}{t} = Al(t)(1 + o(1)) - \varepsilon, \tag{12}$$
то у випадку, коли $l(t)$ така, що
$$\frac{tl''(t)}{l'(t)} \geqslant q > -2, \quad t^2 l'(t) \to -\infty (t \to +\infty) \tag{13}$$
для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$ функція $\psi(t)$ має єдину точку максимуму $t(\varepsilon)$, яка завдяки (12) має асимптотику
$$t(\varepsilon) = l^{-1}(\frac{\varepsilon(1+o(1))}{A}),\ \varepsilon \to +0, \tag{14}$$
де $l^{-1}(x)$ – функція обернена до $l(x)$.

З рівності $\psi'(t(\varepsilon)) = 0$, крім того, одержуємо
$$\psi(t(\varepsilon)) = 2\ln t(\varepsilon) - 2 - At^2(\varepsilon)l'(t(\varepsilon)). \tag{15}$$
Звідси та з (11) отримуємо, що при $\varepsilon \to +0$
$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant \varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,f)}{|L'(\lambda_k)|} K \exp\left\{-At^2(\varepsilon)l'(t(\varepsilon))\right\}, \tag{16}$$
де $k > 0$ – деяка стала.

Зауважимо, що у випадку $l(t) = \dfrac{1}{\ln t}$ всі умови, описані вище (у тому числі й умови (13)), виконуються. Крім того, $l^{-1}(t) = \exp\left\{\dfrac{1}{t}\right\}$ і тому з (14) маємо
$$t(\varepsilon) = \exp\left\{\frac{A}{\varepsilon}(1 + o(1))\right\}\ (\varepsilon \to +0)$$
та з (16)
$$\left|a_k e^{\alpha\lambda_k}\right| \leqslant K\varepsilon \frac{M(\alpha,\varepsilon,f)}{|L'(\lambda_k)|} \exp\left\{\exp\left\{\frac{2A}{\varepsilon}\right\}\right\}\ (\varepsilon \to +0).$$
Вибираючи тепер $\alpha = x$, $\varepsilon = (1-\varepsilon_1)d(x)$ звідси для всіх достатньо великих $x > 0$ одержуємо
$$|a_k|\, e^{x\lambda_k} \leqslant CK(1-\varepsilon_1)d(x)\frac{1}{|L'(\lambda_k)|} \exp\left\{\exp\left\{\frac{2A}{(1-\varepsilon_1)d(x)}\right\}\right\}.$$

Враховуючи, що $\ln \dfrac{1}{|L'(\lambda_k)|} \leqslant \overline{q}\lambda_k$, $\overline{q} = q + r$, $r > 0$ – довільне, звідси для $k \geqslant k_0$ одержимо при $x \to +\infty$

$$\mu(x - \overline{q}, f) \leqslant CK(1 - \varepsilon_1)d(x) \exp\left\{\exp\left\{\frac{2A}{(1-\varepsilon_1)d(x)}\right\}\right\},$$

де $\mu(x, f) = \max\left\{|a_k| e^{x\lambda_k} : k \geqslant k_0\right\}$ максимальний член ряду $f \in S(\Lambda)$. Звідси при $x \to +\infty$

$$\ln \mu(x, f) \leqslant C_1 + \ln d(x + \overline{q}) + \exp\left\{\frac{2A}{(1-\varepsilon_1)d(x+\overline{q})}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{4A}{(1-\varepsilon_1)d(x+\overline{q})}\right\} = \exp\left\{\frac{4A}{1-\varepsilon_1} D^{-1}(x + \overline{q})\right\} \overset{def}{=} \Phi(x). \qquad (17)$$

Застосуємо такий результат з [6].

Якщо $f \in S(\Lambda)$, $\Phi_0(x)$ – додатна зростаюча до $+\infty$ опукла на $(-\infty, +\infty)$ функція і

$$\ln \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{x\lambda_n} \leqslant \Phi_0(x) \ (x \geqslant x_0), \qquad (18)$$

$$\sup\left\{|f(x)| : x \in R\right\} < +\infty,$$

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \sum_{\lambda_n \leqslant \Phi_0(R)} \frac{1}{\lambda_n} < \frac{1}{2}, \qquad (19)$$

то $f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Зауважимо, оскільки ([11]) $\ln \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{x\lambda_n} = (1 + o(1)) \ln \mu(x, f)$ при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченої міри, як тільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\lambda_n} < +\infty$, то з (17) одержуємо, що умова (18) виконується з функцією $\Phi_0(x) = \Phi(x + 1)$.

Крім того, беручи до уваги, що при $x = \exp\left\{\dfrac{4A}{1-\varepsilon_1} D^{-1}(R + \overline{q} + 1)\right\}$ і $R \to +\infty$

$$\frac{1}{R} \sum_{\lambda \leqslant \Phi_0(R)} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{(1 + o(1))}{D(\frac{1-\varepsilon_1}{4A} \ln x)} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n}$$

з умови (5) одержуємо, що виконується умова (19). Застосування сформульованого результату з [6] завершує доведення теореми.

---

1. *Macintyre A.J.* Asymptotic path of integral function with gap power series // Proc. London Math. Soc. – 1952. – Vol.2. – N 3. – P.286-298.
2. *Евграфов М.А.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле // Успехи матем. наук. – 1962. – Т.17. – N 3. – С.169-175.
3. *Гашимов Г.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле // Док. АН СССР. – 1963. – Т.150. – N 4. – С.722-725.

4. *Гашимов Г.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле для случая более общего поведения показателей // Док. АН СССР. – 1963. – Т.153. – N 3. – С.510-511.

5. *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – М., 1980.

6. *Шеремета М.Н.* Теоремы единственности для целых рядов Дирихле // Изв. вузов. Матем. – 1987. – N 7. – С.64-72.

7. *Гайсин А.М.* Теорема единственности для рядов Дирихле // Матем. заметки. – 1991. – Т.50. – N 2. – С.54-60.

8. *Фрьнтов А.Е.* Об одной теореме единственности для рядов Дирихле с лакунами Фейера // Теория функций, функциональный анализ и их прил. – 1993. – Вып. 57. – С.128-131.

9. *Мартиросян В. А.* О целых функциях, представимых лакунарными степенными рядами // Изв. АН Арм. ССР. – 1986. – Т.21. – N 3. – С.280-300

10. *Гайсин А.М.* Оценка ряда Дирихле с лакунами Фейера на кривых // Докл. РАН. – 2000. – Т.370. – N 6. – С.735-737.

11. *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию //Матем. заметки. – 1985. – Т.37. – N 1. – С.41-47.

UNIQUENESS THEOREMS FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES ON THE JORDAN STRIPS

Oleh Pikh

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

We establish conditions on exponents $\lambda = (\lambda_n)$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ of an entire Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, under which boundedness of the series on the set $E = \{z = x + iy : |y| \leqslant d(x)\}$, where $d(x) : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ is a continuous function approaching to 0 as $x \to +\infty$, implies $F(z) = \text{const}$.

Key words: Dirichlet series, uniqueness theorem, entire functions.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.115–121 *Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.115–121*

УДК 517.576

ПРО ВЕЛИЧИНУ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ В АСИМПТОТИЧНІЙ РІВНОСТІ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ТА СУМИ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ ШВИДКОГО ЗРОСТАННЯ

Тетяна САЛО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для цілих рядів Діріхле вигляду $F(z) = \sum_{n=0}^{+\|} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\| \ (n \to +\|)$, визначено умови, виконання яких забезпечує правильність співвідношення

$$\sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\} = (1 + o(1)) \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

при $\sigma \to +\|$ зовні деякої множини E, $dE = \varliminf_{\sigma \to +\|} h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\|)) = 0$, де $h(\sigma)$ – додатна неперервна зростаюча до $+\|$ на $[0, +\|)$ функція.

Ключові слова: цілий ряд Діріхле, виняткова множина.

1°. Нехай $H(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

$\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \uparrow +\infty)$. Для $F \in H(\Lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1), $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій, а L_1 – клас функцій $h \in L$ таких, що $h(x + O(1)) = O(h(x))$ $(x \to +\infty)$. Через L_φ, для $\varphi \in L$, позначимо клас функцій $h \in L$ таких, що $\frac{h(\varphi(t))}{t} \ln t \to 0$ $(t \to +\infty)$. Всюди далі $\varphi(t)$ – функція обернена до функції $\Phi(t) \in L$.

Для локально вимірної за Лебегом множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри $\mathrm{meas}E < +\infty$ її верхньою $D_h(E)$ і нижньою $d_h(E)$ щільностями називаємо відповідно величини $D_h(E) = \varlimsup_{R \to +\infty} h(R)\mathrm{meas}(E \cap [R, +\infty))$, $d_h(E) = \varliminf_{R \to +\infty} h(R)\mathrm{meas}(E \cap [R, +\infty))$, де $h \in L$.

Для $\Phi \in L$ визначимо такі класи цілих рядів Діріхле:

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \varliminf_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi_1(\sigma)} > 0\},$$

$$\bar{H}(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi_1(\sigma)} > 0\},$$

де $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$.

У випадку, коли $\Phi \in L$, $h \in L_\varphi$, $F \in H(\Lambda, \Phi)$, в [1] доведено, що умова

$$(\forall b > 0): \lim_{\sigma\to+\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{2}$$

забезпечує правильність співвідношення

$$F(\sigma + iy) = (1 + o(1))a_{\nu(\sigma)}e^{(\sigma+iy)\lambda_{\nu(\sigma)}} \tag{3}$$

при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, D_h(E) = 0)$, рівномірно по $y \in \mathbb{R}$, а в [2] доведено, що умова

$$(\forall b > 0): \varliminf_{\sigma\to+\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0, \tag{4}$$

забезпечує правильність цього ж співвідношення при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, d_h(E) = 0)$. Як умова (3) (див. [1,3]), так і (4) (див. [2]) є необхідними для того, щоб відповідні твердження були правильними для кожної функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$.

У цій статті доведемо подібне твердження в класі $\bar{H}(\Lambda, \Phi)$. Правильною є така теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in L$ і $h \in (L_\varphi \cap L_1)$. Якщо $F \in \bar{H}(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова (2), то співвідношення (3) справджується при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, d_h(E) = 0)$ рівномірно за $y \in \mathbb{R}$.*

2.° *Допоміжні твердження.* Позначимо через L_0 – клас додатних неспадних на $[0, +\infty)$ функцій $V(t)$ таких, що $A \stackrel{def}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} < +\infty$.

Теорема 2. *Нехай $V \in L_0$, $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in \bar{H}(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0): \lim_{n\to+\infty} h\left(\varphi(b\lambda_n)\right) \int\limits_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0, \tag{5}$$

то для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, $d_h E = 0$ правильна нерівність

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp\left\{-\int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dV(t)\right\}, \tag{6}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$ і φ – функція обернена до Φ.

Доведення. Міркуємо подібно як і в [1,4]. Нехай $\alpha(t) = \int\limits_0^t \frac{dV(x)}{x}$, $\tau_n = \alpha(\lambda_n)$, $\alpha_n = \exp\left\{-\int\limits_0^{\lambda_n} \alpha(t)dt\right\}$. Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z\lambda_n}.$$

Оскільки $\frac{|a_n|}{\alpha_n}e^{\sigma\lambda_n} \leqslant |a_n| \exp\{(\sigma + \alpha(\lambda_n))\lambda_n\} \leqslant |a_n| \exp\{(\sigma + A)\lambda_n\}$, то $f \in H(\Lambda)$.

За умовою $F \in \bar{H}(\Lambda,\Phi)$ маємо $\exists K > 0, \exists \sigma_j \uparrow +\infty (j \to +\infty)$ такі, що $K\sigma_j\Phi(\sigma_j) \leqslant \ln\mu(\sigma_j, F)$. Зауважимо, що $\ln\mu(\sigma,f) = \max\{\ln|a_n| - \ln\alpha_n + \sigma\lambda_n\} = \max\{\ln|a_n| + \int\limits_0^{\lambda_n}\alpha(t)dt + \sigma\lambda_n\} \geqslant \ln\mu(\sigma,F)$, отже, $f \in \bar{H}(\Lambda,\Phi)$ і $K\sigma_j\Phi(\sigma_j) \leqslant \ln\mu(\sigma_j,f) (j \geqslant 0)$. Оскільки $\ln\mu(\sigma,f) = \ln\mu(0,f) + \int\limits_0^{\sigma}\lambda_{\nu(t,f)}dt \leqslant 2\sigma\lambda_{\nu(\sigma-0,f)}$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$, то

$$\sigma_j \leqslant \varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma_j-0,f)}\right) \ \ (j \geqslant j_0), \tag{7}$$

де $\varphi(t)$ – функція обернена до $\Phi(t)$.

Нехай (R_j) – послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma,f)$ занумерована так, що $\nu(\sigma,f) = j$ при $R_j \leqslant \sigma < R_{j+1}$ і, якщо $\nu(R_{j+1},f) = j+p$, то $R_{j+1} = R_{j+2} = \cdots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$. Якщо $(\sigma-\tau_j) \in [R_j, R_{j+1})$, то за означенням $\mu(\sigma,f)$

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n}e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_n} \leqslant \frac{|a_j|}{\alpha_j}e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_j} \quad (n \geqslant 0)$$

і тому при $\sigma \in [R_j+\tau_j, R_{j+1}+\tau_j)$ і $n \neq j$

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j|e^{\sigma\lambda_j}} \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_j}e^{\tau_j(\lambda_n-\lambda_j)} = \exp\left\{-\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n}(\alpha(t)-\alpha(\lambda_j))dt\right\} < 1.$$

Отже, для $\sigma \in [R_j+\tau_j, R_{j+1}+\tau_j)$ маємо $\nu(\sigma,F) = j$. Оскільки $\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n}(\alpha(t)-\alpha(\lambda_j))dt = \int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n-t}{t}dV(t)$, то нерівність (6) виконується для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in E_1 \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}[R_j + \tau_j, R_{j+1}+\tau_j)$.

Позначимо $E = [R_1+\tau_1; +\infty) \setminus E_1$. Тоді для $\sigma \in [R_j+\tau_j, R_{j+1}+\tau_j)$ маємо

$$\begin{aligned}&\operatorname{meas}(E\cap[\sigma,+\infty)) = \operatorname{meas}(E\cap[R_{j+1}+\tau_j,+\infty)) = \\ &= \sum_{k=j}^{+\infty}(\tau_{k+1}-\tau_k) = \int\limits_{\lambda_j}^{+\infty}\frac{dV(t)}{t}.\end{aligned} \tag{8}$$

Розглянемо послідовність $\{\sigma_j^*\}$ таку, що $\sigma_j^* = \sigma_j + \tau_{n_j}$, де $\{\sigma_j\}$ – послідовність згадувана вище (див. нерівність (7)), а номер n_j – номер проміжку $[R_n, R_{n+1})$ до якого належить σ_j. Тоді $\sigma_j^* \in [R_{n_j}+\tau_{n_j}, R_{n_j+1}+\tau_{n_j})$, тобто $\nu(\sigma_j^*,F) = n_j$. Враховуючи нерівність (7), отримуємо

$$\begin{aligned}h(\sigma_j^*) = h(\sigma_j+\tau_{n_j}) &\leqslant h\left(\varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma_j-0,f)}\right) + \int\limits_0^{\lambda_{n_j}}\frac{dV(x)}{x}\right) \leqslant \\ &\leqslant h\left(\varphi\left(\frac{2\lambda_{n_j}}{K}\right) + A\right),\end{aligned}$$

оскільки $\nu(\sigma-0,f) \leqslant j$ при $\sigma \in [R_j, R_{j+1})$.

Враховуючи (8) та умови теореми, а саме $h \in L_1$ і (5) отримуємо $h(\sigma_j^*)\mathrm{meas}(E\cap [\sigma_j^*, +\infty)) = o(1)$ $(j \to +\infty)$, тобто $d_h E = 0$ і теорему 2 доведено.

Наслідок 1. Нехай $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in \bar{H}$ і виконується умова

$$(\forall b > 0) : h(\varphi(bx)) \int\limits_x^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt \to 0 \ (x \to +\infty), \tag{9}$$

то існує функція $C(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ така, що для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, $d_h E = 0$ правильна нерівність

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp \left\{ - \int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} C(t) \ln n(4t) dt \right\}, \tag{10}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$, $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n).

Доведення наслідку 1. Доведення цього наслідку практично нічим не відрізняється від доведення наслідку 1 з теореми 3 в [1] і грунтується лише на теоремі 2.

Наслідок 2. Якщо $\Phi \in L$, $h \in L_1$ і виконуються умови наслідку 1, то

$$\Sigma_1 \overset{def}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{\lambda_n \leqslant \frac{1}{3}\lambda_\nu} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} = o(1)$$

при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E, d_h E = 0)$, де $\nu = \nu(\sigma, F)$.

Доведення наслідку 2. Доведення цього наслідку є дослівним повторенням доведення наслідку 3 з теореми 3 в [1], тому ми його не наводимо.

3°. *Доведення теореми 1.* Визначимо

$$q(k) = n\left(\frac{\lambda_k}{3}\right) \ (k \geqslant 0),$$

$$\delta_k = \max\{\delta(l, j) : q(k) \leqslant l \leqslant k \leqslant j < +\infty\},$$

$$\delta(l, j) = (j - l + 1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1}.$$

Як і в [5] показуємо, що

$$\sum_{k \geqslant n} \delta_k \leqslant C \sum_{k \geqslant q(n)} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \quad (n \geqslant 0),$$

де $C > 0$ - деяка стала.За умовою (2) при $b = \frac{1}{6}$ маємо

$$\sum_{k \geqslant q(n)} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \leqslant \sum_{\lambda_k > \frac{1}{3}\lambda_n} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = o\left(\frac{1}{h(\varphi(2\lambda_n))}\right) \quad (n \to +\infty).$$

Тому

$$h(\varphi(2\lambda_n)) \sum_{k \geqslant n} \delta_k = o(1) \quad (n \to +\infty). \tag{11}$$

Визначимо
$$C_k = (\max\{h(\varphi(2\lambda_n)) \sum_{k\geqslant n} \delta_k : k \leqslant n\})^{-\frac{1}{2}}.$$

Тоді $C_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ і, отже, завдяки (11) як і в [1] доводимо, що
$$h(\varphi(2\lambda_n)) \sum_{k\geqslant n} C_k\delta_k = o(1) \quad (n \to +\infty). \tag{12}$$

Зазначимо, що міркуючи подібно як і в [1] (див. також [5]), доводимо, що з того, що рівності
$$\nu(\sigma + \varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma), \quad \nu(\sigma - \varepsilon_{\nu(\sigma)}) = \nu(\sigma), \tag{13}$$
де $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F)$, $\varepsilon_k = C_k\delta_k$, виконуються для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2$ випливає, що при $\nu = \nu(\sigma, F)$
$$\Sigma_2 \stackrel{def}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{n\geqslant q_1(\nu), n\neq\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} = o(1) \tag{14}$$
при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2)$.

Справді, за означенням $\mu(\sigma, F)$ з рівностей (13) при $\sigma \notin E_2$ отримуємо
$$|a_n| e^{(\sigma\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)})\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma \pm \varepsilon_{\nu(\sigma)}, F) = e^{\pm\varepsilon_{\nu(\sigma)}\lambda_{\nu(\sigma)}} \mu(\sigma, F),$$
звідки, вибираючи знаки "$\pm$" у відповідний спосіб, маємо
$$|a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp\{-|\lambda_n - \lambda_{\nu(\sigma)}|\varepsilon_{\nu(\sigma)}\},$$
тобто
$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{n\geqslant q_1(\nu), n\neq\nu} \exp\{-|\lambda_n - \lambda_{\nu(\sigma)}|\varepsilon_{\nu(\sigma)}\}. \tag{15}$$

Позаяк $\sum\limits_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \sum\limits_{m=l}^{j} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \geqslant (j - l + 1)^2$, то при $n \geqslant \nu + 1$, $l = \nu$ та $j = n - 1$ одержуємо
$$\delta_\nu \geqslant \delta(\nu, n-1) = (n-\nu)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=\nu}^{n-1} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \geqslant \frac{(n-\nu)^{\frac{1}{2}}}{\lambda_n - \lambda_\nu}, \tag{16}$$
а при $q_1(\nu) \leqslant n \leqslant \nu - 1$, $l = n$ та $j = \nu - 1$ отримуємо
$$\delta_\nu \geqslant \delta(n, \nu) \geqslant (\nu - n + 1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=n}^{\nu} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant (\nu - n + 1)^{-\frac{3}{2}} \sum_{m=n}^{\nu-1} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant (\nu - n + 1)^{-\frac{3}{2}} \frac{(\nu - n)^2}{(\lambda_\nu - \lambda_n)} \geqslant \frac{1}{3} \frac{(\nu - n)^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_\nu - \lambda_n)}. \tag{17}$$

Отже, застосовуючи (16) і (17) до нерівності (15), одержуємо, що співвідношення (14) є правильним при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E_2)$.

Далі міркуючи, як і в [1,2,5], отримуємо, що рівності (13) виконуються для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E_2$, де $E_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} E_{(n)}$, $E_{(n)} = [\sigma_n, \sigma_n + \varepsilon_n) \cup [\sigma_{n+1} - \varepsilon_n, \sigma_{n+1})$.

З умови $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} < +\infty$ отримуємо за допомогою нерівності Коші-Буняковського, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k} \geqslant \frac{n^2}{\lambda_n},$$

тому

$$\int\limits_x^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt = O\left(\frac{\ln x}{x}\right) \quad (x \to +\infty).$$

Враховуючи $h \in L_\varphi$, отримуємо, що виконуються умови наслідку 2. Застосовуючи наслідок 2 і нерівність (14), при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E_1 \overset{def}{=} E \cup E_2$, E – множина з наслідку 2) одержуємо

$$\sum_{n \neq \nu(\sigma)} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F)\,(\Sigma_1 + \Sigma_2) = o(\mu(\sigma, F)).$$

Тому

$$R_\nu(\sigma + iy) \overset{def}{=} \sum_{n \neq \nu(\sigma)} a_n e^{(\sigma+iy)\lambda_n} = o(\mu(\sigma, F))$$

при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E_1$) рівномірно по $y \in \mathbb{R}$.

Треба довести, що $d_h E_1 = 0$. Зауважимо, що для множини E з наслідку за доведенням теореми 2 $\text{meas}(E \cap [\sigma_j^*, +\infty)) = o(\frac{1}{h(\sigma_j^*)})$ $(j \to +\infty)$, де (σ_j^*) – послідовність визначена у доведенні теореми 2. При цьому $h(\sigma_j^*) \leqslant h(\varphi(\frac{2}{K}\lambda_{n_j}) + A)$ та $\nu(\sigma_j^*, F) = n_j$. Позаяк $\sigma_j^* \in [\sigma_{n_j}, \sigma_{n_j+1})$, то

$$h(\sigma_j^*)\text{meas}(E_2 \cap [\sigma_j^*, +\infty)) \leqslant 2h\left(\varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_{n_j}\right) + A\right) \sum_{k=n_j}^{+\infty} \varepsilon_k.$$

Враховуючи умову $h \in L_1$ і співвідношення (12), отримуємо $\text{meas}(E_1 \cap [\sigma_j^*, +\infty)) \leqslant \text{meas}(E \cap [\sigma_j^*, +\infty)) + \text{meas}(E_2 \cap [\sigma_j^*, +\infty)) = o(\frac{1}{h(\sigma_j^*)})$ $(j \to +\infty)$. Тобто, $d_h(E_1) = 0$ і теорему 1 доведено.

---

1. *Скасків О.Б.,Сало Т.М.* Цілі ряди Діріхле швидкого зростання і нові оцінки міри виняткових множин в теоремах типу Вімана-Валірона //Укр. мат. журн. – 2001. – (в друці)
2. *Сало Т.М.* Про виняткову множину в асимптотичній рівності суми і максимального члена цілого ряду Діріхле швидкого зростання //Матем. студії. – 2001. – Т.15. – N 1. – С.57-64.
3. *Сало Т.М.,Скасків О.Б.* Про виняткові множини у теоремах типу Вімана-Валірона //Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип.56. – С.176-178.
4. *Сало Т.М.,Скасків О.Б.* Оцінки міри виняткової множини у теорії Вімана-Валірона //Вісн. Львів. ун-ту. – Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.171-174.
5. *Скаскив О.Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции //Изв. АН СССР, сер. матем. – 1989. – Т.53. – N 4. – С.833-850.

ON THE VALUE OF EXCEPTIONAL SET IN ASYMPTOTIC EQUALITY BETWEEN MAXIMAL TERM AND THE SUM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES OF RAPID GROWTH

Tetyana Salo

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

This paper contains an investigation of conditions which an entire function $F(z)$ represented by a Dirichlet series $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, satisfies the relation

$$\sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\} = (1 + o(1)) \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

as $\sigma \to +\infty$ outside some set E with $DE = \varliminf_{\sigma \to +\infty} h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, where $h(\sigma)$ is nonnegative continuous increasing to $+\infty$ function on $[0, +\infty)$.

Key words: entire Dirichlet series, exceptional set.

Стаття надійшла до редколегії 26.04.2001
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.122–129

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.122–129

УДК 517.57

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ ЗРОСТАННЯ НА ПІВОСІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З КОМПЛЕКСНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Олег СКАСКІВ, Василь СОРОКІВСЬКИЙ, Олександр ШАПОВАЛОВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна
Львівська комерційна академія
вул. Туган-Барановського, 12, Львів, Україна
Дрогобицький державний педагогічний університет
вул. Стрийська, 3, м.Дрогобич, Львівська обл., Україна

Для рядів Діріхле з комплексними показниками визначено різні співвідношення між узагальненими порядками зростання на півосі та у півплощині.

Ключові слова: ряд Діріхле, узагальнені порядки зростання.

Нехай f – аналітична у півплощині $\mathbb{C}_- = \{z\colon Re z < 0\}$ функція, представлена абсолютно збіжним в $\mathbb{C}_-$ рядом Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n), \tag{1}$$

де $\{\lambda_n\colon n \geqslant 1\} \subset \mathbb{C}_+ = \{z\colon Re z > 0\}$ і $Re\lambda_{n+1} \geqslant Re\lambda_n$ $(n \geqslant 1)$. Клас таких функцій, показники яких задовольняють умови

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} < +\infty,\ |\arg\lambda_n| \leqslant \alpha_0 < \frac{\pi}{2},\ \lambda_n \neq \lambda_k\ (n \neq k), \tag{2}$$

позначимо $S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, де $\lambda = (\lambda_n)$. У випадку, коли $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ вживатимемо позначення $S(\lambda) \equiv S_{\mathbb{C}}(\lambda)$.

Через L позначимо клас неперервних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[a, +\infty)$, $a > -\infty$, функцій, через L_1 – клас повільно зростаючих функцій h, тобто таких, що $h \in L$ і $h(cx) \sim h(x)$, а через L_0 – клас функцій $h \in L$ таких, що

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{h(ct)}{h(t)} = q_1(c) \to 1\ (c \to 1),\quad \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{h^{-1}(\varepsilon t)}{h^{-1}(t)} = q_2(\varepsilon) \to 0\ (\varepsilon \to 0),$$

де $h^{-1}(t)$ – обернена функція до функції $h(x)$. Легко бачити, що у випадку, коли h неперервно диференційовна, то $h \in L_0$, як тільки $th'(t) = O(h(t))$ $(t \to +\infty)$. Крім того, $L_1 \subset L_0$.

Якщо $\alpha \in L$ і $\beta \in L$, а $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, то узагальненими порядками зростання F у півплощині $\mathbb{C}_-$ і на промені називаємо відповідно величини

$$\rho_{\alpha\beta} = \varlimsup_{\sigma\to -0} \frac{\alpha(\ln \mathfrak{M}(\sigma, F))}{\beta(\frac{1}{|\sigma|})}, \quad \rho^{\circ}_{\alpha\beta} = \varlimsup_{\sigma\to -0} \frac{\alpha(\ln^+ |F(\sigma)|)}{\beta(\frac{1}{|\sigma|})},$$

де $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma Re\lambda_n)$.

Зауважимо, що у випадку класу $S(\lambda)$ введена тут величина $\rho_{\alpha\beta}$ дещо відрізняється від узагальненого порядку, введеного в [1] за допомогою $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)|: y \in \mathbb{R}\}$, $\sigma < 0$ замість $\mathfrak{M}(\sigma, F)$. У випадку класу $S(\lambda)$ у доведеннях стандартно за допомогою нерівності $M(\sigma, F) \leqslant \mathfrak{M}(\sigma, F)$ переходять до оцінок $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ замість $M(\sigma, F)$, то природно, крім характеристик зростання розглянутих в [1], розглядати також узагальнені порядки, введені тут. Для точності варто зазначити, що за умов, які розглядають у цьому повідомленні (у випадку класу $S(\lambda)$), $\rho_{\alpha\beta}$ дорівнюватиме узагальненому порядку, введеному в [1] за допомогою $M(\sigma, F)$.

Мета праці – довести таку теорему. Вона є повним аналогом теорем 2, 4 [2], доведених у випадку класу $S(\lambda)$.

Нехай $\Phi(x; c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $\Phi^{-1}(x; c) = \alpha^{-1}(c\beta(x))$, де α^{-1}, β^{-1} – обернені функції відповідно до функцій α і β.

Теорема 1. *Нехай функції α і β задовольняють одну з двох таких груп умов*

1) $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ і для кожного $c \in (0; +\infty)$

$$\frac{\Phi(x : c)}{x} \downarrow 0 \ (x \to +\infty), \tag{3}$$

$$\alpha\left(\frac{x}{\Phi(x : c)}\right) \sim \alpha(x) \ (x \to +\infty), \tag{4}$$

$$\frac{\Phi(x)}{x} \ln x \to 0 \ (x \to +\infty); \tag{5}$$

2) $\alpha \in L_0$, $\beta \in L_1$ і для кожного $c \in (0; +\infty)$

$$\frac{\Phi^{-1}(x : c)}{x} \downarrow 0 \ (x \to +\infty), \tag{6}$$

$$\beta\left(\frac{x}{\Phi^{-1}(x : c)}\right) \sim \beta(x) \ (x \to +\infty), \tag{7}$$

$$\frac{\ln x}{\Phi^{-1}(x : c)} \to 0 \ (x \to +\infty). \tag{8}$$

Тоді, якщо $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, а у випадку 1)

$$\Delta_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta(Re\lambda_n / -\ln |B'(\lambda_n)|)} = 0$$

і у випадку 2)

$$\widetilde{\Delta}_{\alpha\beta} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(-\ln |B'(\lambda_n)|)}{\beta(Re\lambda_n)} = 0,$$

то $\rho_{\alpha\beta} = \rho^0_{\alpha\beta}$, де $B(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{\lambda}_n}{\lambda_n} \cdot \frac{(\lambda_n - z)}{(\overline{\lambda}_n - z)}$.

Для доведення нам будуть потрібні такі твердження.

Лема 1 (лема 1 [3], див. також [4]). *Якщо $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$, то для всіх $\sigma \in (-\infty; 0)$*

$$|a_n| \exp(\sigma Re\lambda_n) \leqslant (2Re\lambda_n)^{-1/2} |B'(\lambda_n)|^{-1} \left(\int_{-\infty}^{\sigma} |F(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Лема 2 (леми 2,4 [2]). *Нехай $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і*

$$k_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(\lambda_n)}{\beta(\lambda_n/\ln^+|a_n|)}, \quad \tilde{k}_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha(\ln^+|a_n|)}{\beta(\lambda_n)}.$$

Якщо: 1) $\alpha \in L$, $\beta \in L_0$, виконуються умови (3) і для кожного $c \in (0, +\infty)$

$$\frac{1}{\lambda_n} \Phi(\lambda_n; c) \ln n \to 0 \ (n \to +\infty),$$

або 2) $\alpha \in L_0$, $\beta \in L$ виконуються умови (6), (7) і для кожного $c \in (0, +\infty)$

$$\frac{\ln n}{\Phi^{-1}(\lambda_n; c)} \to 0 \ (n \to +\infty),$$

то для кожної функції F вигляду (1) у випадку 1) $\rho_{\alpha\beta} \leqslant k_{\alpha\beta}$ і $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \tilde{k}_{\alpha\beta}$ у випадку 2).

Зауважимо, що в [2] лема 2 доведена для узагальнених порядків, введених за допомогою $M(\sigma, F)$. Проте скрізь у доведеннях [2], насправді, використовують лише нерівність $M(\sigma, F) \leqslant \mathfrak{M}(\sigma, F)$ і оцінки $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ зверху, тому можна вважати, що лему 2 доведено в [2] (див. леми 2 і 4).

Доведення теореми. Очевидно, що $|F(\sigma)| \leqslant \mathfrak{M}(\sigma, F)$ $(\sigma < 0)$. Тому $\rho^0_{\alpha\beta} \leqslant \rho_{\alpha\beta}$ і достатньо довести лише, що $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$ у випадку, коли $\rho^0_{\alpha\beta} < +\infty$. За означенням величини $\rho^0_{\alpha\beta}$ маємо, що

$$|F(\sigma)| < \exp\left\{ \alpha^{-1} \left(\rho\beta \left(\frac{1}{|\sigma|} \right) \right) \right\}, \quad \sigma_0 \leqslant \sigma < 0 \tag{9}$$

для $\rho = \rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – довільне, $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$. За означенням $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ для кожного $\Delta > 0$ отримуємо

$$-\ln|B'(\lambda_n)| \leqslant Re\lambda_n / \beta^{-1} \left(\frac{1}{\Delta} \alpha(Re\lambda_n) \right). \quad (n \geqslant n_0(\Delta)) \tag{10}$$

Якщо у випадку 1) вибрати $\frac{1}{|\sigma|} = \Phi(\varepsilon Re\lambda_n / \Phi(Re\lambda_n; \frac{1}{\rho}); \frac{1}{\rho})$, то, використовуючи нерівності (9) і (10), за допомогою леми 1. при $n \geqslant n_1$ (подібно як і в [2]) послідовно отримуємо

$$\ln^+|a_n| \leqslant -\ln|B'(\lambda_n)| + \frac{1}{2}\ln\left(\int_{-\infty}^{\sigma_0}|F(t)|^2dt + \int_{\sigma_0}^{\sigma}|F(t)|^2dt\right)^{1/2} + |\sigma|Re\lambda_n \leqslant$$

$$\leqslant Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\Delta}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(A_1 + \exp\left\{2\alpha^{-1}\left(\rho\beta\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)\right)\right\}\right) + Re\lambda_n|\sigma| \leqslant$$

$$\leqslant A_2 + Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\Delta}\right) + \alpha^{-1}\left(\rho\beta\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)\right) + Re\lambda_n|\sigma| =$$

$$= A_2 + Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\Delta}\right) + \varepsilon Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\rho}\right) +$$

$$+ Re\lambda_n/\Phi\left(\varepsilon Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right), \quad (11)$$

де $A_1, A_2 > 0$ – абсолютні сталі.

Зауважимо тепер, що за умовою $\beta \in L_0$. З

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\beta^{-1}(\varepsilon t)}{\beta^{-1}(t)} = q_2(\varepsilon) \to 0 \quad (\varepsilon \to +0)$$

випливає, що

$$\Phi\left(\varepsilon x/\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right) = o\left(\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right)\right) \ (x\to+\infty). \quad (12)$$

Крім того, за умовою (4) та $\alpha \in L_1$ одержуємо

$$\Phi\left(\varepsilon x/\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right) = \beta^{-1}\left(\frac{1}{\rho}\alpha\left(\varepsilon x/\Phi\left(x;\frac{1}{\rho}\right)\right)\right) =$$

$$= \beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(x)\right) \leqslant \left(q_2\left(\frac{\Delta}{q}\right) + \varepsilon_1\right)\Phi\left(x;\frac{1}{\Delta}\right)$$

при $x \to +\infty$, де $\varepsilon_1 > 0$ довільне.

Звідси, а також з (12) і (11) при $n \to +\infty$ отримуємо

$$\frac{\ln^+|a_n|}{Re\lambda_n} \leqslant \left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1\right)\Phi\left(\varepsilon Re\lambda_n/\Phi\left(Re\lambda_n;\frac{1}{\rho}\right);\frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= \left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1\right)/\beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(Re\lambda_n)\right);$$

ми знову використали умови (4) та $\alpha \in L_1$. Звідси, при $n \to +\infty$ маємо

$$\beta\left(\frac{Re\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right) \geqslant \beta\left(\beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(Re\lambda_n)\right)\right)/(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1),$$

тобто при $x = \beta^{-1}\left(\frac{1+o(1)}{\rho}\alpha(Re\lambda_n)\right)/\left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1\right)$

$$\alpha(Re\lambda_n)/\beta\left(\frac{Re\lambda_n}{\ln^+|a_n|}\right) \leqslant \frac{\beta(x(1+q_2(\frac{\Delta}{\rho})+\varepsilon_1))}{\beta(x)}(\rho + o(1)) \leqslant$$

$$\leqslant q_1(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + \varepsilon_1)(\rho + o(1)).$$

Звідси $k_{\alpha\beta} \leqslant q_1(1 + q_2(\Delta/\rho) + \varepsilon_1)(\rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon)$. Оскільки $q_2(\Delta/\rho) \to 0$ $(\Delta \to +0)$, то спрямовуючи в останній нерівності $\varepsilon_1 \to +0$, $\Delta \to +0$, $\varepsilon \to +0$ остаточно отримуємо $k_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$. Залишається застосувати до функції $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ лему 2. Останнє є можливим. Щоб у цьому переконатися, достатньо зауважити, що з умов (2) випливає $n = o(Re\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$. Тому за умовою (5) одержуємо

$$\frac{\Phi(Re\lambda_n; c)}{Re\lambda_n} \ln n = \frac{\Phi(Re\lambda_n; c)}{Re\lambda_n} \ln Re\lambda_n \frac{\ln n}{\ln(Re\lambda_n)} = o(1)\ (n \to +\infty).$$

Отже, завершується доведення першої частини теореми застосуванням леми 2.

Друга частина теореми доводиться подібно, тільки замість нерівності (11), вибираючи $1/|\sigma| = Re\lambda_n$, отримуємо нерівність

$$\ln^+ |a_n| < \alpha^{-1}(\Delta\beta(\lambda_n)) + \alpha^{-1}(\rho\beta(\lambda_n)) + A_3,$$

де $\rho = \rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ і $\Delta > 0$ – довільні, A_3 – абсолютна стала. Залишається, скориставшись умовою $\alpha \in L_0$, спочатку записати $\alpha^{-1}(\Delta x) \leqslant (q_2(\Delta/\rho) + o(1))\alpha^{-1}(\rho x)$ $(x \to +\infty)$, а потім при $x = \alpha^{-1}(\rho\beta(Re\lambda_n)) \to +\infty$

$$\frac{\alpha(\ln^+ |a_n|)}{\beta(Re\lambda_n)} \leqslant \rho\alpha((1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + o(1))x)/\alpha(x) \leqslant \rho q_1(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) + o(1)).$$

Звідси $\tilde{k}_{\alpha\beta} \leqslant (\rho^0_{\alpha\beta} + \varepsilon)q_1\left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)\right)$. Залишилось спрямувати $\Delta \to +0$, $\varepsilon \to +0$ і скористатися тим, що $q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right) \to 0$, а тому $q_1\left(1 + q_2\left(\frac{\Delta}{\rho}\right)\right) \to 1$. Отже, $\tilde{k}_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$. Завершується доведення другої частини теореми застосуванням леми 2 до функції $\mathfrak{M}(\sigma, F)$. Оскільки, як і вище, $n = o(Re\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$, то за умовою (8)

$$\frac{\ln n}{\Phi^{-1}(Re\lambda_n; c)} = \frac{\ln(Re\lambda_n)}{\Phi^{-1}(Re\lambda_n; c)} \cdot \frac{\ln n}{\ln(Re\lambda_n)} = o(1)\ (n \to +\infty).$$

Отже, за лемою 2 $\rho_{\alpha\beta} \leqslant \tilde{k}_{\alpha\beta} \leqslant \rho^0_{\alpha\beta}$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що наведене доведення теореми є практично повним повторенням доведення теорем 2 і 4 [2], виявлених у класі $S(\lambda)$ з поправкою на застосування дещо іншого варіанта оцінки коефіцієнтів ряду з $S(\lambda)$, ніж у сформульованій тут лемі 1.

Зазначимо, що теорему 1 у випадку $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$ доведено в [3]. Доведено дещо загальніше твердження за те, що випливає з теореми 1. Крім того, зроблено спробу визначити необхідність умови $\Delta_{\alpha\beta} = 0$ (у випадку $\alpha(x) = \ln x$, $\beta(x) = x$) для правильності рівності $\rho_{\alpha\beta} = \rho^0_{\alpha\beta}$. Стверджується, що ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(z\lambda_n)}{(1 + \lambda_n)^2} B'(\lambda_n) \qquad (13)$$

є абсолютно збіжним і обмеженим на промені $\{z = \sigma : \sigma < 0\}$, як тільки

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\ln Re\lambda_n}{Re\lambda_n} \ln \frac{1}{|B'(\lambda_n)|} = q \in (0; +\infty),\ |\arg \lambda_n| \leqslant \alpha_0 < \frac{\pi}{2}\ (n \geqslant 1).$$

При цьому $\rho_{\alpha\beta} = q = \rho^0_{\alpha\beta} + q$, оскільки $\rho^0_{\alpha\beta} = 0$. Зауважимо, що за описаних умов вдається показати лише, що ряд (13) є абсолютно збіжним у куті $K_{\alpha_0} = \{z = re^{i\varphi} : \frac{\pi}{2} + \alpha_0 < \varphi < \frac{3\pi}{2} - \alpha_0\}$. Зауважимо (застосовуючи лему 2 [3], це не складно показати), що за умов $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ та (4) і (5), якщо $\Delta_{\alpha\beta} \in (0, +\infty)$ і виконуються умови (2), то для функції F, яка визначається абсолютно збіжним у куті K_{α_0} рядом (13), справджується нерівність $\rho_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$ і функція F є обмеженою на промені $\{z = \sigma, \sigma < 0\}$. Тобто правильною є така теорема.

Теорема 2. *Нехай $\alpha \in L_1$, $\beta \in L_0$ та виконуються умови (4) і (5). Якщо послідовність (λ_n) така, що виконуються умови (2), то ряд (13) є абсолютно збіжним у куті K_{α_0} і визначає аналітичну функцію F обмежену на промені $\{z = \sigma : \sigma < 0\}$ і таку, що $\rho_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$.*

Доведення. Оскільки для довільного $\Delta > \Delta_{\alpha\beta}$ і для всіх $n \geqslant n_0(\Delta)$

$$-\ln|B'(\lambda_n)| < Re\lambda_n/\beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(Re\lambda_n)\right), \tag{14}$$

то при фіксованому $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2} + \alpha_0 + \delta; \frac{3\pi}{2} - \alpha_0 - \delta]$, $\delta > 0$, $\varphi_n = \arg\lambda_n$, маємо $\frac{\pi}{2} + \delta < \varphi + \varphi_n < \frac{3\pi}{2} - \delta$ та при $n \to +\infty$

$$-\ln|B'(\lambda_n)| + Re(z\lambda_n) = -\ln|B'(\lambda_n)| + r|\lambda_n|\cos(\varphi + \varphi_n) \leqslant$$
$$\leqslant Re\lambda_n/\beta^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\alpha(Re\lambda_n)\right) - r|\lambda_n|\sin\delta = -(1 + o(1))r|\lambda_n|\sin\delta \leqslant 0.$$

Зважаючи на збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|1+\lambda_n|^2}$, отримуємо абсолютну збіжність у K_{α_0} ряду (13).

Використовуючи лему 2 [3], у [3] показано, що при $\sigma < 0$ функцію F вигляду (13) можна зобразити інтегралом

$$F(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{i\sigma t}}{(1+t)^2 B(t)}dt.$$

З огляду на рівність $|B(iy)| = 1 (\forall y \in \mathbb{R})$, отримуємо, що $F(z)$ обмежена на промені $\{z = \sigma : \sigma < 0\}$.

Зауважимо, що для $a_n = (1 + \lambda_n)^{-2}(B'(\lambda_n))^{-1}$ вздовж деякої послідовності $n = n_k \uparrow +\infty$.

$$Re\lambda_n/\ln^+|a_n| = (1 + o(1))\beta^{-1}((\frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}} + o(1))\alpha(Re\lambda_n)),$$

оскільки за умовою (5) $\ln|\lambda_n| = o(Re\lambda_n/\beta^{-1}((\frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}} + o(1))\alpha(Re\lambda_n)))$. Тому при $n = n_k \to +\infty$ і для довільного $\varepsilon > 0$

$$\frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta(Re\lambda_n/\ln^+|a_n|)} \geqslant \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta((1+\varepsilon)\beta^{-1}(\frac{1}{\Delta_{\alpha\beta}-\varepsilon}\alpha(Re\lambda_n))} = \frac{(\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon)\beta(x)}{\beta((1+\varepsilon)x)},\ x = \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon}.$$

Звідси, за умовою $\overline{\lim\limits_{u\to+\infty}} \frac{\beta(cu)}{\beta(u)} = q_1(c) \to 1$ $(c \to 1)$ маємо

$$k_{\alpha\beta} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\alpha(Re\lambda_n)}{\beta(Re\lambda_n/\ln^+|a_n|)} \geqslant (\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon)\left(\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\beta((1+\varepsilon)x)}{\beta(x)}\right)^{-1} = \frac{\Delta_{\alpha\beta} - \varepsilon}{q_1(1+\varepsilon)}.$$

Тобто, $k_{\alpha\beta} \geqslant \Delta_{\alpha\beta}$. Зауважимо, що за допомогою нерівності (14) подібними міркуваннями доводимо $k_{\alpha\beta} \leqslant \Delta_{\alpha\beta}$. Для завершення доведення достатньо скористатись для функції $\mathfrak{M}(\sigma, F)$ такою лемою.

Лема 3 (лема 3 [2]). *Нехай $\lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. Якщо $\alpha \in L$, $\beta \in L_0$ і виконується умова (5), то $k_{\alpha\beta} \leqslant \rho_{\alpha\beta}$.*

Використовуючи лему 4 [2], можна отримати твердження подібне до теореми 2 і у випадку другого твердження з теореми 1.

Легко бачити, що у випадку, коли комплексна послідовність (λ_n) така, що $\arg \lambda_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ і виконуються умови (2), то за умов теореми 2 ряд (13) є абсолютно збіжним в усій півплощині $\mathbb{C}_-$, тобто справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай послідовність (λ_n) така, що $\arg \lambda_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ і виконуються умови (2), а функції α і β задовольняють першу групу умов теореми 1. Якщо $\Delta_{\alpha\beta} < +\infty$, то для того щоб для кожної функції $F \in S_{\mathbb{C}}(\lambda)$ виконувалась рівність $\rho_{\alpha\beta} = p^0_{\alpha\beta}$, необхідно і достатньо, щоб $\Delta_{\alpha\beta} = 0$.*

Подібна теорема є правильною і у випадку, коли функції α і β задовольняють другу групу умов з теореми 1.

Дослідження О.Б.Скасківа частково підтримані грантом INTAS, проект 99-0089.

---

1. *Галь Ю.М., Шеремета М.Н.* Про зростання аналітичних у півплощині функцій, заданих рядами Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1978. – №12. – С.1064-1067.

2. *Скаскив О.Б., Сорокивский В.М.* О росте на горизонтальных лучах функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.12. – №3. – С.363-371.

3. *Шаповаловський О.В.* Про зростання на дійсній півосі рядів Діріхле з комплексними показниками // Математичні студії. – 1999. –Т.11. – №2. – С.213-215.

4. *Сорокивский В.М.* О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. журн. – 1984. – Т.36. – №4. – С.524-528.

5. *Винницкий Б.В., Шаповаловский А.В.* О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле с комплексными показателями // Укр. мат. журн. – 1990. –Т. 42. – №7. – С.882-888.

ABOUT GENERALIZED ORDERS OF THE GROWTH ON A SEMIAXIS THE DIRICHLET SERIES WITH COMPLEX EXPONENTS

Oleh Skaskiv, Vasyl' Sorokivskyi, Oleksandr Shapovalovskyi

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine
Lviv Academy of Commerce
12 Tugan-Baranovs'ki Str. Lviv, Ukraine
Drogobych State Pedagogic University
3 Stryis'ka Str. Drogobych, Ukraine

For a Dirichlet series with complex exponents a relations between the generalized orders of the growth on semiaxes and semiplane is established.

Key words: Dirichlet series, generalized orders of the growth.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.2001

Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.130–136

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.130–136

УДК 511.364

ПРО МІРУ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТІ ЧИСЛА $\operatorname{tg}\alpha$ ТА ПРО ЙОГО НАБЛИЖЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИМИ ЧИСЛАМИ

Володимир СТЕФАНЯК
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Покращено відому оцінку А.Б.Шидловського міри трансцендентності числа $\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$. Одержано оцінку апроксимації цього числа алгебраїчними числами. Основну теорему доведено за допомогою другого методу Гельфонда.

Ключові слова: трансцендентні числа, апроксимація трансцендентних чисел.

Означення. *Нехай $\xi \in \mathbb{C}$, $H \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$. Мірою трансцендентності числа ξ називають функцію*

$$\Phi_{m,H}(\xi) = \min \mid a_0 + a_1\xi + \ldots + a_m\xi^m \mid,$$

де мінімум береться за всіма $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$, які задовольняють умову

$$0 < \max_{0 \leqslant k \leqslant m} |a_k| \leqslant H.$$

Нехай $\mathbb{A}$ – поле алгебраїчних чисел, $deg\ \alpha$ – степінь алгебраїчного числа α, $H(\alpha)$ і $L(\alpha)$ – його висота і довжина відповідно, $[\cdot]$ – ціла частина числа, λ_i, q_i – ефективні сталі, які залежать тільки від α і $deg\ \alpha$ і не залежать від $L(\alpha)$.

Очевидно, що для довільного $\alpha \in \mathbb{A}$ при $m \geqslant deg\ \alpha$ та досить великого H $\Phi_{m,H}(\alpha) = 0$. Відомо [2], що число $\operatorname{tg}\alpha, \alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0$ трансцендентне. Загалом знайти міру трансцендентності для трансцендентного числа важко, проте у часткових випадках можна отримати для неї оцінку знизу.

Природу алгебраїчних чи трансцендентних чисел важко визначити, тому для розв'язання конкретних важливих задач у теорії чисел використовують нижню межу значень многочленів з цілими коефіцієнтами в заданій точці залежно від властивостей самого многочлена, а точніше від його коефіцієнтів.

Питання наближення трансцендентних чисел (в нашому випадку $\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$) алгебраїчними мають самостійне наукове значення в теорії трансцендентних чисел, водночас тісно пов'язані з оцінкою міри трансцендентності.

Задачі знаходження оцінок мір трансцендентності актуальні й сьогодні. Цю тематику продовжують розвивати А.Б.Шидловський, Г.Діас (G.Diaz) та ін.

У цій праці ми доводимо посилення оцінки, яку одержав А.Б.Шидловський [1] за допомогою розробленого ним методу Е-функцій, який дає змогу виводити оцінки для широкого класу трансцендентних чисел. Проте виведення оцінки міри трансцендентності для конкретного набору чисел ($\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{A}$) за допомогою другого методу Гельфонда дає кращий результат.

У теоремі 1 одержано наближення числа $\operatorname{tg}\alpha$ алгебраїчними. Оцінка для міри трансцендентності міститься в теоремі 2, доведення якої безпосередньо грунтується на теоремі 1.

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0$, $d = deg\ \alpha$. Тоді існує така додатна ефективна стала $\eta = \eta(\alpha)$, що для будь-якого алгебраїчного числа θ, $deg\ \theta \leqslant d$ виконується нерівність*

$$|\operatorname{tg}\alpha - \theta| > e^{-q^2 \ln^{2+\eta} q}, \tag{1}$$

де $q = [\ln L\ \ \ln^{2+\eta} \ln L]$, $L = L(\theta) \geqslant L_0(d, \alpha)$.

Доведення цієї теореми проведено за допомогою другого методу Гельфонда, з яким детальніше можна ознайомитись в [2] чи [3]. Для доведення теореми використаємо такі допоміжні твердження.

Лема 1 ([2], с.15). *Нехай $X_0 \in \mathbb{N}$, $n > m \geqslant 1$, $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$L_t(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{t,j} x_j,\ a_{t,j} \in \mathbb{R},\ A_t = \sum_{j=1}^{n} |a_{t,j}|,\ t = 1, \ldots, m.$$

Тоді існує набір $x_{1,0}, \ldots, x_{n,0} \in \mathbb{Z}$, який задовольняє умови

$$0 < \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_{j,0}| \leqslant X_0,\ |L_t(\overline{x}_0)| < A_t X_0^{1-n/m},\ t = 1, \ldots, m.$$

Лема 2 ([2], с.102)(формула Ерміта). *Нехай $f(\xi)$ аналітична в області $\mathcal{D}$ і на її кусково-гладкій межі $\mathcal{L}$; $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{D}$, $a_i \neq a_j$, якщо $i \neq j, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді для будь-якого $z \in \mathcal{D}$, відмінного від чисел $a_1, \ldots, a_m$, виконується рівність*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z - a_k}{\xi - a_k} \right)^{s+1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{m} \sum_{\sigma=0}^{s} \frac{f^{(\sigma)}(a_l)}{\sigma!} \oint_{|\xi - a_l| = \rho_l} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z - a_k}{\xi - a_k} \right)^{s+1} \frac{(\xi - a_l)^{\sigma}}{\xi - z} d\xi,$$

де $\rho_l > 0$ і такі малі, що круги $\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - a_l| \leqslant \rho_l\}$ належать до $\mathcal{D}$ і не містять чисел z і $a_k, k \neq l$.

Лема 3 ([2], с.46). *Нехай $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{A}$, $deg\ \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = n, deg\ \alpha_k = n_k$, $k = 1, \ldots, m$, $N_1, \ldots, N_m \in \mathbb{N}$,*

$$P(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \ldots \sum_{k_m=0}^{N_m} a_{k_1, \ldots, k_m} {z_1}^{k_1} \ldots {z_m}^{k_m} \in \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_m].$$

Якщо $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \neq 0$, то $|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)| \geqslant L(P)^{1-\delta n} \prod_{i=1}^{m} L(\alpha_i)^{-\delta N_i n/n_i}$, де $\delta = 1$, якщо поле $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ дійсне, і $\delta = 1/2$, якщо це не так.

Доведення теореми. Нехай для деякого $\theta \in \mathbb{A}, deg\ \theta \leqslant d$ виконується нерівність

$$|\operatorname{tg}\alpha - \theta| \leqslant e^{-q^2 \ln^{2+\eta} q}. \tag{2}$$

Введемо позначення

$$S = [ln^{1+\eta} q],\ X = [\sqrt{\ln q}],\ X_0 = [e^{q \ln q}],\ X_1 = [\ln q],$$

$$f_n(z) = \sum_{k,l=0}^{q} C_{k,l} z^k \sin^{2l}(z - n + \alpha),\ n = 0, 1, \dots, X;\ t(z) = \sin^2 z.$$

За індукцією за s знайдемо похідні функції $t(z)$

$$t^{(s)}(z) = 2^{2[\frac{s-1}{2}]+1}(-1)^{[\frac{s-1}{2}]} \left(\frac{\sin 2z}{2}\right)^{\varkappa_1(s)} (\cos 2z)^{\varkappa_2(s)} \left(-\frac{2\sin^2 z}{\cos 2z}\right)^{\varkappa_3(s)},$$

$s = 0, 1, \dots, S$, де $\varkappa_1(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^s$, $\varkappa_2(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^s$, $\varkappa_3(s) = \left[\frac{S-s}{S}\right]$.

Далі для довільного $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $s = 0, 1, \dots, S$ отримаємо рівність

$$\left(t^l(z)\right)^{(s)} = \sum_{s_1+\dots+s_l=s} \frac{s!}{s_1! \dots s_l!} t(z)^{(s_1)} \dots t(z)^{(s_l)} = \sum_{s_1+\dots+s_l=s} \frac{s!}{s_1! \dots s_l!} \times$$

$$\times\, 2^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left(2\left[\frac{s_j-1}{2}\right]+1\right)} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left[\frac{s_j-1}{2}\right]} \left(\frac{\sin 2z}{2}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_1(s_j)} \times$$

$$\times\, (\cos 2z)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_2(s_j)} \left(-\frac{2\sin^2 z}{\cos 2z}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_3(s_j)}. \qquad (3)$$

Враховуючи наші позначення, можна записати, що $f_n(z) = \sum\limits_{k,l=0}^{q} C_{k,l} z^k t^l(z - n + \alpha)$, і за індукцією за s легко визначити таку рівність:

$$f_n^{(s)}(z) = \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} C_{k,l} z_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \left(t^l(z - n + \alpha)\right)^{(\sigma)}, \qquad (4)$$

$$s = 0, 1, \dots, S;\ n = 0, 1, \dots, X,$$

де $*$ означає, що $z^{k-s+\sigma}$ заміняємо на 1 при $k - s + \sigma < 0$.

Використаємо (3) для $\left(t^l(z - n + \alpha)\right)^{(\sigma)}$ і розглянемо $f_n^{(s)}(z)$ в точках $z_m = m$, $m = 0, 1, \dots, X$, врахувавши (4)

$$f_n^{(s)}(m) = \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\sigma_1+\dots+\sigma_l=\sigma} C_{k,l} m_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \dots \sigma_l!} 2^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left(2\left[\frac{\sigma_j-1}{2}\right]+1\right)} \times$$

$$\times (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\left[\frac{\sigma_j-1}{2}\right]} \left(\frac{\sin 2(m - n + \alpha)}{2}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_1(\sigma_j)} (\cos 2(m - n + \alpha))^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_2(\sigma_j)} \times$$

$$\times \left(-2\frac{\sin^2(m - n + \alpha)}{\cos 2(m - n + \alpha)}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{l}\varkappa_3(\sigma_j)};\ n = 0, 1, \dots, X;\ m = 0, 1, \dots, X. \qquad (5)$$

Отримали $m_1 = (S+1)(X+1)^2$ лінійних форм, кількість доданків у кожній лінійній формі $m_2 \geqslant q^2$. Відомо таке: якщо $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N(M,m)$ – кількість розв'язків рівняння $x_1 + \ldots + x_m = M$ у цілих невід'ємних числах, то $N(M,m) = C^M_{M+m-1}$. Використовуючи формулу

$$C^{r-1}_{n-1} + C^{r-1}_{n-2} + \ldots + C^{r-1}_{r-1} = C^r_n, \; n \geqslant r \geqslant 1,$$

доходимо висновку, що кількість доданків у кожній лінійній формі $m_2 \geqslant q^2$.

З леми 1 і (5) випливає, що існує набір чисел $C_{k,l} \in \mathbb{Z}$, які задовольняють умови

$$| f_n^{(s)}(m) | \leqslant A_{s,n,m} X_0^{1-m_2/m_1} \leqslant e^{-\frac{1}{2}q^2 \ln^{1+\eta} q}, \; q \geqslant q_1, \tag{6}$$

$$0 < \max | C_{k,l} | \leqslant X_0.$$

За допомогою леми 2 і (6), використовуючи принцип максимуму модуля для аналітичних функцій, отримуємо для $q \geqslant q_2$ нерівність

$$\max_{|z| \leqslant X_1+1} | f_n(z) | = \max_{|z| \leqslant X_1+1} \Big| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = \ln^{3/2} q} \prod_{m=0}^{X-1} \left(\frac{z-m}{\xi - m} \right)^S \frac{f_n(\xi) d\xi}{\xi - z} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{X-1} \sum_{s=0}^{S-1} \frac{f_n^{(s)}(m)}{s!} \oint\limits_{|\xi - m| = 0,5} \prod_{y=0}^{X-1} \left(\frac{z-y}{\xi - y} \right)^S \frac{(\xi - m)^s}{z - \xi} d\xi \Big| \leqslant \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{4}q^2 \ln^{1+\eta} q}. \tag{7}$$

Оцінка (7) і інтегральна формула Коші допомагають оцінити похідні $f_n^{(s)}(z)$

$$\max_{|z| = X_1} | f_n^{(s)}(z) | \leqslant \max_{|z| \leqslant X_1+1} \Big| \frac{s!}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi| = \ln q} \frac{f_n(\xi) d\xi}{| \xi - z |^{s+1}} \Big| \leqslant e^{-\frac{1}{8}q^2 \ln^{1+\eta} q}. \tag{8}$$

Оскільки $\sin 2z = \frac{2\operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg}^2 z}$, $\cos 2z = \frac{1-\operatorname{tg}^2 z}{1+tg^2 z}$, $-\frac{2\sin^2 z}{\cos 2z} = -\frac{2\operatorname{tg}^2 z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$, то позначимо

$$P_{s,n}(z) = \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\sigma_1 + \ldots + \sigma_l = \sigma} C_{k,l} n_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \ldots \sigma_l!} 2^{\sum\limits_{j=1}^{l} \left(2\left[\frac{\sigma_j - 1}{2} \right] + 1 \right)} \times$$

$$\times (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \left[\frac{\sigma_j - 1}{2} \right]} \left(\frac{z}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_1(\sigma_j)} \left(\frac{1-z^2}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_2(\sigma_j)} \left(-\frac{2z^2}{1-z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_3(\sigma_j)}. \tag{9}$$

Оцінимо різницю

$$\Delta = | P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) - P_{s,n}(\theta) | = \Big| \sum_{k,l=0}^{q} \sum_{\sigma=0}^{s} \sum_{\sigma_1 + \ldots + \sigma_l = \sigma} C_{k,l} n_*^{k-s+\sigma} C_s^\sigma A_k^{s-\sigma} \frac{\sigma!}{\sigma_1! \ldots \sigma_l!} \times$$

$$\times 2^{\sum\limits_{j=1}^{l} \left(2\left[\frac{\sigma_j - 1}{2} \right] + 1 \right) + \sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_3(\sigma_j)} \int\limits_{\operatorname{tg}\alpha}^{\theta} g'(z) dz \Big|,$$

де $g(z) = \left(\frac{z}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_1(\sigma_j)} \left(\frac{1-z^2}{1+z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_2(\sigma_j)} \left(-\frac{z^2}{1-z^2} \right)^{\sum\limits_{j=1}^{l} \varkappa_3(\sigma_j)}$.

Інтеграл $\int\limits_{\operatorname{tg}\alpha}^{\theta} g'(z)dz$ зводиться до криволінійних інтегралів другого роду від дійснозначних функцій, величини яких не залежать від шляху інтегрування, а лише від кінцевих точок кривої. Враховуючи те, що спрямлювану криву, яка з'єднує точки $\operatorname{tg}\alpha$ і θ, можна вибрати такою, що не проходить через точки $\pm1, \pm i$; якщо треба, вважаючи, що $\theta \neq \pm i$, $\theta \neq \pm 1$ ($L = L(\theta)$ –досить велике число!), скористаємось (2) і отримаємо для $s = 0, 1, \dots, S$ та $n = 0, 1, \dots, X_1$ нерівність

$$\Delta \leqslant e^{-\frac{1}{2}q^2 \ln^{2+\eta} q}. \tag{10}$$

Позаяк $| P_{s,n}(\theta) | \leqslant | P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) - P_{s,n}(\theta) | + | P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) |$ і $f_n^{(s)}(n) = P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha)$, то з (8) і (10) випливає, що

$$| P_{s,n}(\theta)(1+\theta^2)^{2q}(1-\theta^2)^q | \leqslant e^{-\frac{1}{16}q^2 \ln^{1+\eta} q}. \tag{11}$$

З іншого боку, $P_{s,n}(\theta)(1+\theta^2)^{2q}(1-\theta^2)^q \in \mathbb{Z}[\theta]$ і за лемою 3

$$| P_{s,n}(\theta)(1+\theta^2)^{2q}(1-\theta^2)^q | \geqslant e^{-\lambda_1 q^2}, q \geqslant q_3. \tag{12}$$

З оцінок (11) і (12) випливає, що $| P_{s,n}(\theta) | = 0$, а отже,

$$| f_n^{(s)}(n) | = | P_{s,n}(\operatorname{tg}\alpha) | \leqslant e^{-\frac{1}{2}q^2 \ln^{2+\eta} q}, \tag{13}$$

$$s = 0, 1, \dots, S;\ n = 0, 1, \dots, X_1.$$

Знову повернемося до формули Ерміта. Оцінка для $f_n^{(s)}(m)$ відповідає оцінці для $f_{X_1}^{(s)}(X_1)$, що дає змогу використати (13)

$$\max_{|z|=2} | f_n(z) | = \max_{|z|=2} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi|=3} \prod_{m=0}^{X-1} \left(\frac{z - \frac{1}{m+1}}{\xi - \frac{1}{m+1}} \right)^S \frac{f_n(\xi)d\xi}{\xi - z} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{X-1} \sum_{s=0}^{S-1} \frac{f_n^{(s)}(m)}{s!} \oint\limits_{|\xi - \frac{1}{m+1}| = \frac{1}{2X^2}} \prod_{y=0}^{X-1} \left(\frac{z - \frac{1}{y+1}}{\xi - \frac{1}{y+1}} \right)^S \frac{\left(\xi - \frac{1}{m+1}\right)^s}{z - \xi} d\xi \right| \leqslant 4e^{-\frac{1}{8}q^2 \ln^{2+\eta} q}.$$

За інтегральною формулою Коші

$$| f_1^{(s)}(1) | = \left| \frac{s!}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=2} \frac{f_1(z)dz}{(z-1)^{s+1}} \right| \leqslant e^{-\frac{1}{16}q^2 \ln^{2+\eta} q}, 0 \leqslant s \leqslant S_0, \tag{14}$$

де $S_0 = [q^2 \ln^{\frac{1}{2}+\eta} q]$.

Виразивши $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \sin^2 \alpha$ через $e^{2i\alpha}$ у (5)для $f_1^{(s)}(1)$, отримаємо, що

$$f_1^{(s)}(1) = \frac{1}{\gamma(q,\alpha)} (H_{s,1}(e^{2i\alpha}) + i H_{s,2}(e^{2i\alpha})), \tag{15}$$

де $H_{s,1}(z), H_{s,2}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, а $\gamma(q,\alpha) > 0$. Відомо [4], що $\Phi_{m,H}(e^{\alpha}) > H^{-\lambda_0 m}$ при досить великих H, де $\lambda_0 > 0$ не залежить від H та m, а тому, враховуючи нерівність $\mid z_1+z_2 \mid \geqslant \mid\mid z_1 \mid - \mid z_2 \mid\mid$ та саму структуру многочленів $H_{s,1}, H_{s,2}$, доходимо висновку, що

$$\mid f_1^{(s)}(1) \mid \geqslant \frac{1}{\gamma(q,\alpha)} e^{-\lambda_2 q^2 \ln^{\frac{3}{2}+\eta} q} \geqslant e^{-\lambda_3 q^2 \ln^{\frac{3}{2}+\eta} q}, s = 0, 1, \ldots, S_0. \tag{16}$$

З оцінок (14) і (16) отримаємо суперечність при досить великих q. Це означає, що $f_1^{(s)}(1) = 0$. Враховуючи сказане вище і те, що число $e^{2i\alpha}$ трансцендентне, з (9) легко бачити, що всі $C_{k,l}$ дорівнюють 0. Теорему 1 доведено.

Надалі нехай $H(P)$ та $L(P)$ - відповідно висота та довжина многочлена P з цілими коефіцієнтами.

Теорема 2. *Нехай $\alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0, d = deg\ \alpha$. Тоді існує така ефективна стала $c = c(\alpha) > 0$, що для довільного $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $P(z) \not\equiv 0$, $deg\ P(z) = n \geqslant 1$, $L(P) = L \geqslant L_0(d,\alpha)$ виконується нерівність*

$$\mid P(\operatorname{tg}\alpha) \mid \geqslant e^{-cm^2 \ln^{6+3\eta} m}, \tag{17}$$

де $m = ln(2^n L)$.

Зауваження. В (1) та (17) можна перейти від $L(P)$ до $H(P)$ за допомогою нерівності

$$H(P) \leqslant L(P) \leqslant H(P)(1 + deg\ P). \tag{18}$$

За результатами А.Б.Шидловського існує така додатна константа c, що $\Phi_{m,H}(\operatorname{tg}\alpha) > cH^{-4h^2 m}$, $h \leqslant H$. Оцінка є глобальною тому, що немає обмежень на висоту і довжину многочлена з цілими коефіцієнтами. Є сенс наближати трансцендентні числа досить близькими алгебраїчними числами, в яких здебільшого довжина і висота досить великі. Це допоможе обмежитися розглядом многочленів з цілими коефіцієнтами з досить великими $L(P)$ та $H(P)$. Враховуючи нерівність (18) та звівши оцінку Шидловського до експоненціального вигляду, легко переконатися в ефективності (17).

Доведення теореми 2 безпосередньо випливає з теореми 1 і такої леми.

Лема 4 ([2], с.101). *Нехай $a \in \mathbb{C}$. Якщо для кожного $\zeta \in \mathbb{A}$ виконується нерівність*

$$\mid a - \zeta \mid \geqslant e^{-\nu\varphi(\nu,l)},\ \nu = deg\ \zeta,\ l = L(\zeta),$$

де $\varphi(x,y)$ - неспадна функція своїх аргументів, то для будь-якого $P(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $P(z) \not\equiv 0$, $n = deg\ P$, $n \geqslant 1$, $L = L(P)$ виконується нерівність

$$\mid P(a) \mid \geqslant e^{-n\varphi(n,2^n L)}(4L\sqrt{n})^{-n}.$$

---

1. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа. – М., 1987.

2. *Фельдман Н.И.* Седьмая проблема Гильберта. – М., 1982.

3. *Гельфонд А.О.* Избранные труды. – М., 1973.

4. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. – 1932. – N 166. – P.118-136, 137-150.

ON TRANSCEDENCE MEASURE OF NUMBER $\operatorname{tg}\alpha$ AND ITS APPROXIMATION BY ALGEBRAIC NUMBERS

Volodymyr Stefanyak

Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

In this article here is given the slight improval of the estimate for transcendence measure of $\operatorname{tg}\alpha, \alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0$, made by A.B.Shidlovskiy [1] and approximation of this number by algebraic numbers. The main theorem is proved by means of the second Gelfond's method.

Key words: transcendence numbers, approximation of transcendence numbers.

Стаття надійшла до редколегії 11.07.2000
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.137–147

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.137–147

УДК 539:375

РОЗВИТОК ЗОН ПЛАСТИЧНОСТІ ПРИ ЗСУВНОМУ ЗРІЗУВАННІ ПІВШАРУ

Василь КРИВЕНЬ, Георгій СУЛИМ

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя
вул. Руська, 46, Тернопіль, Україна
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розв'язана антиплоска пружнопластична задача для півбезмежної смуги з паралельним до її граней плоским розрізом. Його початок розташований на торці смуги і поділяє її на дві ідентичні частини. Деформація зумовлена сталим зміщенням верхньої та нижньої половин торця. Розглянуто випадки суцільної пластичної зони і зон, утворених однією або трьома пластичними смугами. Визначено межу суцільної зони, довжини смуг пластичності та стрибок зміщення у вістрі розрізу. Результати розрахунку кожного випадку зіставлені між собою.

Ключові слова: антиплоска пружнопластична задача.

Для оцінювання міцності клейових з'єднань проводять випробування відриванням. Такий процес найчастіше вивчають на основі розв'язування відповідних плоских задач, зокрема [1]. Важливо у таких задачах врахувати ефекти пластичності [2, 3]. Хоча дослідження опору руйнуванню зрізуванням є не менш важливим, відповідні задачі вивчено набагато менше, особливо з урахуванням пластичного деформування, див. наприклад [4].

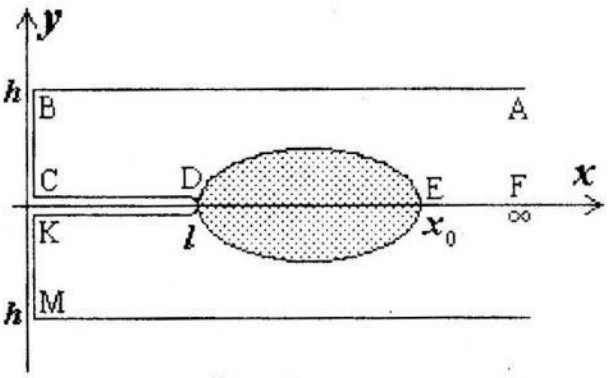


Рис. 1

Дослідимо зони пластичності при зсувному зрізуванні ідеально пружнопластичного [5] півшару $0 \leqslant x < \infty$, $-h \leqslant y \leqslant h$, $-\infty < z < \infty$ із розрізом $0 \leqslant< l$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$ якщо зміщення уздовж осі аплікат на частині межі півшару $x = 0$, $0 < y \leqslant h$, $-\infty < z < \infty$ стале і дорівнює w_0, а на ділянці $x = 0$,

$-h \leqslant y < 0$, $-\infty < z < \infty$ теж стале і дорівнює $-w_0$. Решту границі півшару та береги розрізу вважатимемо вільними від зовнішніх напружень. Припустимо, що з фронту розрізу розвивається в'язка пластичних смуг. З огляду на двовимірний характер задачі обмежимося аналізом перерізу півшару площиною xOy. Визначатимемо довжини смуг як функції w_0 (рис. 1 відображає площину xOy для суцільної пластичної зони, тобто за безмежної кількості смуг).

1. Формулювання крайової задачі у напруженнях

Навантаження прикладене так, що відмінне від нуля лише переміщення $w(x, y)$ уздовж осі аплікат, а досліджуваний півшар перебуває у стані антиплоскої деформації. Зовнішніх напружень на горизонтальних краях півшару та берегах розрізу немає

$$\tau_{yz}(x, \pm h) = 0 \;\; (0 < x < \infty), \tau_{yz}(x, \pm 0) = 0 \;\; (0 < x < l). \tag{1}$$

Сталість зміщення на ділянках $x = 0, 0 < y \leqslant h$ та $x = 0, -h \leqslant y < 0$ еквівалентна умові

$$\tau_{yz}(0, y) = 0 \;\; (y \in (-h, 0) \cup (0, h)). \tag{2}$$

Звернемося до умови на границі пластичної зони. На межі L суцільної пластичної зони повинна виконуватися умова пластичності

$$\tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) = k^2 \;\;\; ((x, y) \in L) \tag{3}$$

та умова неперервності напружень [4]

$$(x - l)\,\tau_{xz}(x, y) + y\tau_{yz}(x, y) = 0 \;\; ((x, y) \in L), \tag{4}$$

де k – зсувна межа плинності матеріалу півшару.

Якщо зона пластичності утворена скінченною кількістю смуг пластичності (СП), то у кожній точці смуг має виконуватися умова пластичності (3), а у кінцевій точці кожної смуги, що утворює кут α з віссю абсцис, додатково ще й умова прямолінійного розвитку СП [4]

$$\tau_{nz} = k \quad (\vec{n} = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}). \tag{5}$$

Відносне зміщення точок $x = 0$, $-h \leqslant y < 0$ та $x = 0$, $0 < y \leqslant h$ дорівнює величині $2w_0$. Нехай $(x_0, 0) \in L$ точка границі зони на осі абсцис. У точках осі абсцис, що лежать правіше точки $(x_0, 0)$, пластичний стан не досягнуто і внаслідок симетрії $w(x, 0) = 0$ $(x > x_0)$. Тому

$$w_0 = w(0, +0) - w(x_0, +0). \tag{6}$$

Сталість зміщення у точках дійсної осі, у яких не досягнуто пластичного стану, рівносильна умові

$$\tau_{xz}(x, 0) = 0 \quad (x > x_0). \tag{7}$$

2. Суцільна пластична зона. При антиплоскій деформації у пружній частині тіла компоненти тензора напружень утворюють аналітичну функцію $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ комплексної змінної $\zeta = x + iy$. Крайові умови (1) - (4), (6) для функції $\tau(\zeta)$ у верхній половині півшару поза зоною пластичності (область D) мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\tau(\zeta)=0\left(\begin{matrix}(\zeta=x+ih,\ 0<x<\infty)\\ \vee(\zeta=x\pm i0,\ 0<x<l)\vee(\zeta=iy,\ -h<y<h)\end{matrix}\right),\\
&\operatorname{Im}\tau(\zeta)=0\ \ (\zeta=x,\ x>x_0),\ \ |\tau(\zeta)|=k\ \ (\zeta\in L),\\
&\operatorname{Im}(\zeta-l)\,\tau(\zeta)=0\ \ (\zeta\in L),\quad \frac{1}{\mu}\operatorname{Im}\int\limits_{\Gamma}\tau(\zeta)\,d\zeta=w_0,
\end{aligned}\tag{8}$$

де Γ – лінія з початком у точці $\zeta_1=x_0$ і кінцем у $\zeta_2=0$, яка не перетинає ні пластичної зони, ні берегів розрізу; μ – модуль зсуву матеріалу. Шукатимемо функцію $\tau(\zeta)$ у параметричній формі

$$\tau=\tau(t),\ \ \zeta=\zeta(t)\ \ (t\in H=\{\operatorname{Im}t>0\}).\tag{9}$$

Функція $\tau(t)$ аналітична в області H і конформно відображає цю область на певну область G площини τ. Внаслідок перших трьох умов (8) G є четвертиною круга з центром у точці $\tau=0$ і радіусом k: $\{\operatorname{Im}\tau<0,\operatorname{Re}\tau>0,|\tau|<k\}$. Прийнявши у площині t афікси прообразів точок $\tau=k$, $\tau=0$, $\tau=ik$ відповідно рівними ∞, -1, 0 та побудувавши конформне відображення G на H, одержуємо

$$t(\tau)=-\left(\frac{k^2+\tau^2}{k^2-\tau^2}\right)^2,\quad \tau(t)=k\frac{\sqrt{-t}-1}{\sqrt{-t-1}}.\tag{10}$$

Тут і далі під степеневою функцією з показником меншим від одиниці розумітимемо аналітичну в H функцію, додатну при додатних значеннях аргументу.

Для спрощення подальшого викладу вважатимемо відомим напруження $\tau_{xz}=\tau_B$ у вістрі B півшару. Зміщення w_0 та лінію L – границю пластичної зони – поставимо у залежність від τ_B. Афікс t_B точки B у площині t дає вираз (10) функції $t(\tau)$: $t_B=-\left(\left(k^2-\tau_B\right)^2\Big/\left(k^2+\tau_B^2\right)^2\right)$. Для визначення функції $\zeta(t)$ спочатку введемо нову невідому, аналітичну в H, функцію

$$\lambda(t)=(\zeta(t)-l)\,\tau(t).\tag{11}$$

На границі області H внаслідок умов (8) функція $\lambda(t)$ задовольняє такі крайові умови:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\lambda(t)=0,\ t\in(-\infty,-1),\quad \operatorname{Re}\lambda(t)=h\,|\tau(t)|,\ t\in[-1,t_B],\\
&\operatorname{Im}\lambda(t)=l\,|\tau(t)|,\ t\in(t_B,t_c),\quad \operatorname{Re}\lambda(t)=0,\ t\in[t_c,0],\\
&\operatorname{Im}\lambda(t)=0,\quad t\in(0,+\infty).
\end{aligned}\tag{12}$$

Крім того, з формул (10), (11) випливає, що функція $\lambda(t)$ обмежена при $t\to\infty$ і задовольняє умови

$$\lambda(0)=0,\quad \lambda(-1)=0.\tag{13}$$

Розв'язок задачі Келдиша - Седова (12), який задовольняє умови (13), дає

$$\lambda(t)=\frac{R(t)}{\pi}\left(h\int\limits_{-1}^{t_B}\frac{|\tau(\eta)|\,d\eta}{X(\eta)(\eta-t)}-l\int\limits_{t_B}^{t_C}\frac{|\tau(\eta)|\,d\eta}{X(\eta)(\eta-t)}\right),\tag{14}$$

де $R(t)=\sqrt{t(t-t_c)(t-t_B)(t+1)}$ – така аналітична у верхній півплощині t функція, що $R(t)=t^2+o(t^2)$ при $t\to\infty$; $X(\eta)=|R(\eta)|$ – дійсна функція дійсного аргументу, $|\tau(\eta)|=k\sqrt{1+\eta}/(1+\sqrt{-\eta})$. Функція $\lambda(t)$ обмежена у безмежно віддаленій точці, якщо виконується умова

$$h\int_{-1}^{t_B}\frac{|\tau(\eta)|\,d\eta}{X(\eta)}=l\int_{t_B}^{t_C}\frac{|\tau(\eta)|\,d\eta}{X(\eta)}. \qquad (15)$$

Цю рівність можна забезпечити вибором афікса t_C точки C у площині t. Рівняння (15) на відрізку $[t_B,0]$ має єдиний розв'язок, який знайдемо числовим методом.

Скориставшись тим, що лінія L є образом у площині ζ додатної дійсної півосі площини t, а також рівністю $k/\tau(t)=\left(\sqrt{t}+i\right)/\sqrt{t+1}\,(t\in(0,+\infty))$, одержуємо рівняння границі L зони пластичних деформацій

$$x(t)=i+\lambda(t)\sqrt{t}\Big/\sqrt{t+1},\quad y(t)=\lambda(t)/\sqrt{t+1},\quad t\in(0,+\infty). \qquad (16)$$

У напрямі вирізу пластична зона простягається на відстань $d=x_0-l$ від вістря тріщини. З формул (11), (14) знаходимо, що

$$d=\frac{1}{\pi}\left(l\int_{t_B}^{t_C}\frac{|\tau(\eta)|\,\eta d\eta}{X(\eta)}-h\int_{-1}^{t_B}\frac{|\tau(\eta)|\,\eta d\eta}{X(\eta)}\right).$$

У вираз для границі зони входить параметр t_B, який є функцією напруження τ_{xz} у вершині B півшару. Визначимо через t_B зміщення w_0. Для цього вважатимемо в останній із формул (8) $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, де Γ_1 – границя пластичної зони у верхній половині півшару, Γ_2 – верхній край розрізу. Тоді $w_0=w_{01}+w_{02}$, w_{01} і w_{02} - відносне зміщення точок $(x_0,0)$ і $(l,+0)$ і кінцевої та початкової точок верхнього краю розрізу відповідно

$$w_{01}=\frac{1}{\mu}\,\mathrm{Im}\int_{0}^{\infty}\tau(t)\,d\zeta(t),\quad w_{02}=\frac{1}{\mu}\,\mathrm{Im}\int_{t_c}^{0}\tau(t)\,d\zeta(t). \qquad (17)$$

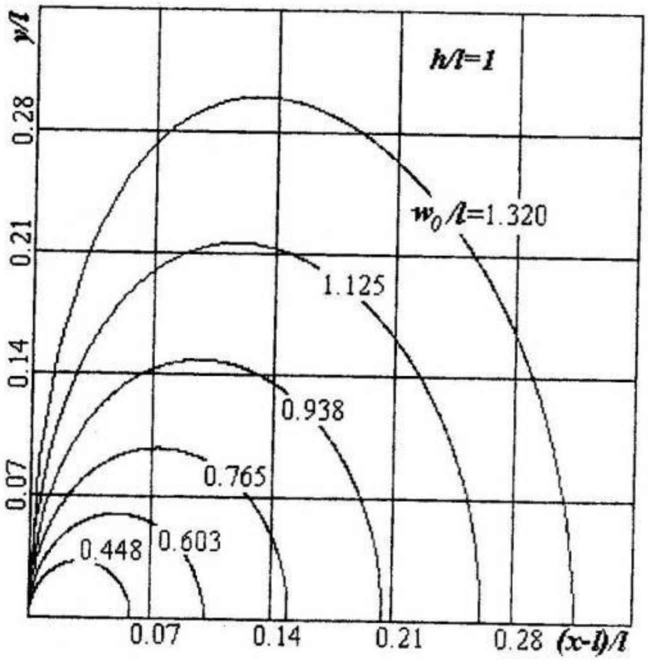
Використавши формули (10), (14), одержуємо

$$w_{01}=\frac{1}{2\mu}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda(t)}{(t+1)\sqrt{t}}dt,\quad w_{02}=l\frac{\tau_C}{\mu}+\frac{1}{\mu}\int_{t_C}^{0}\left|\frac{\tau'(t)}{\tau(t)}\right|\lambda(t)\,dt,$$

$$\tau_C=-\tau_{xz}(0,+0)=k\frac{\sqrt{1+t_C}}{1+\sqrt{-t_C}}. \qquad (18)$$

Для деяких відношень ширини півшару та глибини розрізу форма межі зони пластичних деформацій зображена на рис. 2. Як і у випадку півпростору ($h=\infty$) [4] при малих w_0 пластична зона є круговою, а зі збільшенням w_0 витягується у напрямі перпендикулярному до розрізу. Чим більша ширина півшару при сталій глибині вирізу, тим витягнітушою стає форма зони у перпендикулярному до розрізу напрямі.

3. Дослідження пластичної зони, утвореної трьома пластичними смугами. Дослідимо розвиток трьох смуг пластичності з фронту розрізу, одна з яких (центральна) є на продовженні розрізу, а дві інші (бічні) симетричні стосовно вирізу й утворюють із центральною СП кут α, який вважатимемо наперед відомим.



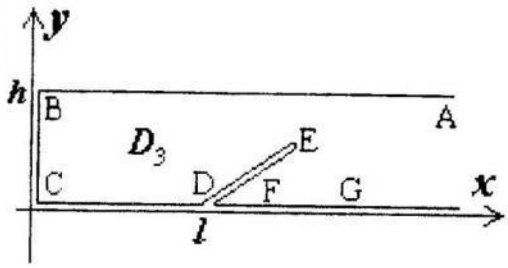


Рис. 2 Рис. 3

Складену з компонент тензора напружень аналітичну у пружній частині півшару функцію $\tau_{yz}+i\tau_{xz}$ позначимо тепер $\tau_3(\zeta)$ $(\zeta=x+iy)$. Як і у попередньому випадку замість зміщення w_0 задамося напруженням τ_{xz} у точці B вершини півшару. Функція $\tau_3(\zeta)$ аналітична в області D_3 – півсмузі $\operatorname{Re}\zeta>0$, $0<\operatorname{Im}\zeta<h$, розрізаній уздовж відрізка $\arg(\zeta-l)=\alpha$, $0<|\zeta-l|<d_2<h/\sin\alpha$ (d_2 – довжина бічних СП), яка зображена на рис. 3. Визначимо для функції $\tau_3(\zeta)$ крайові умови на границі області D_3. В усіх точках, де межі областей D та D_3 збігаються, крайові умови для функцій $\tau_3(\zeta)$ та $\tau(\zeta)$ теж збігаються. Для формулювання крайової задачі для $\tau_3(\zeta)$ $(\zeta\in D_3)$ достатньо зазначити умови на СП

$$
\begin{aligned}
&|\tau_3(\zeta)|=k \quad (\arg(\zeta-l)=\alpha,\ 0<|\zeta-l|<d_2), \\
&\arg\tau_3\left(l+d_2e^{i\alpha}\right)=-\alpha, \quad |\tau_3(\zeta)|=k \quad (\operatorname{Im}\zeta=0,\ l\leqslant\operatorname{Re}\zeta\leqslant l+d_1),
\end{aligned} \tag{19}
$$

d_1 – довжина центральної СП. Функція $\tau_3(\zeta)$ конформно відображає область D_3 (рис. 3) на область G. У площині ζ ламана $DEFG$, що збігається з берегами СП, відображається на дугу $|\tau|=k, -\pi/2<\arg\tau<0$. Оскільки довжина бічної СП заздалегідь невідома, то область D_3 визначена з точністю до одного параметра – глибини розрізу. Функцію $\tau_3(\zeta)$ можна знайти безпосередньою побудовою конформного відображення. При будь-якій допустимій глибині розрізу конформне відображення D_3 на G існує і єдине оскільки на їхніх границях є рівно три пари точок A, B, D, афікси яких фіксовані. Тому при змінній глибині вирізу конформні відображення D_3 на G формують однопараметричну множину функцій. Знайшовши у цій множині функцію, яка задовольняє другу з умов (19), знайдемо глибину вирізу (довжину бічної СП) для $\tau_{xz}=\tau_B$ у вершині B півшару.

Шукатимемо відображення $\tau_3(\zeta)$ у параметричному вигляді $\tau_3=\tau_3(t)$, $\zeta=\zeta_3(t)$ $(t\in H, H=\{\operatorname{Im}t>0\})$. Якщо відповідні точки на границях областей D_3 та G мають спільний прообраз на границі H, то шукану функцію $\tau_3(\zeta)$ визначає пара функцій $\tau_3(t)$,v$\zeta_3(t)$. Зафіксувавши три пари точок на границях областей, конкретизуємо відображення H на G. Це можна зробити довільним способом, наприклад, як у попередньому випадку. Зручно обрати афікси точок A, B, D у площині t, які дорівнюють ∞, 0, 1 відповідно. Композицією елементарних відображень отримуємо

$$\tau_3(t) = k\frac{\sqrt{t-1}-\sqrt{t-t_G}}{\sqrt{t_G-1}},\ t = \frac{\left(\tau^2+\tau_B^2\right)\left(k^4+\tau_B^2\tau^2\right)}{\tau^2\left(k^2-\tau_B^2\right)^2},\ t_G = \left(\frac{k^2+\tau_B^2}{k^2-\tau_B^2}\right)^2. \quad (20)$$

Відомим є афікс t_E точки E у площині t

$$t_E = \left(k^4+2k^2\tau_B^2\cos 2\alpha+\tau_B^4\right)\Big/\left(k^2-\tau_B^2\right)^2.$$

Афікси t_C, t_F ($t_C \in (0,1)$, $t_F \in (t_E, t_G)$) визначимо при побудові відображення $\zeta = \zeta_3(t)$, яке шукаємо у вигляді інтеграла Крістофеля-Шварца

$$\zeta_3(t) = M\int_0^t \frac{(\eta-t_E)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-t_c)}\,(\eta-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}\,(\eta-t_F)^{1-\frac{\alpha}{\pi}}} + ih, \quad (21)$$

$$M = \frac{h}{\int\limits_0^{t_C} F(\eta)\,d\eta},\quad F(\eta) = \frac{|\eta-t_E|}{\sqrt{|\eta(\eta-t_C)|}\,|\eta-1|^{\frac{\alpha}{\pi}}\,|\eta-t_F|^{1-\frac{\alpha}{\pi}}}.$$

Для допустимих значень параметрів t_C, t_F відображення (21) задає множину шестикутників $ABCDEF$ площини ζ із фіксованими кутами вершин. Потрібну фігуру, для якої $|BC| : |CD| = h/l$ і $|DE| = |EF|$, одержимо, визначивши t_E, t_C з системи рівнянь

$$l\int_0^{t_C} F(\eta)\,d\eta = h\int_{t_C}^1 F(\eta)\,d\eta,\quad \int_1^{t_E} F(\eta)\,d\eta = \int_{t_E}^{t_F} F(\eta)\,d\eta. \quad (22)$$

Існування й єдність розв'язку системи (22) гарантується теоремою Рімана про конформне відображення. Знайдемо його методом послідовних наближень

$$t_c^{(m)} = t_c^{(m-1)}\frac{hI_{m-1}\left(t_C^{(m-1)},1\right)}{lI_{m-1}\left(0,t_C^{(m-1)}\right)},\quad t_F^{(m)} = t_F^{(m-1)}\frac{I_{m-1}(1,t_E)}{I_{m-1}\left(t_E,t_F^{(m-1)}\right)},$$

де $t_C^{(0)} = 0,5$, $t_F^{(0)} = (t_G+t_E)/2, I_m(a,b)$ – інтеграл по відрізку $[a,b]$ від функції $F(\eta)$, в якій t_C, t_F замінено на $t_C^{(m)}$, $t_F^{(m)}$. Визначивши афікси t_C, t_F точок у площині t, які відповідають вершинам СП, знайдемо з формули (21) довжини центральної та бічних СП

$$d_1 = M\int_{t_F}^{t_G} F(\eta)\,d\eta,\quad d_2 = M\int_1^{t_E} F(\eta)\,d\eta. \quad (23)$$

Довжини СП залежать не тільки від напруження τ_B, а й від кута між бічними та центральною СП. Зокрема при $\alpha \to \pi/2$, $t_E \to 1$, $d_2 \to 0$ – бічні СП щезають. Вони також не можуть утворювати гострих кутів з берегами вирізу. Довжини СП та функція $\tau_3(\zeta)$ знайдені як функції τ_B – напруження τ_{xz} у вершині B

півшару. Щоб подати їх функціями зміщення w_0, виразимо w_0 через τ_B

$$w_0 = w_1 + w_2 + w_3, \tag{24}$$

де w_1 – відносне зміщення кінцевої та початкової точок центральної СП; w_2 – початкових точок бічної смуги; w_3 – кінцевої та початкової точок верхнього берега розрізу. Аналогічно до випадку суцільної зони подамо доданки формул (24) інтегралами по відповідних відрізках границі площини H

$$w_1 = \frac{1}{\mu}\operatorname{Im}\int\limits_{t_F}^{t_G} \tau_3(t)\, d\zeta_3(t)\,,\ w_2 = \frac{1}{\mu}\operatorname{Im} 1\int\limits_{1}^{t_F} \tau_3(t)\, d\zeta_3(t)\,,\ w_3 = \frac{1}{\mu}\operatorname{Im}\int\limits_{t_c}^{1} \tau_3(t)\, d\zeta_3(t).$$

З формул (20), (21) одержуємо

$$w_1 = M\frac{k}{\mu\sqrt{t_G-1}}\int\limits_{t_F}^{t_G} F(\eta)\sqrt{t_G-\eta}\,d\eta,$$

$$w_3 = M\frac{k}{\mu\sqrt{t_G-1}}\int\limits_{t_c}^{1} F(\eta)\left(\sqrt{t_G-1}-\sqrt{1-\eta}\right)d\eta,$$

$$w_2 = M\frac{k}{\mu\sqrt{t_G-1}}\int\limits_{1}^{t_F} F(\eta)\left(\sqrt{t_G-\eta}\cos\alpha-\sqrt{\eta-1}\sin\alpha\right)d\eta. \tag{25}$$

Результати обчислення довжин СП залежно від зміщення w_0 для випадку $h = l, \alpha = 60^\circ$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

τ_B/k	$w_0/(kl/\mu)$	d_1/l	d_2/l	$w_1/(kl/\mu)$	$w_2/(kl/\mu)$
0,1	0,14838	0,01182	0,00280	0,01317	0,00111
0,2	0,30194	0,04661	0,01170	0,05220	0,00471
0,3	0,45920	0,10251	0,02839	0,11561	0,01164
0,4	0,62308	0,17665	0,05626	0,20029	0,02438
0,5	0,79518	0,26396	0,10075	0,29888	0,04503
0,6	0,97773	0,35686	0,17154	0,39657	0,08374
0,7	1,16945	0,43460	0,28175	0,42294	0,15947
0,8	1,37376	0,43632	0,44901	0,35651	0,33193

Зі збільшенням зсуву w_0 спочатку СП ростуть пропорційно, потім ріст бічних СП пришвидшується. При ще більших зміщеннях w_0 ріст центральної СП гальмується: простежується ефект його екранування з боку бічних СП.

4. Розвиток однієї смуги пластичності на продовженні розрізу. Функцію $\tau_{yz} + i\tau_{xz}$ для цього випадку позначимо $\tau_1(\zeta)$. Її можна отримати з $\tau_3(\zeta)$ як таку, що відображає півсмугу $\operatorname{Re}\zeta > 0, 0 < \operatorname{Im}\zeta < h$ з нульовим розрізом на область G. Прийнявши у формулі (21) $t_F = t_E = 1$ і позначивши тепер $\zeta_3(t)$ через $\zeta_1(t)$, маємо

$$\zeta_1(t) = \frac{2h}{\pi}\ln\left(\sqrt{t}\ \mathrm{ch}\frac{\pi l}{2h} + \sqrt{t\ \mathrm{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - 1}\right). \tag{26}$$

Пара функцій $\tau_3(\zeta)$, $\zeta_1(t)$ визначає напружено-деформований стан півшару та характеристики пластичної смуги. Із формули (26) знайдемо $t(\zeta) = \mathrm{ch}^{-2}(\pi l/(2h))\mathrm{ch}^2(\pi\zeta/(2h))$ і, зокрема, $t_C = \mathrm{ch}^{-2}(\pi l/(2h))$. Підставимо $t = t_G$ у формулу (26) і знайдемо образ вершини СП у площині ζ при відображенні $\zeta_1(t)$, а, отже, й довжину смуги d_0 СП

$$d_0 = \frac{2h}{\pi} \ln \frac{\left(k^2 + \tau_B^2\right) \mathrm{ch}\frac{\pi l}{2h} + \sqrt{\left(k^2 + \tau_B^2\right)^2 \mathrm{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \left(k^2 - \tau_B^2\right)^2}}{k^2 - \tau_B^2} - l. \tag{27}$$

Відносне зміщення кінцевої та початкової точок СП w_{11} та кінцевої і початкової точок верхнього берега розрізу w_{12} можна записати як

$$w_{11} = \frac{1}{\mu} \mathrm{Im} \int_1^{t_G} \tau_3(t)\, d\zeta_1(t), \quad w_{12} = \frac{1}{\mu} \mathrm{Im} \int_{t_c}^{1} \tau_3(t)\, d\zeta_1(t)$$

або після відповідних обчислень

$$w_{11} = \frac{\left(k^2 - \tau_B^2\right) h\, \mathrm{ch}\frac{\pi l}{2h}}{2\pi\mu\tau_B} \int_1^{t_G} \sqrt{\frac{t_G - \eta}{\eta^2 \mathrm{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \eta}}\, d\eta,$$

$$w_{12} = \frac{\left(k^2 - \tau_B^2\right) h\, \mathrm{ch}\frac{\pi l}{2h}}{2\pi\mu\tau_B} \int_{\mathrm{ch}^{-2}\frac{\pi l}{2h}}^{1} \frac{\sqrt{t_G - \eta} - \sqrt{1 - \eta}}{\sqrt{\eta^2 \mathrm{ch}^2\frac{\pi l}{2h} - \eta}}\, d\eta. \tag{28}$$

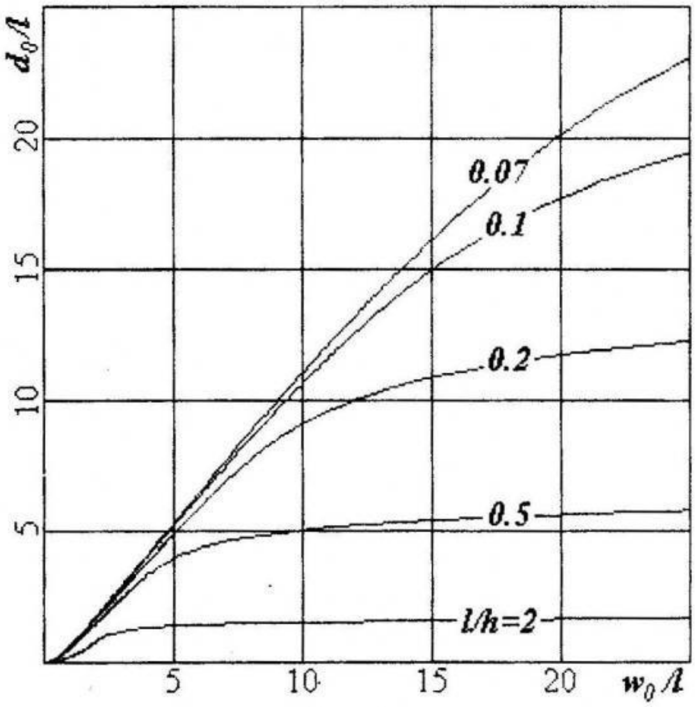


Рис. 4

Залежності довжини d_0 СП від зміщення $w_0 = w_{11} + w_{12}$ для деяких співвідношень h/l зображені на рис. 4. СП монотонно росте зі збільшенням w_0 і стає безмежно великою при наближенні τ_B до межі плинності. Безмежно великим тоді є також зміщення w_0.

Задане стале зміщення на верхній і нижній половинках торця півшару можна забезпечити, зчепивши їх із жорсткими накладками і приклавши до накладок відповідну протилежно спрямовані сили

$$Q = \int_0^h \tau_{xz}(0, y)dy.$$

На верхній половині торця півшару ($t \in [0, t_C]$) тому, подавши силу через $\tau_3(t)$ і $\zeta_1(t)$, матимемо

$$Q = \int_0^{t_C} |\tau(t)|\, d\, |\zeta(t)|.$$

Оскільки $|\zeta(t)| = (\pi/h)\mathrm{ch}(\pi l/(2h))/\sqrt{t(1-t/t_C)}$ для $t \in [0, t_C]$, то, врахувавши співвідношення (20), одержуємо

$$Q = \frac{kh\ \mathrm{ch}(\pi l/(2h))}{\pi\sqrt{t_G - 1}} \int_0^{t_C} \frac{\sqrt{t_G - t} - \sqrt{1-t}}{\sqrt{t(1-t/t_C)}} dt. \tag{29}$$

Для постійної глибини розрізу l і при фіксованому w_0 довжина СП є тим меншою, чим менша висота півшару h. Спочатку при малих w_0 довжина смуги пропорційна квадрату w_0; потім з ростом w_0 майже лінійно збільшується. При великих w_0 ріст сповільнюється. Характер росту зі збільшенням w_0 аналогічний зміні довжини центральної СП розгалуженої зони, утвореної трьома СП.

Довжина СП як функція прикладеної на торці сили Q зростає зі збільшенням сили.

Таблиця 2

w_0/l	$\delta_1/(kl/\mu)$	$\delta_3/(kl/\mu)$	$\delta_\infty/(kl/\mu)$
0,2	0,0326	0,0277	0,0260
0,4	0,1252	0,1064	0,1001
0,6	0,2715	0,2310	0,2240
0,8	0,4620	0,3932	0,3867
1,0	0,6882	0,5870	0,5831
1,2	0,9447	0,8070	0,8042

Проаналізуємо розглянуті зони за величиною $w(l, +0) - w(l, -0)$ – розрив зміщення, що виникає у вершині розрізу. Залежності розриву зміщення ($\delta_1 = 2w_{11}$ стосується зони, утвореної при $h = l$ одною СП; $\delta_3 = 2(w_1 + w_2)$ – трьома; $\delta_\infty = 2w_{01}$ – суцільної зони) від w_0 наведено у табл. 2. Розрив у вершині розрізу для розгалужених СП перевищує його значення для суцільної зони, причому можна стверджувати, що чим більше СП – тим точніше вони моделюють суцільну пластичну зону. У випадку однієї СП перевищення становить приблизно 20%; для трьох СП воно незначне – розриви зміщення для суцільної зони та зони, утвореної трьома смугами, практично збігаються.

Розрив зміщення у вершині вирізу при малих w_0 пропорційний квадрату w_0 для всіх трьох розглянутих форм зон. Суцільна зона гомотетично збільшується зі збільшенням w_0. Пропорційно ростуть СП розгалуженої зони, причому співвідношення між їхніми довжинами є такими, як і у випадку півбезмежного розрізу в тілі, навантаженому на нескінченності [6] (див. [7]). У разі низьких навантажень розвиток зон визначається коефіцієнтом інтенсивності напруження пружного розв'язку. При подальшому збільшенні w_0 змінюється форма суцільної зони, зростає відношення довжини бічної СП до центральної. Для таких рівнів навантажень знання коефіцієнта інтенсивності недостатнє, щоб врахувати пластичний ефект. Навіть при досить великих навантаженнях (w_0 дещо перевищує l, а напруження на торці півшару – $0,7k$) для $h = l$ розрив зміщення у вістрі розрізу мало відрізняється для розглянутих форм пластичних зон. Оскільки таке навантаження треба вважати дуже високими з погляду міцності цього тіла, можна стверджувати, що моделювання зони однією СП достатнє для задовільного врахування пластичного ефекту.

---

1. *Прокопишин І.А., Сулим Г.Т., Хлєбніков Д.Г.* Квазістатичне відшарування плоско здеформованої пластини від вінклерової основи // Фіз. - хім. мех. матеріалів. – 1999. – N 5. – С.33-38.
2. *Лазько В.А., Мачуга О.С.* Определение границ межслойных дефектов в слоистых анизотропных пластинах // Механика композит. матер. – 1985. – N 6. – С.1112-1115.
3. *Мачуга О.С., Пелех Б.Л.* О сопротивлении разрушению слоистых анизотропных пластин с дефектами на границе раздела // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1986. – N 1. – С.168-174.
4. *Кривень В.А.* Пружнопластична задача для півпростору з крайовим розрізом при заданому зміщенні на границі півпростору // Фіз. - хім. мех. матеріалів. – 1993. – N 4. – С.70-74.
5. *Клюшников В.Д.* Математическая теория пластичности. - М.,1979.
6. *Кривень В.А.* Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи о продольном сдвиге тела с трещиной // Физ.- хим. мех. материалов. – 1985. – N 6. – С.10-16.
7. *Витвицький П.М., Кривень В.А.* Про структуру пластичних зон біля вершини тріщини при антиплоскій деформації // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – N 4. – С.32-36.

PLASTIC ZONES DEVELOPMENT AT SHIFT BAND WEDGING

Vasyl' Kryven', Georgiy Sulym

Ivan Pulyui university of technology in Ternopil'
56 Rus'ka Str. 79000 Ternopil', Ukraine
Ivan Franko National University in Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Anti-plane plastic-elastic problem for semi-infinite band with a plane cut parallel to band side is solved. The cut begin with band edge, dwiding it jn two equal parts. Deformation is caused by constant displacements on edge upper and low lyind halfs. Case of continualplastic zone and case of zones formed by one and three plastic layers are considered. Zone edge, layers lengths and displacement jump displacement at the cut vertex are found. Comparisonal analysis of the result is given.

Key words: Anti-plane plastic-elastic problem.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.2001

Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.148-154

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.148-154

ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПРЯМОЛІНІЙНИХ ТРІЩИН, ПАРАЛЕЛЬНИХ ДО ЛІНІЇ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ, ІЗ УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ БЕРЕГІВ

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Іван ЗВІЗЛО
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Із використанням класичної теорії згину пластин і методів теорії функцій комплексної змінної досліджена задача згину кусково-однорідної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів і періодичною системою співвісних тріщин, паралельних до неї. Вважається, що у процесі деформування пластини береги тріщин контактують. Розв'язок задачі зведено до системи інтегральних рівнянь, яку розв'язано за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів і контактного тиску для різних геометричних і механічних параметрів задачі.

Ключові слова: кусково-однорідна пластина, тріщина, згинальні моменти.

Дослідимо задачу про згин кусково-однорідної ізотропної пластини, яка складається з двох спаяних півплощин, в одній із них є періодична система прямолінійних тріщин завдовжки $2l$, які паралельні до лінії поділу матеріалів, і їх береги контактують внаслідок дії сталих згинних моментів на нескінченності (див. рис. 1).

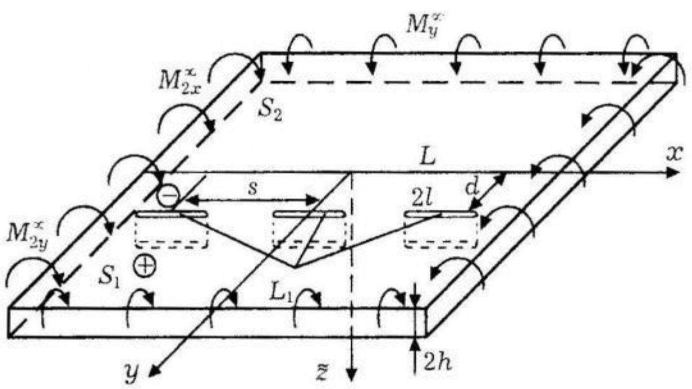


Рис. 1. Схема задачі

Позначмо товщину пластини $2h$, лінію поділу матеріалів — L, частину прямої, де розміщена тріщина — L_1. Виберімо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ у серединній площині пластини, провівши вісь Ox уздовж лінії поділу матеріалів. Припустімо, що центри тріщин перебувають на відстані d від лінії поділу матеріалів, а центри двох суміжних тріщин на відстані s. Півплощину, для якої

$y > 0$ ($y < 0$), позначмо S_1 (S_2). Величинам, які пов'язані із півплощиною S_j, приписуватимемо індекс j, причому він набуває два значення $j = 1$ або $j = 2$.

Припускатимемо, що на лінії поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Контакт берегів тріщини розуміємо як у праці [1], напружений стан пластини подаємо у вигляді суперпозиції плоского напруженого стану і згину пластини, що описується класичною теорією.

Граничні умови на берегах тріщини запишімо у вигляді

$$\sigma_y^{\pm} - i\tau_{xy}^{\pm} = -\frac{N}{2h}, \qquad M_y^{\pm} + i\int P^{\pm}\,dx = M_y \quad \text{на } L_1, \tag{1}$$

$$[v] = -h[\partial_y w], \qquad M_y = hN \quad \text{на } L_1, \tag{2}$$

σ_y, τ_{xy} — компоненти тензора напружень, а u, v — проекції вектора переміщення на осі Ox, Oy у плоскому напруженому стані; N — контактні зусилля, M_y P — згинальний момент і узагальнена поперечна сила Кірхгофа відповідно; значками '+' і '−' позначено граничне значення функцій, якщо z прямує до L_1, причому w — прогин пластини; $z = x+iy$ і $y \to d\pm 0$; $[f] = f^+ - f^- = f(x, d+0) - f(x, d-0)$; $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$; $i = \sqrt{-1}$.

Для визначення плоского напруженого стану скористаймося комплексними потенціалами Колосова-Мусхелішвілі [2] $\Phi_{Pj}(z)$ і $\Psi_{Pj}(z)$ для кожної півплощини, подавши їх у вигляді

$$\Phi_{Pj}(z) = \Phi_{P0}(z) + \Phi_P^{(j)}(z), \qquad \Psi_{Pj}(z) = \Psi_{P0}(z) + \Psi_P^{(j)}(z), \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{P0}(z) &= \frac{1}{2s}\int\limits_{-l}^{l} \operatorname{ctg}\frac{(t-z+id)\pi}{s} g'(t)\,dt, \\ \Psi_{P0}(z) &= \frac{1}{2s}\int\limits_{-l}^{l} \left(\overline{g'(t)} - g'(t)\right)\operatorname{ctg}\frac{(t-z+id)\pi}{s}\,dt - \\ &\quad - \frac{\pi}{2s^2}(z-2id)\int\limits_{-l}^{l} g'(t)\operatorname{cosec}^2\frac{(t-z+id)\pi}{s}\,dt, \end{aligned} \tag{4}$$

де $g'(t) = i(1+\kappa_1)(2\mu_1)^{-1}\partial_x[u+iv]$, $\kappa_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}$, ν — коефіцієнт Пуассона, μ — модуль зсуву, $\Phi_P^{(j)}(z)$, і $\Psi_P^{(j)}(z)$ — голоморфні в області S_j функції, які на нескінченості заникають.

Аналітично продовжмо функцію $\Phi_P^{(j)}(z)$ із області S_j в область S_{3-j} за формулою

$$\Phi_P^{(j)}(z) = -\overline{\Phi}_P^{(j)}(z) - z\overline{\Phi}'^{(j)}_P(z) - \overline{\Psi}_P^{(j)}(z), \tag{5}$$

тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини можна записати співвідношення:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} &= \Phi_{P0}(z) + \Phi_P^{(j)}(z) + R_j(z), \\ 2\mu_j\partial_x\left(u^{(j)} + iv^{(j)}\right) &= \kappa_j\left(\Phi_{P0}(z) + \Phi_P^{(j)}(z)\right) - R_j(z), \end{aligned} \tag{6}$$

де $R_j(z) = \overline{\Phi_{P0}(z)} + z\overline{\Phi'_{P0}(z)} + \overline{\Psi_{P0}(z)} + \Phi_P^{(j)}(\bar{z}) + (z-\bar{z})\overline{\Phi_P^{(j)}(z)}$.

Граничні умови на лінії поділу матеріалів матимуть вигляд

$$\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} = \sigma_y^{(2)} - i\tau_{xy}^{(2)}, \qquad u^{(1)} + iv^{(1)} = u^{(2)} + iv^{(2)}, \quad \text{на } L. \tag{7}$$

Уведімо функції

$$\Theta(z) = \Phi_P^{(1)}(z) + \Phi_P^{(2)}(z), \qquad z \in S_1 + S_2, \tag{8}$$

$$\Phi(z) = \mu_{3-j}\kappa_j\,\Phi_P^{(j)}(z) - \mu_j\,\Phi_P^{(3-j)}(z), \qquad z \in S_j. \tag{9}$$

Враховуючи (6), з першої умови (7) отримаємо

$$\Theta^+(x) - \Theta^-(x) = 0, \qquad x \in L. \tag{10}$$

Якщо розв'язати задачу лінійного спряження (10), то знайдемо

$$\Theta(z) = 0. \tag{11}$$

Проробивши подібні викладки з другою граничною умовою (7), матимемо

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \left(A_4 A_1 \left(\overline{\Phi}_{P0}(z) + z\overline{\Phi}'_{P0}(z) + \overline{\Psi}_{P0}(z)\right),\ \ z \in S_1\right) \cup \\ \cup \left(\Phi(z) = -A_3 A_2\,\Phi_{P0}(z),\ \ z \in S_2\right),\end{gathered} \tag{12}$$

де $A_3 = A_2^{-1}(\mu_1\kappa_2 - \mu_2\kappa_1)$, $A_4 = A_1^{-1}(\mu_2 - \mu_1)$, $A_j = \mu_j + \mu_{3-j}\kappa_j$.

Враховуючи (11) і (12), на підставі (8) і (9) отримаємо

$$\Phi_P^{(j)}(z) = \left(A_j^{-1}\,\Phi(z),\ \ z \in S_j\right) \cup \left(-A_{3-j}^{-1}\,\Phi(z),\ \ z \in S_{3-j}\right). \tag{13}$$

Одну з граничних умов на берегах тріщини запишемо у вигляді

$$\left(\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)}\right)^+ + \left(\sigma_y^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)}\right)^- = -\frac{N}{h}, \quad \text{на } L_1. \tag{14}$$

Якщо тепер врахувати (6), (4), (13), то на підставі (14) отримаємо

$$\int_{-l}^{l} \left[\Pi_{11}(t,x)g_1'(t) + \Pi_{12}(t,x)g_2'(t)\right] dt = 0, \qquad x \in [-l;l], \tag{15}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} \left[\Pi_{21}(t,x)g_1'(t) + \Pi_{22}(t,x)g_2'(t)\right] = N, \qquad x \in [-l;l], \tag{16}$$

де $g'(t) = g_1'(t) + ig_2'(t)$, $\Pi_{11}(t,x) = \Pi_{22}(t,x)$,

$$\begin{aligned}\Pi_{11}(t,x) = {} & -2h\pi\left[\frac{A_3 + A_4}{2s}\operatorname{ctg}_2(t,x) + \right. \\ & \left. + \frac{4\pi^2 d^2 A_3}{s^3}\left(c_2(t,x)\operatorname{ctg}_1(t,x) + c_1(t,x)\operatorname{ctg}_2(t,x)\right)\right], \\ \Pi_{ij}(t,x) = {} & (-1)^j 2h\pi\left\{\frac{1}{s}\operatorname{ctg}\frac{(t-x)\pi}{s} + \frac{A_4 - A_3}{2s}\operatorname{ctg}_1(t,x) + \right. \\ & \left. + A_4\left[\frac{4\pi^2 d^2}{s^3}\left(c_2(t,x)\operatorname{ctg}_2(t,x) - c_1(t,x)\operatorname{ctg}_1(t,x)\right) + (-1)^j\frac{2\pi d}{s^2}c_2(t,x)\right]\right\},\end{aligned} \tag{17}$$

$$\operatorname{ctg}_1(t,x) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{csch}^2\beta}{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{cth}^2\beta}, \quad \operatorname{ctg}_2(t,x) = -\frac{\operatorname{cth}\beta \operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{cth}^2\beta}, \quad \alpha = \frac{t-x}{s}\pi,$$

$$c_1(t,x) = 2\frac{1-\cos 2\alpha \operatorname{ch} 2\beta}{(\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\beta)^2}, \quad c_2(t,x) = -2\frac{\sin 2\alpha \operatorname{sh} 2\beta}{(\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\beta)^2}, \quad \beta = \frac{2d}{s}\pi.$$

Для дослідження напруженого стану, пов'язаного зі згином пластини, введімо комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ та $\Psi_{3j}(z)$. Тоді згідно з [4], можна записати

$$\partial_x(\partial_x w + i\partial_y w) = \Phi_{3j}(z) + \tilde{R}_j(z), \ \ 2\tilde{\mu}_j\left(-M_y + i\int P\,dx\right) = \tilde{\kappa}_j\,\Phi_{3j}(z) - \tilde{R}_j(z), \quad (18)$$

де $\tilde{R}_j(z) = \overline{\Phi_{3j}(z)} + z\overline{\Phi'_{3j}(z)} + \overline{\Psi_{3j}(z)}$,

$$\tilde{\mu}_j = \frac{1}{2D_j(1-\nu_j)}, \qquad \tilde{\kappa}_j = \frac{3+\nu_j}{1-\nu_j}, \qquad D_j = \frac{2E_j h^3}{3(1-\nu_j^2)}.$$

Комплексні потенціали $\Phi_{3j}(z)$ і $\Psi_{3j}(z)$ подамо у вигляді

$$\Phi_{3j}(z) = \Phi_{30}(z) + \Phi_3^{(j)}(z) + \Gamma_j, \qquad \Psi_{3j}(z) = \Psi_{30}(z) + \Psi_3^{(j)}(z) + \Gamma'_j,$$

де

$$\Gamma_j = -\frac{M_{jx}^\infty + M_y^\infty}{4D_j(1+\nu_j)}, \qquad \Gamma'_j = \left(M_y^\infty - M_{jx}^\infty\right)\tilde{\mu}_j,$$

$$\Phi_{30}(z) = \frac{1}{2s}\int_{-l}^{l} \operatorname{ctg}\frac{(t-x+id)\pi}{s} Q'(t)\,dt, \qquad Q(t) = \frac{\partial_x(\partial_y w_1 - i\partial_x w_1)}{1+\tilde{\kappa}_j},$$

$$\Psi_{30}(z) = -\frac{1}{2s}\int_{-l}^{l}\left[\tilde{k}_1\overline{Q(t)} + Q(t)\right]\operatorname{ctg}\frac{(t-z+id)\pi}{s}\,dt -$$

$$-\frac{\pi}{2s^2}(z-2id)\int_{-l}^{l} Q(t)\operatorname{cosec}^2\frac{(t-z+id)\pi}{s}\,dt,$$

$\Phi_3^{(j)}(z)$ і $\Psi_3^{(j)}(z)$ голоморфні в S_j і заникаючі на нескінченості функції.

Продовжимо аналітично функцію $\Phi_3^{(j)}(z)$ із області S_j в область S_{3-j} за формулою, аналогічною до формули (5) і введемо функції

$$\begin{aligned} \Theta_3(z) &= \Phi_3^{(1)}(z) + \Phi_3^{(2)}(z), && z \in S_1 + S_2, \\ \Phi_3(z) &= \tilde{\mu}_{3-j}\tilde{\kappa}_j\,\Phi_3^{(j)}(z) - \tilde{\mu}_j\,\Phi_3^{(3-j)}(z), && z \in S_j, \end{aligned}$$

тоді, виходячи з умов ідеального механічного контакту, як це зроблено в плоскій задачі, отримаємо задачі лінійного спряження для визначення функцій $\Theta_3(z)$ і $\Phi_3(z)$, тобто можна записати явний вигляд для функцій $\Phi_3^{(j)}(z)$. Використовуючи граничні умови на берегах тріщини та враховуючи (18), отримаємо

$$A + \int_{-l}^{l}\left[z_{11}(t,x)Q_1(t) + z_{12}(t,x)Q_2(t)\right]\,dt = 0, \qquad x \in [-l;l], \qquad (19)$$

$$M_y^{(1)} = M_y^{\infty} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} [z_{21}(t,x)Q_1(t) + z_{22}(t,x)Q_2(t)]\,dt, \qquad x \in [-l;l], \tag{20}$$

де $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$; A — невідома стала,

$$z_{22}(t,x) = -z_{11}(t,x) = \frac{\pi}{\tilde{\mu}_1 s}\left[\frac{\tilde{k}_1^2\tilde{A}_4 + \tilde{A}_3}{4}\operatorname{ctg}_2(t,x) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\pi^2 d^2\tilde{A}_4}{s^2}\left(\operatorname{ctg}_2(t,x)c_1(t,x) + c_2(t,x)\operatorname{ctg}_1(t,x)\right)\right],$$

$$z_{ij}(t,x) = \frac{\pi}{\tilde{\mu}_1 s}\left\{-\frac{\tilde{k}_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-x}{s}\pi + \frac{\tilde{k}_1^2 A_4 - \tilde{A}_3}{4}\operatorname{ctg}_1(t,x) + (-1)^{j+1}\frac{\tilde{A}_4\pi d}{s}\left[\tilde{k}_1 c_2(t,x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^j\frac{2\pi d}{s}\left(c_1(t,x)\operatorname{ctg}_1(t,x) - c_2(t,x)\operatorname{ctg}_2(t,x)\right)\right]\right\}, \qquad i \neq j,$$

$$\tilde{A}_3 = A_2^{-1}\left(\tilde{\mu}_1\tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2\tilde{\kappa}_1\right), \qquad \tilde{A}_4 = \tilde{A}_1(\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1), \qquad \tilde{A}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{3-j}\tilde{\kappa}_j.$$

Підставляючи (20) і (16) у другу граничну умову (2), знайдемо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l}\left\{\left[\alpha\beta\Pi_{21}(t,x) - z_{21}(t,x)\right]Q_1(t) + z_{22}(t,x)Q_2(t) + \alpha\Pi_{22}(t,x)g_2'(t)\right\}dt = M_Y^{\infty},$$

$$|x| < l, \qquad \beta = -\frac{E_1 h}{1-\nu_1}, \qquad \alpha = h. \tag{21}$$

Співвідношення (21), (19), (15) дають систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $g_2'(t)$, а також сталої A, причому $g_1'(t) = \beta Q_1(t)$.

Одержану систему рівнянь доповнюємо залежностями

$$\int\limits_{-l}^{l} Q_j(t)\,dt = 0, \qquad \int\limits_{-l}^{l} g_2'(t)\,dt = 0, \qquad \int\limits_{-l}^{l} tQ_2(t)\,dt = 0, \tag{22}$$

які виражають однозначність переміщень, прогинів і кутів повороту під час обходу контура тріщини L_1.

Зауважмо таке, якщо в рівнянні (21) припустити, що $\alpha = 0$, і приєднати до нього рівняння (19), то отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь для кусково-однорідної пластини з тріщиною без урахування контакту її берегів. Крім того, як частковий випадок задачі можна одержати розв'язки відповідних задач для півплощини з вільним краєм ($\mu_2 = 0$) або жорстко затиснутим краєм ($\mu_2 = \infty$).

Систему рівнянь (15), (19), (21), (22) розв'язуємо чисельно методом механічних квадратур [3].

Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів знайдемо, використовуючи формули

$$\left(K_1^{\pm} - iK_2^{\pm}, k_1^{\pm} - ik_2^{\pm}\right) = \pm\lim_{t\to\pm l}\sqrt{(l^2-t^2)l^{-1}}\left(D_1(3+\nu_1)Q(t) - hg'(t)\right).$$

Провели числовий аналіз задачі для $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$. На рис. 2–4 подані зведені коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль залежно від параметра $n = E_2/E_1$ для різних значень відстаней від лінії поділу матеріалів $\tilde{d} = d/l$ та між центрами тріщин $\tilde{s} = s/l$. Рис. 5 зображає розподіл контактного тиску у випадку $\tilde{d} = 0,1$ уздовж тріщини за різних значень $\tilde{s}$ та n.

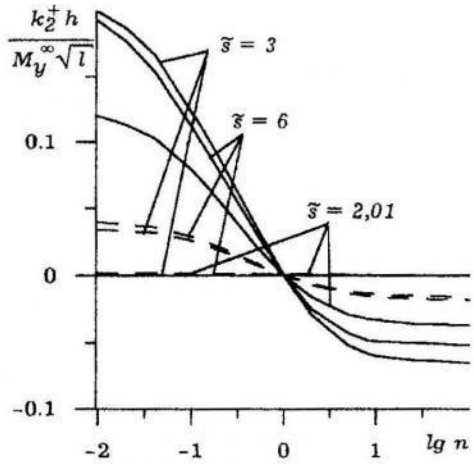


Рис. 2

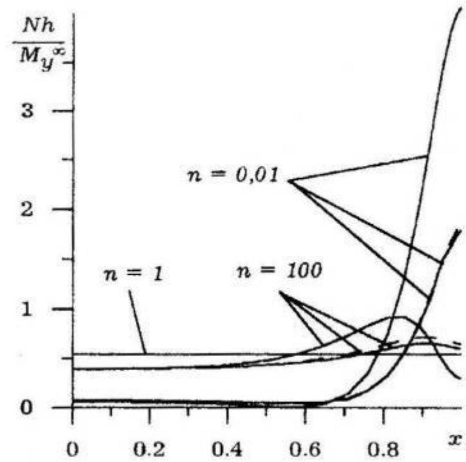


Рис. 3

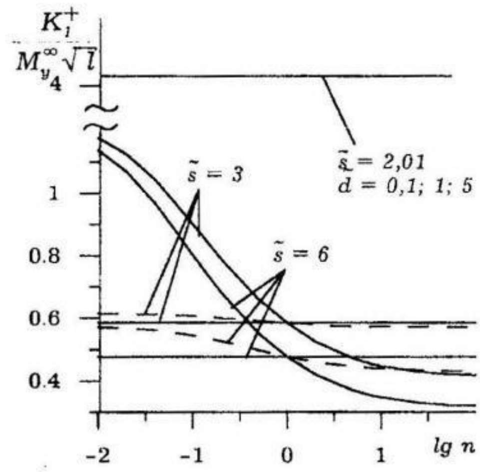


Рис. 4

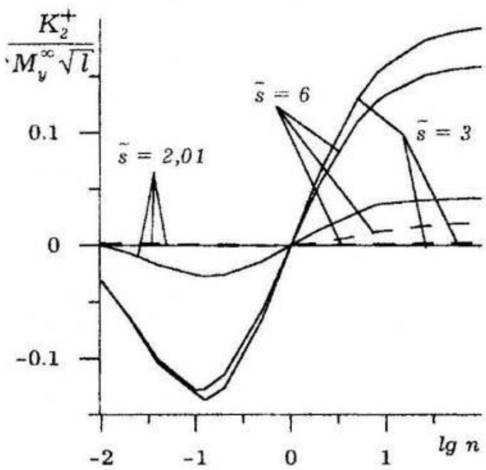


Рис. 5

Зауважмо, що коефіцієнт інтенсивності $k_1^\pm$ визначають через $K_1^\pm$ за формулою $k_1^\pm h = \frac{3(1+\nu_1)}{2(3+\nu_1)} K_1^\pm$; суцільні, штрихові та пунктирні лінії на рис. 2–4 відповідають значенням $\tilde{d} = 0,1$, $\tilde{d} = 1$, $\tilde{d} = 5$, а на рис. 5 — $\tilde{s} = 2,01$, $\tilde{s} = 3$, $\tilde{s} = 6$ відповідно.

---

1. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР.Сер.А. Фіз.-мат. та тех.наук. 1998. N 7. С. 49–51.

2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К., 1976.

4. *Прусов И. А.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К., 1981.

BENDING OF A PIECE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH A PERIODIC SYSTEM OF STRAIGHT CRACKS WHICH ARE PARALLEL TO INTERFACE WITH THE ACCOUNT OF CONTACT OF CRACK FACES

Viktor Opanasovych, Ivan Zvizlo

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Using classical theory of plate bending and methods of the theory of functions of complex variable the problem about bending of a piece-homogeneous plate with straight interface and periodic collinear cracks which are parallel to it is investigated. t is assumed that the crack faces are in contact during deformational process. Solution of the problems is reduced to the system of integral equations, which is solved by mechanical quadratures method. Numerical analysis of force and moments intensit factors and contact force under the different geometrical and mechanical parameters of the problem is done.

Key words: piece-homogeneous plate, crack, bending moments

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.155–160

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.155–160

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ТРІЩИНАМИ РІЗНИХ ДОВЖИН УЗДОВЖ ДУГИ КОЛА

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Наталія КОПОТЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Пропонуємо підхід до дослідження напружено-деформованого стану ізотропної пластини з двома різними завдовжки тріщинами уздовж дуги кола за умови, що береги тріщин зазнають гладкого контакту уздовж усієї довжини, під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Частковий випадок цієї задачі розглянутий у праці [2] для однакових задовжки тріщин, які симетрично розміщені відносно центра кола. Розв'язок задачі зведений до інтегрального рівняння, яке відрізняється від інтегрального рівняння згаданої праці.

Ключові слова: пластина, тріщина, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Виберемо початок декартової системи координат Oxy у центрі кола радіусом R, уздовж дуг якого розміщені тріщини. Вісь Ox проведемо через середину дуги, де розміщена тріщина, яка характеризується центральним кутом 2φ. Кути, які відповідають кінцям другої тріщини, позначимо φ_1 і φ_2. Частину дуги кола, де розміщені тріщини, позначимо L, область у середині кола — S^+, а зовні кола — S^-. Нехай N_1 і N_2 головні напруження на нескінченності, крім того головна вісь, що відповідає N_1, утворює кут γ з віссю Ox (рис. 1)

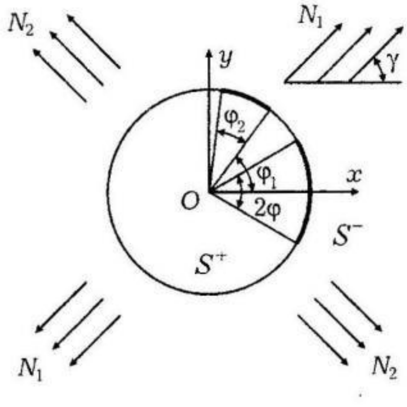


Рис. 1. Схема розміщення тріщин у пластині

Згідно з формулюванням задачі граничні умови матимуть вигляд

$$\sigma_{rr}^+ = \sigma_{rr}^- = \sigma_{rr}, \quad \sigma_{r\vartheta}^+ = \sigma_{r\vartheta}^- = 0, \quad u_r^+ - u_r^- = 0, \quad \text{на } L, \tag{1}$$

де σ_{rr}, $\sigma_{r\vartheta}$ — компоненти тензора напружень у полярній системі координат $(r)(\vartheta)$ з початком в центрі кола радіусом R, u_r, u_ϑ — проекції вектора переміщення на осі (r) і (ϑ) як у праці [1]; значками '+', '−' позначено граничні значення відповідних функцій при прямуванні точки пластини до лінії L з областей S^+ і S^-.

Уведемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини матимемо співвідношення [3]

$$\sigma_{rr} + i\sigma_{r\vartheta} = \Phi(z) - \frac{R^2}{r^2}\,\Omega\left(\frac{R^2}{\bar z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left(\overline{\Phi(z)} - \bar z\overline{\Phi'(z)}\right), \quad z = r\,e^{i\vartheta} \tag{2}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left((u_r + iu_\vartheta)\,e^{i\vartheta}\right) = iz\left(\kappa\,\Phi(z) + \frac{R^2}{r^2}\,\Omega\left(\frac{R^2}{\bar z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left(\overline{\Phi(z)} - \bar z\overline{\Phi'(z)}\right)\right), \tag{3}$$

де

$$\Omega(z) = -\overline{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\overline{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right),$$

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль зсуву, E — модуль Юнга, ν — коефіцієнт Пуассона; $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоскої деформації та $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для узагальненого плоского напруженого стану.

Функції $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ в околі безмежно віддаленої точки та нуля можна подати у вигляді [3]

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Gamma + O\left(\dfrac{1}{z^2}\right), & z \to \infty, \\ A_1 + O(z), & z \to 0, \end{cases} \qquad \Omega(z) = \begin{cases} -\overline{A_1} + O\left(\dfrac{1}{z^2}\right), & z \to \infty, \\ \dfrac{\overline{\Gamma}' R^2}{z^2} + O(1), & z \to 0, \end{cases} \tag{4}$$

де $\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)\,e^{-2i\gamma}$, A_1 — невідома стала.

Враховуючи (2), з граничної умови (1) одержимо

$$(\Phi(t) + \Omega(t))^+ - (\Phi(t) + \Omega(t))^- = 0, \quad t \in L \tag{5}$$

Враховуючи (4) та розв'язуючи задачу лінійного спряження (5), отримаємо

$$\Omega(z) = -\Phi(z) + \Gamma - \overline{A_1} + \frac{\overline{\Gamma}' R^2}{z^2}. \tag{6}$$

Підставляючи (6) у (3) та враховуючи останню граничну умову (1), матимемо таку задачу лінійного спряження:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{B}{t}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(e^{i\vartheta}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)\right), \quad t = \mathrm{R}e^{i\vartheta}, \tag{7}$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$\Phi(z) = \frac{B}{2\pi i}\int\limits_L \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(e^{i\upsilon}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)\right)\frac{dt}{t - z} + \Gamma, \quad t = \mathrm{R}e^{i\upsilon}, \tag{8}$$

де $B = 2\mu/(\kappa + 1)$.

На основі (8) отримаємо

$$\mathrm{Re}\left(\Phi^+(t) + \Phi^-(t)\right) = -\frac{B}{\pi R}\int\limits_{L_1}\frac{\partial}{\partial\upsilon}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)\mathrm{Ln}\left|\sin\frac{\upsilon - \vartheta}{2}\right| d\upsilon + 2\Gamma, \tag{9}$$

$$\operatorname{Im}\left(\Phi^+(t)+\Phi^-(t)\right) = -\frac{B}{2\pi R}\int\limits_{L_1}\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)\operatorname{ctg}\frac{v-\vartheta}{2} + v\frac{\partial}{\partial v}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)\right)dv, \tag{10}$$

де $L_1 = [\varphi_1, \varphi_2] \cup [-\varphi, \varphi]$.

Підставивши (6) у (2), враховуючи першу і другу граничні умови (1), та виконавши прості перетворення, отримаємо

$$\sigma_{rr} = \operatorname{Re}\left(\Phi^+(t)+\Phi^-(t)\right) + \frac{1}{2}(N_1-N_2)\cos 2(\gamma-\vartheta) \tag{11}$$

$$\operatorname{Im}\left(\Phi^+(t)+\Phi^-(t)\right) = f_1(\vartheta), \qquad t \in L \tag{12}$$

де

$$f_1(\vartheta) = -\frac{1}{2}(N_1-N_2)\sin 2(\gamma-\vartheta) - \frac{B}{2\pi R}\int\limits_{L_1} v\frac{\partial}{\partial v}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)dv.$$

Підставляючи (9) в (11), знайдемо вираз для визначення контактних напружень σ_{rr}

$$\sigma_{rr} = -\frac{B}{R\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\partial}{\partial v}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)\operatorname{Ln}\left|\sin\frac{v-\vartheta}{2}\right|dv + 2\Gamma + \frac{1}{2}(N_1-N_2)\cos 2(\gamma-\vartheta) \tag{13}$$

Увівши позначення $y(\vartheta) = \frac{B}{R}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(u_\vartheta^+ - u_\vartheta^-\right)$ та підставивши (10) у (12), одержимо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1} y(t)\operatorname{ctg}\frac{t-\vartheta}{2},dt = f(\vartheta), \qquad \vartheta \in L_1, \tag{14}$$

де $f(\vartheta) = (N_1-N_2)\sin 2(\gamma-\vartheta)$.

Рівняння (14) доповнимо співвідношеннями, які виражають однозначність переміщень при обході контурів тріщин

$$\int\limits_{-\varphi}^{\varphi} y_1(t)\,dt = 0, \qquad \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} y_2(t)dt = 0, \tag{15}$$

де $y_1(\vartheta) = y(\vartheta)$, $|\vartheta| \leqslant \varphi$, $y_2(\vartheta) = y(\vartheta)$, $\varphi_1 \leqslant \vartheta \leqslant \varphi_2$.

Систему інтегральних рівнянь (14), (15) для знаходження невідомої функції $y(\vartheta)$ розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Після перетворень прийдемо до системи алгебричних рівнянь для знаходження вузлових значень шуканої функції

$$\begin{gathered}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2}\sum_{m=1}^{M} U_i(t_m)G_{ij}(t_m, x_r) = z_j(x_r), \qquad r = \overline{1, M-1}, \\ \sum_{m=1}^{M} U_j(t_m) = 0, \qquad j = 1, 2,\end{gathered} \tag{16}$$

де $x_r = \cos\frac{\pi R}{M}$, $t_m = \cos\frac{2m-1}{2M}\pi$, $z_1(x) = f(\varphi x)$, $z_2(x) = f(ax+b)$,

$$U_1(t) = y(\varphi t)\sqrt{1-t^2}, \qquad U_2(t) = y(at+b)\sqrt{1-t^2},$$

$$G_{11}(t,x) = \varphi \operatorname{ctg}\frac{(t-x)\varphi}{2}, \qquad G_{12}(t,x) = \varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi t - ax - b}{2},$$

$$G_{21}(t,x) = a \operatorname{ctg}\frac{at+b-\varphi x}{2}, \qquad G_{22}(t,x) = a \operatorname{ctg}\frac{(t-x)a}{2},$$

$$a = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \qquad b = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}.$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) знайдемо за формулами

$$K_{1j}^{\pm} = 0, \qquad K_{2j}^{\pm} = \mp\sqrt{Rb_j}U_j(\pm 1) \qquad (j = 1,2), \tag{17}$$

де $b_1 = \varphi$, $b_2 = a$ і

$$U_j(1) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+1}U_j(t_m)\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi,$$

$$U_j(-1) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+M}U_j(t_m)\operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi.$$

Враховуючи (13), контактні напруження можна подати у вигляді

$$\sigma_{rr} = (N_1 - N_2)\left(\frac{\cos 2(\gamma-\vartheta)}{2} - \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{M} b_j \operatorname{Ln}\left|\sin\frac{t_{jm}-\vartheta}{2}\right| U_j(t_m)\right) + \frac{(N_1+N_2)}{2}, \tag{18}$$

де $t_{1m} = \varphi t_m$, $t_{2m} = at_m + b$.

Для визначення залежності між кутом розкриття тріщини та напруженим станом на нескінченності, за якого відбуватиметься повний контакт, подамо контактні напруження σ_{rr} для $|\vartheta| < \varphi$ та $\varphi_1 < \vartheta < \varphi_2$ у вигляді

$$\sigma_{rr}(\vartheta)/N_1 = 1 - \lambda(\vartheta) + \nu\lambda(\vartheta), \tag{19}$$

де

$$\lambda(\vartheta) = \frac{1}{2} - \left(\frac{\cos 2(\gamma-\vartheta)}{2} - \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{2}\sum_{m=1}^{M} b_j \operatorname{Ln}\left|\sin\frac{t_{jm}-\vartheta}{2}\right| U_j(t_m)\right), \quad \nu = \frac{N_2}{N_1}. \tag{20}$$

Користуючись (20) знайдемо максимальне та мінімальне значення $\lambda(\vartheta)$. У випадку $|\vartheta| \leqslant \varphi$ позначимо їх відповідно $\lambda_{1\max}(\vartheta)$ та $\lambda_{1\min}(\vartheta)$, а у випадку $\varphi_1 \leqslant \vartheta \leqslant \varphi_2$ — $\lambda_{2\max}(\vartheta)$ і $\lambda_{2\min}(\vartheta)$.

Уведемо позначення

$$\nu_{j\max} = 1 - 1/\lambda_{j\max}, \qquad \nu_{j\min} = 1 - 1/\lambda_{j\min}, \qquad j = 1,2. \tag{21}$$

Як видно з (19), за кожного значення кута ϑ контактні напруження лінійно залежать від ν, тому, якщо ν задовольняє нерівність $\nu_{1\min} \leqslant \nu \leqslant \nu_{1\max}$, то береги тріщини, яка характеризується центральним кутом 2φ, повністю контактуватимуть, якщо ж $\nu_{2\min} \leqslant \nu \leqslant \nu_{2\max}$, то контактуватимуть береги іншої тріщини уздовж усієї довжини. Увівши позначення $\nu_{\min} = \max[\nu_{1\min}, \nu_{2\min}]$ та $\nu_{\max} = \min[\nu_{1\max}, \nu_{2\max}]$, одержимо, що повний контакт відбуватиметься для всіх $\nu < \nu_{\max}$ і для всіх $\nu > \nu_{\min}$ незалежно від значення кутів φ, φ_1, φ_2 і γ.

Провели числовий аналіз контактних напружень та КІН для різних значень параметрів задачі. Зауважимо, що у частковому випадку, коли $\varphi_1 = \pi - \varphi$, а $\varphi_2 = \pi + \varphi$ (тріщини мають однакові довжини та симетрично розташовані стосовно осей координат) при $\gamma = 0$, результати збігаються з числовими значеннями, які опубліковані у праці [2].

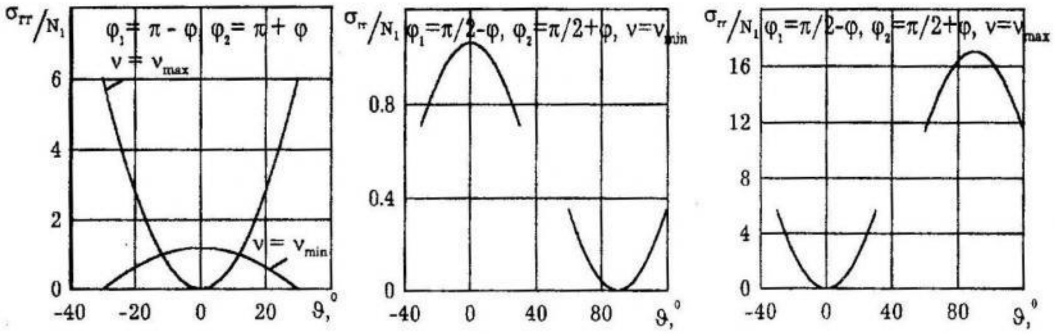


Рис. 2. Залежність контактних напружень від зміни кута ϑ для $\varphi = \pi/6$

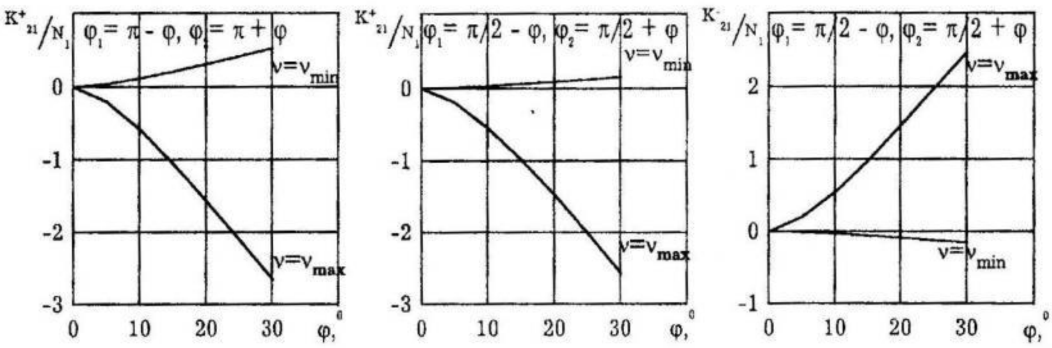


Рис. 3. Залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень від кута φ

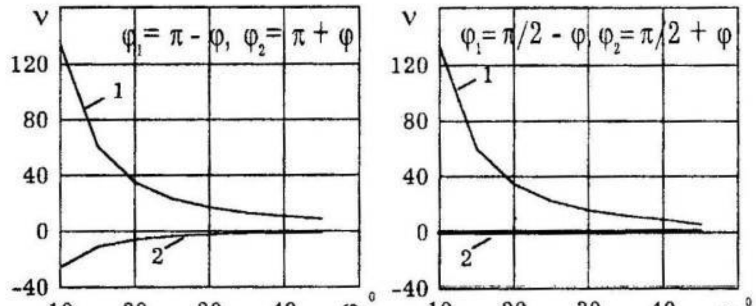


Рис. 4. Залежність відношення $\nu = N_2/N_1$ від кута розкриття тріщини φ

На рис. 2 зображено розподіл контактних напружень σ_{rr}/N_1 на берегах двох тріщин, у випадках, коли $\nu = \nu_{\min}$ та $\nu = \nu_{\max}$ для різних розміщень однакових завдовжки тріщин у пластині.

Поведінку КІН залежно від кута φ зображено на рис. 3, окрім того, для випадку рівних симетричних тріщин $K_{21}^- = -K_{21}^+ = K_{22}^- = -K_{22}^+$, а для випадку

$\varphi_1 = \pi/2 - \varphi$ та $\varphi_2 = \pi/2 + \varphi$ — $K_{22}^{+} = K_{21}^{-}$ і $K_{22}^{-} = K_{21}^{+}$. На рис. 4 зображено відношення головних напружень на нескінченності $\nu = N_2/N_1$ залежно від кута розкриття тріщини. $\nu_{\max}$ відповідає крива 1, а $\nu_{\min}$ — крива 2, окрім того, для будь-якого $\nu_{\min} < \nu < \nu_{\max}$ відбувається повний контакт уздовж тріщин.

1. *Мусхелишвили И. Н.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. *Грилицький Д. В., Луцишин Р. М.* Напруження в пластинах з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів, 1975.
3. *Прусов И. А.* Некоторые задачи термоупругости. Минск, 1972.

CONTACT PROBLEM FOR A PLATE WITH TWO UNEQUAL CRACKS ON A CIRCLE ARCH

Viktor Opanasovych, Nataliya Kopot'

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

In the paper the stress state of a isotropic plate containing two unequal cracks on a circle arch of some radius is considered. It is assumed that the faces of the cracks are in smooth contact on all length of the cracks under the influence of a homogeneous load field on infinity. Using the methods of the theory of functions of complex variable the solution of this problem is reduced to singular integral equations. The stress intensity factors and components of stress tensor are investigated on the circle where the cracks are located. In particular cases we have obtained the known results from the scientific literature.

Key words: plate, crack, stress intensity factors.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002
Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.161–166
VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002. Vol.60.P.161–166

ЗГИН ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПАРАЛЕЛЬНИХ ЗСУНУТИХ ТРІЩИН ЗА ТЕОРІЄЮ РЕЙСНЕРА

Віктор ОПАНАСОВИЧ, Роман МОКРИК, Роман СЕЛІВЕРСТОВ
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна
Львівський науково-практичний центр
вул. Кривоноса, 10 79000 Львів, Україна

У цій праці, використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної, задачу про напружений стан пластини Рейснера, яка ослаблена періодичною системою паралельних зсунутих наскрізних розрізів, зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Проведений числовий аналіз задачі для випадку, коли до берегів розрізів прикладено самозрівноважені згинальні моменти. Досліджено вплив товщини пластини та розташування тріщин на величини коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів. У часткових випадках одержано відомі результати [5].

Ключові слова: пластина, тріщина, згин.

1. Формулювання задачі. Розглянемо безмежну ізотропну пластину завтовшки h, яка містить систему наскрізних паралельних тріщин, до берегів яких прикладено самозрівноважене навантаження. В серединній площині пластини виберемо декартову ситему координат $Oxy\tilde{z}$. Вважаємо, що центри тріщин мають координати $(-sj; dj)$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, при цьому тріщини паралельні до осі Ox. Із кожною тріщиною пов'яжемо локальні системи координат $O_j x_j y_j$ (рис. 1). Окрім цього вважатимемо, що під час деформування пластини береги тріщин не контактують.

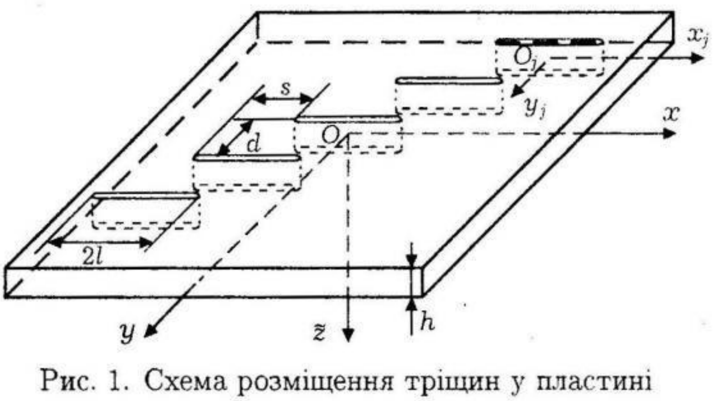


Рис. 1. Схема розміщення тріщин у пластині

Граничні умови задачі можна подати у вигляді

$$M_y^+ - M_y^- = 0, \qquad H_{xy}^+ - H_{xy}^- = 0, \qquad Q_y^+ - Q_y^- = 0, \qquad |x_j| < l; \quad (1)$$

$$M_y^+ + M_y^- = q_1(x_j), \quad H_{xy}^+ + H_{xy}^- = q_2(x_j), \quad Q_y^+ + Q_y^- = q_3(x_j), \quad |x_j| < l, \quad (2)$$

де $q_i(x_j)$, $i = \overline{1,3}$ — відомі функції; значками '+' та '−' позначено граничні значення функцій при $y_j \to \pm 0$.

Зауважмо, що залежності (1) виражають самозрівноваженість навантаження, а умови (2) задають розподіл згинних моментів M_y, крутних моментів H_{xy} та поперечних сил Q_y уздовж розрізів.

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини та коефіцієнти інтенсивності силових і моментних чинників задачі.

2. Зведення розв'язку задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Для розв'язання сформульованої задачі скористаємось комплексним поданням визначальних співвідношень теорії згину пластин Рейснера [1,7], які в нашому випадку матимуть вигляд

$$M_y + iH_{xy} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2m \operatorname{Re} \Phi_j(z_j) + n \left[z_j \overline{\Phi_j'(z_j)} + \overline{\Psi_j(z_j)} \right] + \right.$$
$$\left. + \rho \left[2\overline{\Phi_j''(z_j)} + i \overline{\frac{\partial^2 \Omega_j(z_j, \bar{z}_j)}{\partial z_j^2}} \right] \right\}, \qquad (3)$$
$$Q_x - iQ_y = -2D \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(2\,\Phi_j'(z_j) - i \frac{\partial \Omega_j(z_j, \bar{z}_j)}{\partial z_j} \right),$$

де $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість пластини, E — модуль пружності матеріалу пластини, ν — коефіцієнт Пуассона;

$$m = -D(1+\nu), \quad n = D(1-\nu), \quad \rho = \frac{4D}{k^2}, \quad k = \frac{\sqrt{10}}{h},$$
$$z_j = x_j + iy_j = (x - sj) + i(y + dj), \qquad i = \sqrt{-1};$$

$\Phi_j(z_j)$, $\Psi_j(z_j)$ — комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі, а функція $\Omega_j(z_j, \bar{z}_j)$ — розв'язок рівняння Гельмгольца $\Delta\,\Omega_j - k^2\,\Omega_j = 0$.

Функції $\Phi_j(z_j)$ та $\Omega_j(z_j, \bar{z}_j)$ виберемо у вигляді [3]

$$\Phi_j(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^{l} \frac{f(t)}{t - z_j}\,dt, \qquad \Omega_j(z_j, \bar{z}_j) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_{-l}^{l} \frac{w_j K_1(w_j)}{t - z_j} \omega(t)\,dt \right], \qquad (4)$$

де $w_j = k|t - z_j|$, $K_i(w_j)$ — функція Макдональда i-го порядку, $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$, $\omega(t) = \gamma(t) - i\mu(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\gamma(t)$, $\mu(t)$ — невідомі дійсні функції.

Проробивши перетворення, як це зроблено в [3], та задовольняючи граничні умови (1) і (2), одержимо систему СІР для знаходження невідомих функцій $u_1(t) = f_1(t)$, $u_2(t) = f_2(t)$, $u_3(t) = \mu'(t) - 2f_1'(t)$ $\quad (\gamma(t) = 2f_2(t))$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{-l}^{l} K_{ki}(t,x) u_i(t)\,dt = -\pi P_k(x), \qquad |x| < l, \quad k = \overline{1,3}, \qquad (5)$$

де $P_1(x) = \dfrac{q_1(x)}{n}$, $P_2(x) = \dfrac{q_2(x)}{n}$, $P_3(x) = \dfrac{q_3(x)}{kD}$;

$$K_{11}(t,x) = 2d \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{r_j^3}\left\{\frac{r_j^2 - 2(dj)^2}{r_j} + \right.$$

$$\left. + m_1 \left[\frac{\widetilde{K}_2(kr_j)}{r_j}\left(3r_j^2 - 4(dj)^2\right) + k\left(r_j^2 - (dj)^2\right)\widetilde{K}_1(kr_j)\right]\right\};$$

$$K_{12}(t,x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j^2}\left\{n_1 - 4\left(\frac{dj}{r_j}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{m_1}{r_j}\left[\frac{\widetilde{K}_2(kr_j)}{r_j}\left(r_j^2 - 4(dj)^2\right) - k(dj)^2 K_1(kr_j)\right]\right\};$$

$$K_{13}(t,x) = m_1 d \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j^2} j\widetilde{K}_2(kr_j);$$

$$K_{23}(t,x) = m_1 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(dj)^2}{r_j^2}\right)\widetilde{K}_2(kr_j);$$

$$K_{21}(t,x) = 2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j}\left\{\frac{q}{r_j} - \frac{2(dj)^2}{r_j^3} + \right.$$

$$\left. + m_1\left[\frac{\widetilde{K}_2(kr_j)}{r_j^3}\left(r_j^2 - 4(dj)^2\right) + k\left(\frac{1}{2} - \frac{(dj)^2}{r_j^2}\right)K_1(kr_j)\right]\right\};$$

$$K_{22}(t,x) = 2m_1 d \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{j}{r_j}\left\{\frac{1}{2r_j} + \frac{r_j^2 - 2(dj)^2}{m_1 r_j^3} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\widetilde{K}_2(kr_j)}{r_j^3}\left(3r_j^2 - 4(dj)^2\right) + k\left(\frac{1}{2} - \frac{(dj)^2}{r_j^2}\right)K_1(kr_j)\right]\right\};$$

$$K_{31}(t,x) = 4k \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_j^2}\left[\widetilde{K}_1'(kr_j)\left(r_j^2 - 2(dj)^2\right) - (dj)^2 K_0(kr_j)\right];$$

$$K_{32}(t,x) = 4kd \sum_{j=-\infty}^{+\infty} j\frac{t-x+sj}{r_j^2}\widetilde{K}_2(kr_j); \qquad \widetilde{K}_1(x) = K_1(x) - \frac{1}{x};$$

$$K_{33}(t,x) = -2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{t-x+sj}{r_j} K_1(kr_j); \qquad \widetilde{K}_2(x) = K_2(x) - \frac{2}{x^2};$$

$$m_1 = \frac{4}{1-\nu}; \qquad n_1 = 2\frac{3+\nu}{1-\nu}; \qquad r_j = \sqrt{(t-x+sj)^2 + (dj)^2}.$$

Систему (5) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-l}^{l} u_1(t)\,dt = 0, \qquad \int_{-l}^{l} u_2(t)\,dt = 0, \qquad \int_{-l}^{l} \left(tu_1(t) - k^{-2}u_3(t)\right)\,dt = 0, \tag{6}$$

які виражають однозначність прогину та усереднених кутів повороту нормалі [6] до серединної площини під час обходу контурів тріщин.

Систему СІР (5), (6) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур [4].

Розподіл зусиль та моментів поблизу вістря тріщини матиме вигляд [9]

$$M_x + M_y = \frac{2}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re}\left\{(K_M - iK_H)\, e^{-i\frac{\theta}{2}}\right\} + O(1),$$

$$M_x - M_y - 2iH_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{2r}}\left\{(K_M - iK_H)\, e^{-i\frac{5\theta}{2}} - (K_M + 3iK_H)\, e^{-i\frac{\theta}{2}}\right\} + O(1),$$

$$Q_x - iQ_y = -\frac{iK_Q}{\sqrt{2r}} e^{-i\frac{\theta}{2}} + O(1),$$

де (r, θ) — полярні координати точки з початком координат у вершині тріщини, K_M, K_H та K_Q — коефіцієнти інтенсивності моментів та поперечних сил.

3. Аналіз числових результатів. Провели числовий аналіз задачі у випадку, коли до берегів тріщин прикладені сталі згинальні моменти M. На рис. 2–4 зображено графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності моментів та поперечних сил $\left[K_M^*, K_H^*, K_Q^*\right] = \left[K_M, K_H, K_Q\right]/(M\sqrt{l})$ від параметрів $\tilde{s} = s/l$, $\tilde{d} = d/l$, $\lambda = h/(l\sqrt{10})$ для $\nu = 0,3$. Зведені коефіцієнти інтенсивності силових і моментних чинників обчислені за відповідними значеннями невідомих функцій $u_i(x)$ за допомогою формул

$$(K_M^*)^{\pm} = \mp 2\frac{1+\nu}{1-\nu}\tilde{u}_2(\pm 1), \quad (K_H^*)^{\pm} = \mp 2\frac{1+\nu}{1-\nu}\tilde{u}_1(\pm 1), \quad (K_Q^*)^{\pm} = \pm\frac{2\lambda}{1-\nu}\tilde{u}_3(\pm 1), \tag{7}$$

де $\tilde{u}_i(x) = \sqrt{1-x^2}\,u_i(lx)$, знаки '+' та '4–' відповідають значенням у правій та лівій вершині розрізу відповідно.

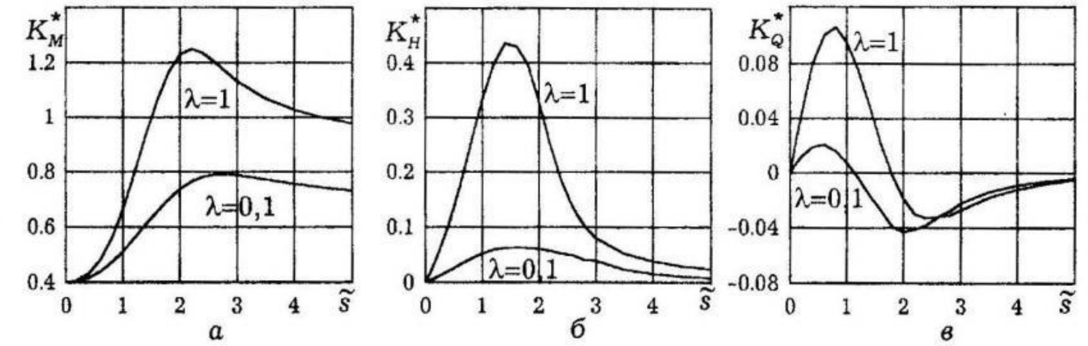


Рис. 2. Залежність зведених коефіцієнтів інтенсивності від зсуву тріщин для $\nu = 0,3$ і $\tilde{d} = 1$

Зауважмо, що в часткових випадках, коли $\tilde{s} \to 0$ (паралельні незсунуті тріщини) та $\tilde{d} \to 0$ і $\tilde{s} > 2$ (колінеарні тріщини), результати збігаються з числовими значеннями, які одержав О. Тамате [9, 10], та з поданими в довіднику [1]. Крім того, для цих випадків система рівнянь (5), (6) розпадається на дві незалежні системи: одна для знаходження функції $u_2(t)$, а друга — функцій $u_1(t)$ та $u_3(t)$ і має тривіальний розв'язок. У випадку, коли $\tilde{s} \to \infty$ або $\tilde{d} \to \infty$, отримані числові результати задачі про згин пластини Рейснера з однією ізольованою тріщиною [8].

Зазначмо, що кількість вузлів методу механічних квадратур, яка необхідна для досягнення певної точності результатів, залежить лише від параметра λ. У випадку 40 вузлів і $\lambda > 0,04$ похибка обчислень не перевищує 1%, а для $\lambda \to 0$ результати для K_H^* і K_Q^* розбіжні, що можна пояснити їх нескінченно малими значеннями.

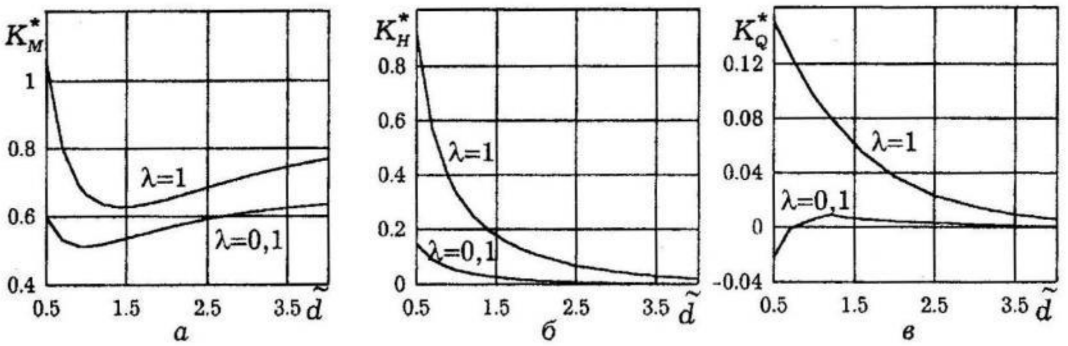


Рис. 3. Залежність зведених коефіцієнтів інтенсивності від відстані між лініями розташування тріщин для $\nu = 0,3$ і $\tilde{s} = 1$

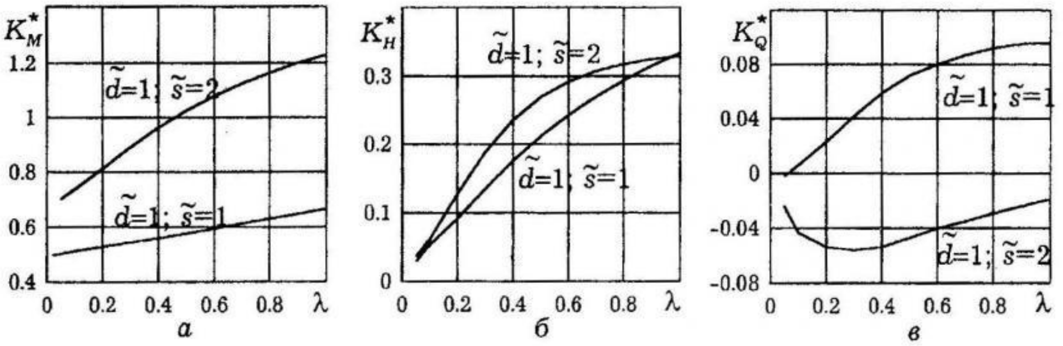


Рис. 4. Залежність зведених коефіцієнтів інтенсивності від параметра λ для $\nu = 0,3$

Як видно з рис. 4, збільшення товщини пластини спричиняє ріст величини зведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів. На підставі рис. 3, б можна зробити висновок, що вплив параметра $\tilde{d}$ на абсолютну величину K_H^* і K_Q^* однозначний — з його зменшенням вони зростають. Однак такої однозначності немає для коефіцієнта K_M^* (рис. 3, а), бо при $\tilde{d} \to 0$ він теж стрімко зростає, проте з віддаленням тріщин одна від одної коефіцієнт інтенсивності згинних моментів менший за відповідне значення для пластини з ізольованою тріщиною.

На рис. 2 чітко видно значення зсуву тріщин, за яких зведені коефіцієнти інтенсивності моментів і поперечних сил досягають найбільшої величини, причому спочатку досягають максимального значення K_Q^*, потім — K_H^*, і ще пізніше — K_M^*, коли величина зсуву перевищить довжину тріщини.

Зауважмо також, що вплив коефіцієнта Пуассона на зведені коефіцієнти інтенсивності силових і моментних чинників незначний порівняно з геометричними характеристиками задачі.

---

1. *Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. К., 1979.

2. *Мазурак Л. П., Бережницкий Л. Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. К., 1990.
3. *Опанасович В. К., Селіверстов Р. Г.* Кручення пластини Рейснера з двома паралельними зсунутими тріщинами однакової довжини. // XVI Відкрита науково-технічна конференція молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка АН України. Мат. конф. Львів, 2001. С. 19–22.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. К., 1976.
5. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х т./ Под. ред. *Ю. Мураками.* М., 1990.
6. *Тимошенко С. П., Войновски-Кригер.* Пластины и оболочки. М., 1966.
7. *Угодчиков А. Г., Соболев В. А.* Концентрация напряжений около отверстий в плитах по теории Рейсснера // Прикл. механика. 1972. 8. N 6. С. 58–66.
8. *Knowles J. K., Wang N. M.* On the bending of an elastic plate a crack // J. Math. and Phys. 1970. 39. N 3. P. 223–236
9. *Tamate O.* An infinite row of parallel cracks in an elastic plate under flexure // Trans. JSME. 1977. 43. N 376. P. 4363–4371.
10. *Tamate O.* Periodic collinear cracks in an elastic plate under plane bending // Trans. JSME, 1978. 44. N 379. P. 785–789.

BENDING OF A REISSNER'S PLATE CONTAINING PERIODIC SYSTEM OF PARALLEL SHIFTED CRACKS

Viktor Opanasovych, Roman Mokryk, Roman Seliverstov

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine
Scientific and Practical Center of Lviv
10 Kryvonosa Str. 79000 Lviv, Ukraine

In the paper the problem about bending of constant thickness isotropic plate with infinite row of parallel shifted cracks is investigated. It is assumed that the selfequilibrium bending moments are applied to the banks of the cracks. Using the method of the theory of functions of complex variable the solution of this problem is reduced to system of three singular integral equations. This system is numerically solved by mechanical quadratures method. Numeric analysis of stress intensity factors i realized. In particular cases results from the scientific literature are obtained.

Key words: plate, crack, bending.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.167–172

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.167–172

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ

Юрій ПИР'ЄВ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто математичну модель фрикційного термопружного контакту тіла з рухомим навколишнім середовищем. Робота продовжує дослідження впливу фрикційного тепловиділення і теплового розширення [3-4] на рух тіла (можливо і хаотичного) у циліндричному спряженні.

Ключові слова: фрикційне теплоутворення, функція Мельнікова.

Формулювання задачі. Розглянуто одновимірну модель термопружного контакту обертаючого циліндра радіуса R_1 з бандажем (втулкою, суцільним вкладишем, колодкою з коефіцієнтом взаємного перекриття близьким до одиниці, зажимом Проні [1]) який має внутрішній радіус R_1 (рис.1). У початковий момент часу температура бандажа підвищується згідно з законом $T_* h(t)$. Між циліндром і бандажем відбувається теплообмін за законом Ньютона. Внаслідок теплового розширення циліндра бандаж і циліндр починають контактувати.

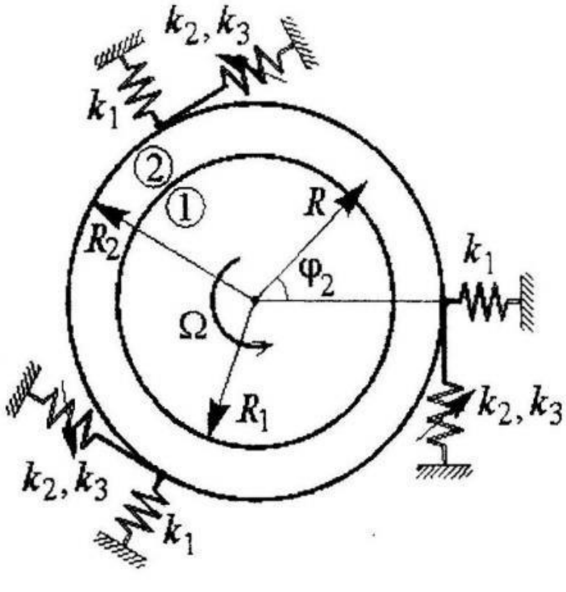


Рис. 1. Схема задачі

Вважаймо, що бандаж має зовнішній радіус R_2 і є абсолютно жорстким з моментом інерції I_2. Бандаж з'єднаний з корпусом за допомогою радіальних пружин жорсткістями k_1 і пружин з нелінійними характеристиками (типу Дуфінга [5]), які мають жорсткості k_2 , k_3. Припустімо, що циліндр обертається з невеликою кутовою швидкістю $\Omega(t) = \Omega_* \omega_1(t)$ такою, що можна знехтувати відцентровими силами інерції і ця швидкість змінюється: $\omega_1 = \omega_* + \zeta \sin \omega' t$. Припустімо, що між циліндром і бандажем діє сила тертя $F_t(V_w)$, яка є функцією відносної швидкості бандажа і циліндра $V_w = \Omega R_1 - \dot{\varphi}_2 R_1$. Згідно з законом Амонтона $F_t = f(V_w)N(t)$, де $f(V_w)$ — кінематичний закон тертя. Внаслідок дії сил тертя $F_t(V_w)$ на поверхні контакту відбувається теплоутворення. Треба визначити температуру $T(R,t)$ циліндра, радіальні переміщення $U(R,t)$, радіальні напруження $\sigma_R(R,t)$, контактний тиск $P(t) = N(t)/2\pi R_1 = -\sigma_R(R_1,t)$ та закон руху бандажа.

Задача зводиться до розв'язування системи диференціальних рівнянь квазістаціонарної незв'язаної термопружності для циліндра

$$\frac{\partial^2 U(R,t)}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U(R,t)}{\partial R} - \frac{1}{R^2}U(R,t) = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial T(R,t)}{\partial R}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 T(R,t)}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial T(R,t)}{\partial R} = \frac{1}{k}\frac{\partial T(R,t)}{\partial t}, \quad 0 < R < R_1, \quad 0 < t < \infty \tag{2}$$

та рівняння обертального руху бандажа як абсолютно жорсткого тіла

$$\begin{aligned} I_2\ddot{\varphi}_2 = f(R_1(\Omega - \dot{\varphi}_2))2\pi R_1^2 P(t) - \\ -k_2 R_2^2 \varphi_2 - k_3 R_2^4 \varphi_2^3 + k_1\left(\frac{l_0}{l_1} - 1\right)(R_2 + l_1) R_2 \varphi_2 \end{aligned} \tag{3}$$

за таких механічних граничних умов

$$U(0,t) = 0, \quad U(R_1,t) = 0, \tag{4}$$

теплових граничних умов

$$K\frac{\partial T(R_1,t)}{\partial R} + \alpha_T\left(T(R_1,t) - T_* h(t)\right) = f(V_w)V_w P(t), \quad R\frac{\partial T(R,t)}{\partial R}\bigg|_{R\to 0} = 0 \tag{5}$$

і початкових умов

$$T(R,0) = 0, \qquad \varphi_2(0) = 0, \qquad \dot{\varphi}_2(0) = 0. \tag{6}$$

Радіальні напруження у циліндрі знаходимо за формулою

$$\sigma_R(R,t) = \frac{E}{1-2\nu}\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{\partial U(R,t)}{\partial R} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{U(R,t)}{R} - \alpha T(R,t)\right]. \tag{7}$$

У формулах (1)-(7) E — модуль Юнга; ν, K, k, α, α_T — коефіцієнти Пуассона, теплопровідності, температуропровідності, лінійного температурного розширення, тепловіддачі, l_0, l_1 — довжини відповідно вільної та стиснутої пружини, φ_2 — малий кут обертання бандажа.

Побудова розв'язку задачі. Розв'язок крайової задачі (1)-(7) одержуємо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Для переходу в область оригіналів використовуємо теореми розкладення та добутку зображень. У результаті отримуємо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння

$$\ddot{\varphi}(\tau) - \varphi(\tau) + b\varphi^3(\tau) = \varepsilon F(\omega_1 - \dot{\varphi})p(\tau), \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \tag{8}$$

де безрозмірний контактний тиск $p(\tau)$ є розв'язком нелінійного інтегрального рівняння

$$p(\tau) = Bi\,\tilde{\omega}\int_0^\tau G_p(\tau-\xi)\dot{h}(\xi)\,d\xi + \gamma\tilde{\omega}\int_0^\tau \dot{G}_p(\tau-\xi)F(\omega_1-\dot{\varphi})p(\xi)(\omega_1-\dot{\varphi})\,d\xi. \quad (9)$$

Безрозмірну контактну температуру $\theta(\tau) = \theta(1,\tau)$ знаходимо за формулою

$$\theta(\tau) = Bi\,\tilde{\omega}\int_0^\tau G_\theta(1,\tau-\xi)\dot{h}(\xi)\,d\xi + \gamma\tilde{\omega}\int_0^\tau \dot{G}_\theta(1,\tau-\xi)F(\omega_1-\dot{\varphi})p(\xi)(\omega_1-\dot{\varphi})\,d\xi. \quad (10)$$

У співвідношення (9), (10) входять вирази

$$\{G_p(\tau); G_\theta(1,\tau)\} = \frac{\{0,5;1\}}{Bi\,\tilde{\omega}} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\{2Bi; 2\mu_m^2\}}{\mu_m^2\tilde{\omega}\,(Bi^2+\mu_m^2)}e^{-\mu_m^2\tilde{\omega}\tau}, \quad (11)$$

де μ_m $(m = 1,2,3,\ldots)$ — корені характеристичного рівняння

$$Bi\,J_0(\mu) - \mu J_1(\mu) = 0. \quad (12)$$

У поданні розв'язку (8)–(12) уведено безрозмірні величини

$$r = \frac{R}{R_1}, \qquad \tau = \frac{t}{t_*}, \qquad p = \frac{P}{P_*}, \qquad \varepsilon = \frac{P_* t_* 2\pi R_1^2}{I_2\Omega_*}, \qquad \omega = \omega' t_*,$$

$$\varphi(\tau) = \frac{\varphi_2(t_*\tau)}{\Omega_* t_*}, \qquad F(\omega_1-\dot{\varphi}) = f(R_1\Omega_*(\omega_1-\dot{\varphi})), \qquad b = \frac{k_3 R_2^4 t_*^4\Omega_*^2}{I_2},$$

$$\theta = \frac{T}{T_*}, \qquad Bi = \frac{\alpha_T R_1}{K}, \qquad h(\tau) = h(t_*\tau), \qquad \gamma = \frac{2E\alpha R_1^2\Omega_*}{K(1-2\nu)}, \qquad \tilde{\omega} = \frac{t_* k}{R_1^2}$$

і характерні параметри

$$t_* = \sqrt{\frac{I_2}{k_* R_2^2}}, \qquad P_* = \frac{2E\alpha T_*}{1-2\nu}, \qquad k_* = k_1\left(\frac{l_0}{l_1}-1\right)\left(1+\frac{l_1}{R_2}\right).$$

Вважаймо, що кінематичний коефіцієнт тертя апроксимований функцією [5]

$$F(y) = F_0\,\mathrm{Sgn}(y) - \alpha y + \beta y^3, \quad \text{де} \quad \mathrm{Sgn}(y) = \begin{cases} \{y/|y|\}, & y \neq 0, \\ [-1;1], & y = 0, \end{cases} \quad (13)$$

а температура бандажа зростає за законом $h(\tau) = 2\left(1-\exp\left(-\delta\tau^2\right)\right)$.

Метод Мельнікова. У випадку відсутності фрикційного теплоутворення $(\gamma = 0)$ контактний тиск з часом прямує до значення $p(\tau) \to 1$. Система може перебувати у хаотичному русі. Для цього випадку використаймо критерій Мельнікова існування гомоклінічної структури [2]. Нелінійне диференціальне рівняння (8) із урахуванням позначень $x = \varphi$, $y = \dot{\varphi}$ запишімо у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_0(x,y) + \varepsilon p_1(x,y,\omega\tau,\varepsilon), \\ \dot{y} &= q_0(x,y) + \varepsilon q_1(x,y,\omega\tau,\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} p_0(x,y) &= y, & p_1(x,y,\omega\tau,\varepsilon) &= 0, \\ q_0(x,y) &= x - bx^3, & q_1(x,y,\omega\tau,\varepsilon) &= F(\omega_* + \zeta\sin\omega\tau - y). \end{aligned} \quad (15)$$

При $\varepsilon = 0$ у системі на фазовій площині існує замкнена сепаратриса сідла. Критерій виникнення при $\varepsilon > 0$ у фазовому просторі (x, y) гомоклінічної структури полягає у визначенні знакозмінності функції, яка характеризує відстань між сепаратрисами. У випадку $\varepsilon << 1$ цю функцію, яку називають функцією Мельнікова чи функцією щілини, записують у вигляді [2,5].

$$M(\tau_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (p_1 q_0 - q_1 p_0)\Bigg|_{\substack{x=x_0(\tau-\tau_0)\\ y=y_0(\tau-\tau_0)}} d\tau, \tag{16}$$

де $x_0(\tau), y_0(\tau)$ — розвя'зок незбуреної системи (14), якій відповідає петля сепаратриси

$$x_0(\tau) = \sqrt{\frac{2}{b}}\frac{1}{\cosh(\tau)}, \qquad y_0(\tau) = -\sqrt{\frac{2}{b}}\frac{\sinh(\tau)}{\cosh^2(\tau)}, \tag{17}$$

τ_0 — параметр, який характеризує положення точки на цій сепаратрисі. Переходячи до змінної $\tau - \tau_0 = t$, отримаємо

$$M(\tau_0) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_0(t)\left[F_0 \operatorname{Sgn}(\omega_r) - \alpha\omega_r + \beta\omega_r^3\right] dt, \tag{18}$$

де безрозмірна відносна швидкість

$$\omega_r(t) = \omega_* + \zeta\sin(\omega(t+\tau_0)) - y_0(t). \tag{19}$$

Остаточно вираз функції Мельнікова набуде вигляду

$$\begin{aligned} M(\tau_0) = I(\tau_0) &+ 2C + 2\zeta\sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega\tau_0+\varphi) + \\ &+ 6\beta\zeta^2\left(I_{220}\cos^2\omega\tau_0 + I_{202}\sin^2\omega\tau_0 - 2\omega_* I_{111}\sin\omega\tau_0\cos\omega\tau_0\right) + \\ &+ 2\beta\zeta^3\left(-I_{130}\cos^3\omega\tau_0 - 3I_{112}\sin^2\omega\tau_0\cos\omega\tau_0\right), \end{aligned} \tag{20}$$

де

$$A = (\alpha - 3\beta\omega_*^2)I_{110} - 3\beta I_{310}, \qquad B = 6\beta\omega_* I_{201},$$
$$C = \beta I_{400} - (\alpha - 3\beta\omega_*^2)I_{200}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}(A/B);$$

$$I_{njk} = \int\limits_0^\infty [y_0(t)]^n\,[\sin(\omega t)]^j\,[\cos(\omega t)]^k\,dt. \tag{21}$$

Інтеграли (21) мають вигляд

$$I_{200} = \frac{2}{3b}, \quad I_{400} = \frac{8}{35b^2}, \quad I_{201} = \frac{\pi\omega(2-\omega^2)}{6b\sinh(\pi\omega/2)}, \quad I_{110} = -\frac{\pi\omega}{\sqrt{2b}\cosh(\pi\omega/2)},$$

$$I_{310} = \frac{\omega(11+10\omega^2-\omega^4)}{120b\sqrt{2b}}\left\{\psi\left(\frac{1-i\omega}{4}\right) - \psi\left(\frac{3-i\omega}{4}\right) + \psi\left(\frac{1+i\omega}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - \psi\left(\frac{3+i\omega}{4}\right)\right\}, \qquad I_{220} = \frac{\pi\omega(2\omega^2-1)+\sinh(\pi\omega)}{3b\sinh(\pi\omega)},$$

$$I_{130} = -\frac{3\pi\omega}{8\sqrt{2b}}\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(1-i\omega)}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi(1-i\omega)}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(3-i\omega)}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi(1-3i\omega)}{4}\right)\right\}, \qquad I_{202} = \frac{\pi\omega(1-2\omega^2)+\sinh(\pi\omega)}{3b\sinh(\pi\omega)},$$

$$I_{112} = \frac{\pi\omega\cosh(\pi\omega/2)}{\sqrt{2b}(1 - 2\cosh(\pi\omega))}, \qquad I_{111} = -\frac{\pi\omega}{\sqrt{2b}\cosh(\pi\omega)}, \qquad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

У представленні (20) вираз для $I(\tau_0)$ має вигляд

$$I(\tau_0) = -F_0 \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t)\,\mathrm{Sgn}(\omega_r)\,dt = 2F_0\sqrt{\frac{2}{b}}\sum_m \frac{\mathrm{sgn}(\omega_r'(t_m))}{\cosh t_m}, \tag{22}$$

де $\omega_r'(t) = \zeta\omega\cos(\omega(t+\tau_0)) - x_0(t) + bx_0^3(t)$, t_m — корені рівняння

$$\omega_r(t_m) = \omega_* + \zeta\sin(\omega(t_m + \tau_0)) - y_0(t_m) = 0. \tag{23}$$

Числові результати. Співвідношення (8)–(9) є системою нелінійних інтегрального та диференціального рівнянь. Розв'язок шукаємо, застосовуючи методи Рунге-Кутта та ітерацій із використанням квадратурної формули трапецій.

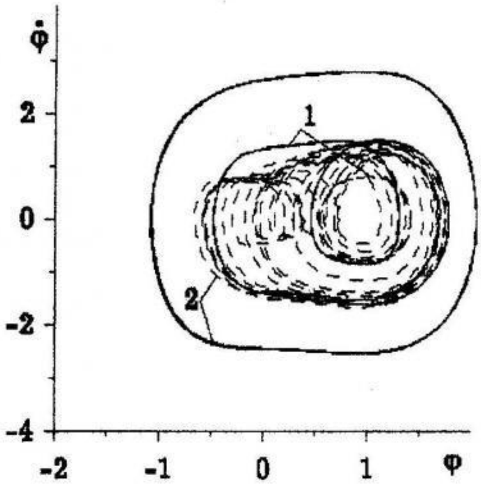


Рис. 2.

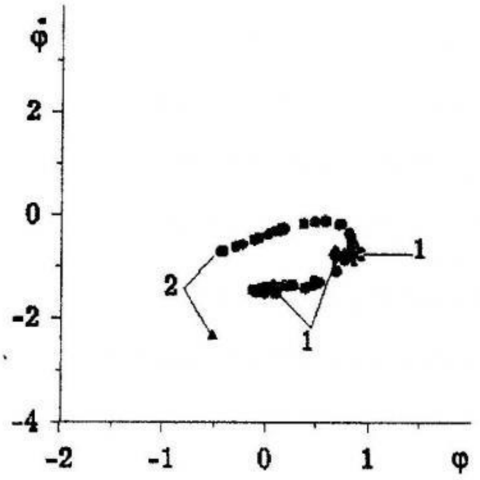


Рис. 3

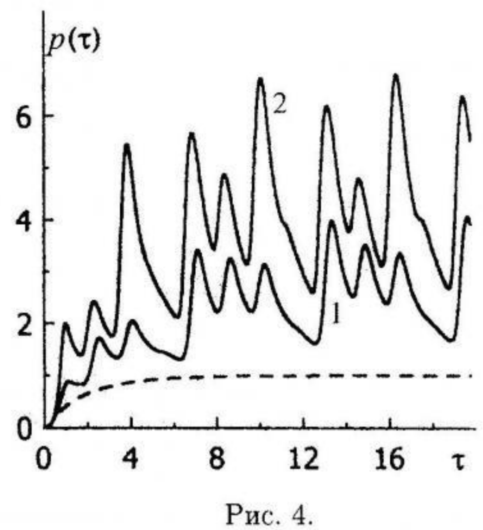


Рис. 4.

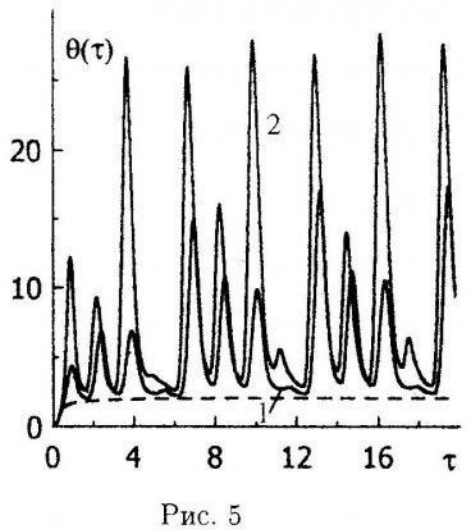


Рис. 5

Функцію $\mathrm{Sgn}(y)$ наближено виразом з параметром $\varepsilon_0 = 0{,}0001$

$$\mathrm{sgn}_{\varepsilon_0}(y) = \begin{cases} 1, & y > \varepsilon_0, \\ (2 - |y|/\varepsilon_0)\,y/\varepsilon_0, & |y| < \varepsilon_0, \\ -1, & y < -\varepsilon_0. \end{cases} \tag{24}$$

Числовий аналіз виконаний для сталевого циліндра ($\alpha = 14 \cdot 10^{-6}\,{}^\circ C^{-1}$, $K = 21\,Bm/(м \cdot {}^\circ C)$, $k = 5,9 \cdot 10^{-6}\,м^2/c$, $\nu = 0,3$, $E = 19 \cdot 10^{10}\,\Pi a$) при $Bi = 10$, $\varepsilon = 0,1$, $\tilde{\omega} = 0,1$, $b = 1$, $\omega = 2$, $\omega_* = 0,4$, $F_0 = \alpha = \beta = 0,3$, $\delta = 10$ для різних значень амплітуди кінематичного збурення системи ζ. Штрихові криві відповідають випадкові знехтування величиною теплового розширення $\gamma = 0$, суцільні криві — значенню $\gamma = 1$. Фазова картина руху бандажа (кутова швидкість обертання бандажа у кожному його положенні) зображена на рис. 2. Пункти на фазовій площині показані на рис. 3 через період зовнішнього збурення $2\pi/\omega$. Поведінка з плином часу безрозмірної величини контактного тиску p та контактної температури θ зображена відповідно на рис. 4–5. Криві та пункти 1 відповідають значенню $\zeta = 3,5$ (функція Мельнікова не є знакозмінною), криві і пункти 2 — значенню $\zeta = 4,5$ (функція Мельнікова є знакозмінною).

Числові результати свідчать, що фрікційне теплоутворення суттєво впливає на характер поведінки характеристик контакту та динаміку руху бандажа. Нехтуючи фрикційним теплоутворенням, можна отримати хаотичний рух тіла. Параметри моделі, для яких такий рух можливий, можна наперед знайти, використовуючи отриману функцію Мельнікова та її знакозмінність. Врахування фрикційного теплоутворення стабілізує динаміку руху бандажа.

1. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М., 1981.
2. *Мельников В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Моск. матем. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.
3. *Пир'єв Ю. О., Гриліцький Д. В.* Нелінійна нестаціонарна задача фрикційного контакту для циліндра з врахуванням інерційності та теплоутворення // Доп. НАН України. 1995. N 9. С. 3–47.
4. *Пир'єв Ю. О.* Фрикційний контакт циліндра та обойми з урахуванням інерційності, теплоутворення та зносу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2000. Т.36, N 3. С. 53–58.
5. *Awrejcewicz J.* Drgania deterministyczne ukladow dyskretnych. Warszawa, 1996.

THE CONTACT PROBLEM OF A THERMOELASTICITY WITH TAKING INTO ACCOUNT OF DYNAMIC OF THE SYSTEM

Yuriy Pyryev

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The one-dimensional model of frictional thermoelastic contact of the moved cylinder with a bandage is considered. The problem is reduced to the solution of the system of the nonlinear integral and differential equation.The Melnikov's function is constructed. The analysis of parameters of contact is done.

Key words: frictional heat generation, Melnikov's function

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2002.Вип.60.С.173–178 *Ser.Mech-Math.2002.Vol.60.P.173–178*

КВАЗІСТАТИЧНИЙ ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПІВПРОСТОРІ, ЗУМОВЛЕНИЙ РУХОМИМ ПРЯМОКУТНИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Ольга ТУРЧИН
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул.Університетська, 1 79000 Україна

Побудовано розв'язок просторової квазістатичної задачі термопружності для півпростору, що нагрівається рухомим джерелом тепла прямокутної форми. Розв'язок отримано з використанням рівнянь термопружності в напруженнях та інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа.

Ключові слова: термопружність, квазістатика, рівняння в напруженнях, рухоме джерело тепла.

Розглянемо вільний від зовнішнього навантаження півпростір $z \geqslant 0$, за поверхнею $z = 0$ якого зі сталою швидкістю v рухається джерело тепла прямокутної форми. Поза областю нагрівання поверхня вважається теплоізольованою, а початкова температура півпростору дорівнює t_0. Отже, нестаціонарне температурне поле в півпросторі визначається розв'язком початково-крайової задачі теплопровідності:

$$\Delta t = a^{-1}\partial_\tau t; \tag{1}$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_0; \tag{2}$$

$$\partial_z t\big|_{z=0} = -Q\varphi(x, y, \tau), \qquad t\big|_{z\to\infty} = 0, \tag{3}$$

де $t(x, y, z, \tau)$ — температурне поле в півпросторі, $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy} + \partial^2_{zz}$ — оператор Лапласа, τ — час, Q — зведена густина джерела тепла, a — відповідно коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалу півпростора, b і d — розміри прямокутної ділянки нагріву,

$$\varphi(x, y, \tau) = [S(x + b) - S(x - b)]\,[S(y + d - v\tau) - S(y - d - v\tau)],$$

$S(\cdot)$ — одинична функція Хевісайда.

Застосувавши до рівняння (1) і умов (3) інтегральне перетворення Фур'є за змінними x, y і Лапласа за змінною τ та врахувавши початкові умови (2) одержимо крайову задачу в просторі зображень

$$\frac{d^2\bar\theta}{dz^2} - \gamma_s^2\bar\theta = 0, \qquad \frac{d\bar\theta}{dz}\bigg|_{z=0} = -Q\bar\varphi, \qquad \bar\theta\big|_{z\to\infty} = 0, \tag{4}$$

де $\gamma_s = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \frac{s}{a}}$, $\theta = t - t_0$ — надлишкова температура,

$$\bar\theta(\xi, \eta, z, s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\theta(x, y, \tau)\exp(i\xi x + i\eta y - s\tau)\,d\tau\,dy\,dx \tag{5}$$

— зображення за Фур'є-Лапласом.

Розв'язок крайової задачі (3), що зникає на безмежності має вигляд

$$\bar{\theta} = A_s \exp(-\gamma_s z); \qquad A_s = \frac{Q\bar{\varphi}}{\gamma_s} \tag{6}$$

Перейшовши в (6) від трансформант Фур'є-Лапласа до оригіналів, використовуючи теореми про згортки і довідкові дані [1], отримаємо

$$\theta = \frac{Q}{4\sqrt{a\pi}\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\tau} \bar{\varphi}(x_0, y_0, \tau_0) \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}{4a(\tau-\tau_0)}\right) \frac{d\tau_0\, dy_0\, dx_0}{(\tau-\tau_0)^{3/2}}.$$

В останньому співвідношенні перейдемо до рухомої системи координат $x_1 = x$; $y_1 = y - v\tau$; $z_1 = z$. Після обчислення відповідних інтегралів [2] знайдемо

$$\begin{aligned} \theta = \frac{Q}{4}\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int\limits_{0}^{\tau} \exp\left(-\frac{z_1}{4a\tau_*}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_1+b}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1-b}{2\sqrt{a\tau_*}}\right)\right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_1+d+v\tau_*}{2\sqrt{a\tau_*}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y_1-d+v\tau_*}{2\sqrt{a\tau_*}}\right)\right] \frac{d\tau_*}{\sqrt{\tau_*}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Відомо [3], що рівняння просторової квазістатичної задачі термопружності в напруженнях мають вигляд

$$\Delta\sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\partial_{xx}^2\sigma + \frac{E}{1-\nu}\alpha_T\Delta\theta + 2G\alpha_T\partial_{xx}^2\theta = 0 \quad (xyz); \tag{8}$$

$$\Delta\sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\partial_{xy}^2\sigma + 2G\alpha_T\partial_{xy}^2\theta = 0 \quad (xyz), \tag{9}$$

де (xyz) — циклічна заміна, а $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$ — перший інваріант тензора напружень, що задовольняє рівняння

$$\Delta\sigma = -2\frac{E\alpha_T}{1-\nu}\Delta\theta. \tag{10}$$

Поверхня півпростору вільна від зовнішнього навантаження, тобто

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \qquad z = 0.$$

На безмежності напруження та їхні похідні за координатами дорівнюють нулю

$$\sigma_{ij}\big|_{|x|,|y|,z\to\infty} = 0 \quad (i,j = x,y,z), \quad \partial_k\sigma_{ij}\big|_{|x|,|y|,z\to\infty} = 0. \tag{12}$$

Застосувавши до рівнянь (8)–(10) і умов (11), (12) інтегральні перетворення Фур'є за x, y і Лапласа за τ одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь в просторі зображень

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{xx} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xx} - \frac{\xi^2}{1+\nu}\bar{\sigma} + \alpha_T\left(\frac{E}{1-\nu}\frac{s}{a} - 2G\xi^2\right)\bar{\theta} = 0, \qquad (xy, \xi\eta); \tag{13}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{zz} - \gamma^2\bar{\sigma}_{zz} + \frac{1}{1+\nu}d_{zz}^2\bar{\theta} + \alpha_T\left(\frac{E}{1-\nu}\frac{s}{a} + 2Gd_{zz}^2\right)\bar{\theta} = 0; \tag{14}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{xy} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xy} - \frac{\xi\eta}{1+\nu}\bar{\sigma} = 2\alpha_T G\xi\eta d_z\bar{\theta}; \tag{15}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma}_{xz} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xz} - \frac{i\xi}{1+\nu}d_z\bar{\sigma} = 2\alpha_T G i\xi d_z\bar{\theta}, \qquad (xy,\xi\eta); \tag{16}$$

$$d_{zz}^2\bar{\sigma} - \gamma^2\bar{\sigma} - \frac{\xi\eta}{1+\nu}\bar{\sigma} = -2\alpha_T\frac{E}{1-\nu}\frac{s}{a}\bar{\theta} \tag{17}$$

з крайовими умовами та умовами на безмежності

$$\bar{\sigma}_{xz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{yz} = 0, \quad \bar{\sigma}_{zz} = 0 \quad \text{при } z = 0; \qquad \bar{\sigma}_{ij}\big|_{z\to\infty} = 0, \tag{18}$$

де $\gamma = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$.

Розв'язки диференціальних рівнянь (14)–(17) з урахуванням рівності (6) і умов (18) мають вигляд

$$\bar{\sigma} = A\exp(-\gamma z) - 2\alpha_T\frac{E}{1-\nu}\bar{\theta}; \tag{19}$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \left(A\gamma\frac{z}{2(1+\nu} + A_3\right)\exp(-\gamma z) + \frac{Ea\alpha_T}{s(1-\nu)}\gamma^2 A_s\exp(-\gamma_s z), \tag{20}$$

де $A_3 = -\frac{Ea\alpha_T\gamma^2}{s(1-\nu)}A_s$.

Застосувавши до рівнянь рівноваги

$$\partial_x\sigma_{xx} + \partial_y\sigma_{xy} + \partial_z\sigma_{xz} = 0 \qquad (xyz) \tag{21}$$

інтегральне перетворення Фур'є-Лапласа одержимо:

$$d_z\bar{\sigma}_{zz} = i\left(\xi\bar{\sigma}_{xz} + \eta\bar{\sigma}_{yz}\right), \qquad d_z\bar{\sigma}_{xz} = i\left(\xi\bar{\sigma}_{xx} + \eta\bar{\sigma}_{yy}\right) \qquad (\xi\eta, xy). \tag{22}$$

На поверхні півпростору $z = 0$ з першого рівняння (22), з урахуванням крайових умов (18) знайдемо, що $d_z\bar{\sigma}_{zz}\big|_{z=0} = 0$. Отже,

$$A = 2A_s(1+\nu) + \frac{2E\alpha_T(1+\nu)a}{(1-\nu)s}\gamma\gamma_s A_s$$

і

$$\bar{\sigma}_{zz} = N\left\{\gamma^2\exp(-\gamma_s z) + \gamma^2\left[(\gamma_s-\gamma)z - 1\right]\exp(-\gamma z)\right\}; \tag{23}$$

$$\bar{\sigma} = 2N(1+\nu)\gamma(\gamma_s-\gamma)\exp(-\gamma z) - 2\frac{E\alpha_T\bar{\theta}}{1-\nu}, \tag{24}$$

де $N = \alpha_T E\frac{A_s a}{(1-\nu)^s}$.

З урахуванням співвідношень (6), (19), рівняння (16) перепишемо у вигляді

$$\frac{d^2\bar{\sigma}_{xz}}{dz^2} - \gamma^2\bar{\sigma}_{xz} = i\xi\left[\frac{\alpha_t E}{1-\nu}\gamma_s A_s\exp\left(-\gamma_s z\right) - \frac{\gamma}{1+\nu}A\exp\left(-\gamma z\right)\right] \quad (xy,\xi\eta), \tag{25}$$

звідки отримаємо його розв'язок

$$\bar{\sigma}_{xz} = A_1\exp(-\gamma z) + i\xi\left[\frac{\alpha_T E\gamma_s a}{s(1-\nu)}A_s\exp(-\gamma_s z) + \frac{z}{1\,(1+\nu)}\exp(-\gamma z)\right] \quad (xy,\xi\eta,12). \tag{26}$$

За допомогою перших двох крайових умов (18) знайдемо

$$A_1 = -i\xi N\gamma_s, A_2 = -i\eta N\gamma_s. \tag{27}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xz} &= i\xi N\left\{\gamma_s\exp(-\gamma_s z) + \left[z\gamma(\gamma_s-\gamma) - \gamma_s\right]\exp(-\gamma z)\right\}; \\ \bar{\sigma}_{yz} &= i\eta\left\{\gamma_s\exp(-\gamma_s z) + \left[z\gamma(\gamma_s-\gamma) - \gamma_s\right]\exp(-\gamma z)\right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

З огляду на значення виразів (24) і співвідношення $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\sigma}_{zz}$ знайдемо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy} &= \frac{1}{\gamma^2}\left[\xi\eta\left(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}\right) - i\left(\eta d_z \bar{\sigma}_{xz} + \xi d_z \bar{\sigma}_{yz}\right)\right]; \\ \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{1}{\gamma^2}\left[-\eta^2\left(\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}\right) + i\left(\eta d_z \bar{\sigma}_{yz} - \xi d_z \bar{\sigma}_{xz}\right)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Врахувавши співвідношення (28), (23), (24), рівності (29) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} = -N\left(\xi^2\gamma_s^2 + \eta^2\frac{s}{a}\right)\frac{\exp\left(-\gamma_s z\right)}{\gamma^2} - \\ -N\left(\xi^2(\gamma_s - \gamma)z - \frac{2\gamma_s}{\gamma}\left(\xi^2 + \nu\eta^2\right)\right)\exp(-\gamma z); \end{aligned} \tag{30}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = -\xi\eta N\left[\exp\left(-\gamma_s z\right) + \left((\gamma_s - \gamma)z + 1 - 2\nu - \frac{2\gamma_s}{\gamma}\left(1 - \nu\right)\right)\exp(-\gamma z)\right]. \tag{31}$$

Якщо $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}$ визначені, то

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{zz}. \tag{32}$$

Перехід від трансформант Фур'є-Лапласа до оригіналів у співвідношеннях (23), (24), (28), (30)–(32) виконувався з використанням теорем про згортки.

Зокрема,

$$\sigma = 2\frac{\alpha_t E}{1-\nu}\left[-\theta + \frac{Qa}{2\pi}\left(1+\nu\right)\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{x-b}^{x+b}\int\limits_{y-d+v\tau_*}^{y+d+v\tau_*}\Psi\left(x_*, y_*, z, \tau_*\right)dx_* dy_* d\tau_*\right], \tag{33}$$

де

$$\begin{aligned} \Psi = \left(2z^2 - x_*^2 - y_*^2\right)r_*^{-5}S_+\left(\tau_*\right) - \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma\exp\left(-z\gamma\right)\operatorname{erf}\left(\gamma\sqrt{a\tau_*}\right) \times \\ \times\cos\left(\xi x_*\right)\cos\left(\eta y_*\right)d\xi d\eta, \qquad r_* = \sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z^2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Інші компоненти тензора напружень мають вирази аналогічні до (33), (34), однак через обмеженість обсягу повідомлення тут не наводяться.

Більшість інтегралів у співвідношеннях (33), (34) — табличні [2]. Наведемо значення напружень σ_{xx} і σ_{yy} на поверхні півпростору $z = 0$ при $x = 0$, $b = d$

$$\sigma_x \equiv \frac{\sigma_{xx}|_{z=0,x=0,b=d}}{2\alpha_t EQb} = \frac{1}{\pi\left(1-\nu\right)}\left(M + \nu R - \vartheta\right); \tag{35}$$

$$\sigma_y \equiv \frac{\sigma_{yy}|_{z=0,x=0,b=d}}{2\alpha_t EQb} = \frac{1}{\pi\left(1-\nu\right)}\left(R + \nu M - \vartheta\right), \tag{36}$$

де

$$\begin{aligned} M = \frac{1}{V}\left(\sqrt{1+R_+^2} - \sqrt{1+Y_+^2} - \sqrt{1+R_-^2} + \sqrt{1+Y_-^2}\right) + \\ + \int\limits_0^{Fo}\left[\psi_1(\tilde{R}_-, \zeta) - \psi_1(\tilde{R}_+, \zeta)\right]d\zeta; \end{aligned}$$

$$\vartheta = \frac{\theta|_{z=0,x=0,b=d}}{Qb} = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^{Fo} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_+}{2\sqrt{\zeta}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_-}{2\sqrt{\zeta}}\right)\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}};$$

$$R = \frac{1}{2V}\ln\frac{\left(\sqrt{1+R_+^2}-1\right)\left(\sqrt{1+Y_+^2}+1\right)\left(\sqrt{1+Y_-^2}-1\right)\left(\sqrt{1+R_-^2}+1\right)}{\left(\sqrt{1+R_+^2}+1\right)\left(\sqrt{1+Y_+^2}-1\right)\left(\sqrt{1+Y_-^2}+1\right)\left(\sqrt{1+R_-^2}-1\right)}+$$

$$+\int\limits_0^{Fo}\left[\psi_2(\tilde{R}_-,\zeta) - \psi_2(\tilde{R}_+,\zeta)\right]d\zeta;$$

$$R_\pm = Y_\pm + VFo; Y_\pm = \frac{y_1 \pm b}{b}; \tilde{R}_\pm = Y_\pm + V\xi; V = \frac{vb}{a}; Fo = \frac{a\tau}{b^2};$$

$$\psi_1\left(\tilde{R}_\pm,\zeta\right) = \exp\left(-\frac{1}{4\zeta}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{\tilde{R}_\pm^2}{2\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{\tilde{R}_\pm^2}{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}\operatorname{erfq}\left(\frac{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}{2\sqrt{\zeta}}\right);$$

$$\psi_2\left(\tilde{R}_\pm,\zeta\right) = \frac{1}{\tilde{R}_\pm^2}\left[\exp\left(-\frac{\tilde{R}_\pm^2}{4\zeta}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{\zeta}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}\operatorname{erfq}\left(\frac{\sqrt{1+\tilde{R}_\pm^2}}{2\sqrt{\zeta}}\right)\right].$$

За формулами (36) обчислено безрозмірні напруження σ_y при $\nu = 0.3$. На рис. 1 зображено розподіл зазначених напружень для різних значень критерію Фур'є при $V = 5.0$, а на рис. 2 при фіксованому значенні $Fo = 1.0$ і різних значеннях безрозмірної швидкості V.

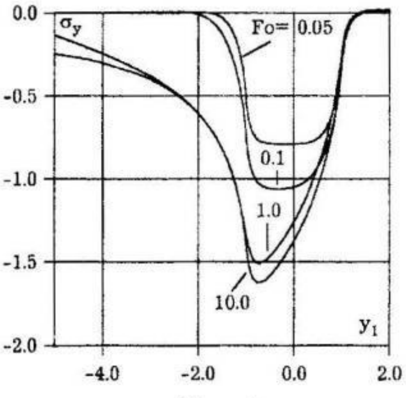


Рис. 1

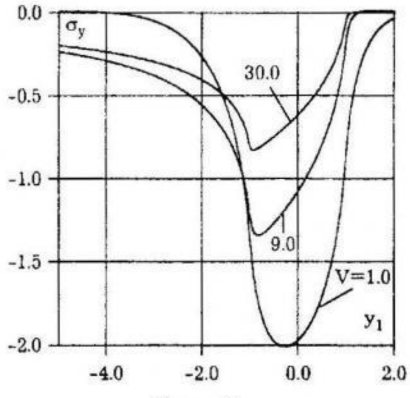


Рис. 2

Як видно з наведених результатів, зі збільшенням Fo абсолютне значення напружень збільшується переважно в зоні дії джерела тепла і досягає максимального значення в околі $Y = -1$. Схожі ефекти простежуються і на рис. 2, однак зі збільшенням швидкості руху джерела тепла абсолютне значення напружень зменшується.

---

1. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М., 1965.

2. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

3. *Лебедев Н.Н.* Температурные напряжения в теории упругости. М., 1937.

QUASISTATICAL THERMOSTRESSES STATE IN THE HALF-SPACE WHICH IS HEATED BY MOVING RECTANGULAR SOURCE

Ol'ga Turchyn

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

The solution of three-dimensional quasistatic problem of thermoelastisity for half-space which is heated by moving rectangular source is constructed. This solution is obtained using the equations of thermoelastisity in the terms of stresses and Fouri r-Laplace's transformations.

Key words: thermoelastisity, quasistatic, equations in the terms of stresses, moving heat source.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.2002

Прийнята до друку 20.06.2002

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити результати нових досліджень автора з повним іхнім доведенням. Не доцільно робити великі огляди вже опублікованих результатів. Робити посилання на неопубліковані праці не можна.

2. Текст статті набирають на комп'ютері українською мовою. До редакційної колегії потрібно подавати:

два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

резюме та ключові слова українською й англійською мовами, ім'я, прізвище автора та назву статті англійською мовою (резюме повинно передавати зміст основних результатів статті, а не лише повторювати її назву);

електронний варіант статті та резюме на дискеті 3,5" (редколегія повертає авторові дискету; тексти можна надіслати за адресою *diffeq@uli2.franko.lviv.ua*);

довідка про автора (співавторів), у якій треба зазначити ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Оптимальний обсяг статті до 12 сторінок. Розмір шрифтів 10pt, висота сторінки – \vsize 20.5 true cm, ширина – \hsize 13 true cm. На першій сторінці потрібно зазначити номер УДК.

Статті, запропоновані іноземними мовами, до публікації не приймаються (треба подати переклад українською).

3. Вимоги до набору:

текст статті створювати в одній з версій TEX'у (формати Plain-TEX, AMS-TEX чи LATEX). Рекомендуємо використовувати стильовий файл amsppt.sty; тексти, набрані в редакторах ChiWriter та Word не приймають;

номери формул ставити з правого боку; нумерувати лише формули, на які є посилання;

у посиланнях на теорему з монографії зазначити сторінку, на якій вона описана.

4. Рисунки до статті подавати у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунка чи його номер не входять у зображення, їх потрібно створювати засобами TEX'у. Вибираючи розмір графічного зображення, належить врахувати, що воно буде надруковане на принтері з роздільною здатністю 600 dpi.

5. Літературу подавати загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті.

Зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів та ін.) у працях:

1. *Грабович А.І.* Назва. – К., 1985.
2. *Кравчук О.М.* Назва// Мат. сб.–1985.–Т. 2. – №2.– С.4–20.
3. *Михайленко Г.Д.* Назва.– М., 1993. - 9 с. (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).
4. *Коваленко О. В.* Назва: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977.
5. *Сенів С.М.* Назва.– К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, №2020-1995.
6. *Муравський В.К.* Назва // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доп. Київ, 27 серпня – 2 вересня 1994 р. – К., 1994.– С. 540–551.

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 60

Видається з 1965 р.

Підп. до друку 01.11.2002.Формат 70x100/16. Папір друк. Друк на різогр.
Умовн. друк.арк15,2. Обл.-вид. арк. 15,3. Тираж 200 прим. Зам. 494,

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка.79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.