ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.61.С.218–237

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.61.P.218–237

УДК 512.544

ГРУПИ, БАГАТІ $\mathfrak{X}$-ПІДГРУПАМИ

[1]Орест **АРТЕМОВИЧ**, [2]Леонід **КУРДАЧЕНКО**

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*
[2]*Дніпропетровський національний університет, просп. Гагаріна, 72 320625 Дніпропетровськ, Україна*

Присвячується пам'яті видатного алгебриста
Д. І. Зайцева, якому в 2002 р. виповнилося б 60 років

Наведено огляд результатів про групи, багаті нормальними (відповідно субнормальними, нільпотентними) підгрупами та близькі до них групи, отримані за останні десятиріччя.

Ключові слова: мінімальне не $\mathfrak{X}$-група, умова мінімальності для $\mathfrak{X}$-підгруп, умова максимальності для $\mathfrak{X}$-підгруп.

0. Нехай ν - деяка властивість, яку можуть мати підгрупи. Ця властивість може бути внутрішньою (наприклад, ν= бути нормальною (norm), субнормальною (sn), майже нормальною (an), переставною (perm) підгрупою або підгрупою, що має доповнення (comp) і т. і.), і зовнішньою, тобто у цьому випадку ν означає бути підгрупою, що належить до деякого класу груп $\mathfrak{X}$ (скорочено бути $\mathfrak{X}$-групою). Найважливішими з цих класів є клас $\mathfrak{A}$ всіх абельових груп ($\nu = \mathrm{ab}$), всіх груп, які мають скінченний комутант ($\nu = \mathrm{BFC}$), всіх FC-груп ($\nu = \mathrm{FC}$), $\mathfrak{N}_k$ всіх нільпотентних груп ступеня k ($\nu = \mathrm{nil}(k)$), $\mathfrak{N}$ всіх нільпотентних груп ($\nu = \mathrm{nil}$), всіх гіперцентральних груп ($\nu = \mathrm{hyp}$), $\mathfrak{S}_d$ всіх розв'язних груп класу d ($\nu = \mathrm{sol(d)}$), $\mathfrak{S}$ всіх розв'язних груп ($\nu = \mathrm{sol}$), $\mathfrak{F}$ всіх скінченних груп ($\nu = \mathrm{fin}$), всіх скінченно породжених груп ($\nu = \mathrm{fg}$). Якщо G – група, то через $\mathbb{L}_{\text{non-}\nu}(G)$ (відповідно $\mathbb{L}_\nu(G)$) позначимо систему всіх тих підгруп із G, які не мають властивості ν (відповідно мають властивість ν). Одна з перших задач теорії груп, яка зберігає своє значення і до цього часу, полягає у вивченні впливу на будову групи систем $\mathbb{L}_\nu(G)$ та $\mathbb{L}_{\text{non-}\nu}(G)$ для найважливіших природних впастивостей ν. Першим кроком у цьому напрямі стала класична стаття Р. Дедекінда [25], в якій вивчено скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні, тобто групи, в яких система $\mathbb{L}_{\mathrm{norm}}(G)$, збігається з системою усіх підгруп або, що рівносильно, система $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ порожня. Далі були праці Г. Міллера та Х. Морено [56], в якій вивчали скінченні групи, всі власні підгрупи яких абельові, тобто система $\mathbb{L}_{\text{non-ab}}(G)$ складається з усіх власних підгруп або, що рівносильно, $\mathbb{L}_{\text{non-ab}}(G) = \{G\}$. Важливою була праця О. Ю. Шмідта [139], в якій вивчали скінченні групи, всі власні підгрупи

яких нільпотентні, тобто система $\mathbb{L}_{\text{nil}}(G)$ складається з усіх власних підгруп або, що рівносильно, $\mathbb{L}_{\text{nil}}(G) = \{G\}$. Після цих праць почали вивчати групи, скінченні і нескінченні, всі власні підгрупи яких мають деяку важливу властивість ν. Важливу роль для розвитку теорії нескінченних груп відіграла проблема Шмідта про нескінченні групи, всі власні підгрупи яких скінченні (див., наприклад, [134] та [100]). Він почав вивчення скінченних груп, у яких система підгруп $\mathbb{L}_{\text{non-}\nu}(G)$ є "досить малою" (або "досить великою") у деякому сенсі. У праці [140] він отримав опис скінченних груп, у яких всі підгрупи з множини $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ спряжені, а в [141] описав скінченні групи, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ складається з двох класів спряжених підгруп. Що означає "бути досить малим" для нескінченних груп? Отримуємо досить великий простір для різних підходів. Один з таких підходів започаткував С. М. Черніков, який запропонував розглядати групи, в яких система $\mathbb{L}_{\text{non-}\nu}(G)$ задовольняє деяку умову скінченності; зокрема такі класичні умови скінченності, як умови мінімальності та максимальності. У [131] розглянуто групи, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-ab}}(G)$ задовольняє умову мінімальності, а у [132] розглянуто групи, у яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ складається тільки зі скінченних підгруп. Цей підхід виявився дуже цікавим та результативним. Мета статті – зробити огляд результатів, які одержано у цій галузі за останні десятиріччя. Ми не можемо навести всі результати, тому що їх досить багато. Ми обмежимось важливими властивостями, наприклад, нормальність, субнормальність, майже нормальність, абельовість та їх узагальнення.

Всі терміни, які ми використовували, можна знайти в [69].

1. Групи з "малими" системами ненормальних підгруп

Ми вже зазначали, що скінченні групи, всі підгрупи яких нормальні, описав ще Р. Дедекінд [25]. Його результати поширив пізніше Р. Бер на довільні групи [13]. Такі групи тому й отримали назву дедекіндових. Вони мають досить просту будову: дедекіндова група або абельова або має вигляд $A \times B \times Q$, де A – абельова періодична $2'$-група, B – елементарна абельова 2-група, Q – група кватерніонів. С. М. Черніков [132] розглянув групи, всі нескінченні підгрупи яких нормальні, тобто система $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ всіх ненормальних підгруп складається тільки зі скінченних підгруп. Таких груп дещо більше.

Нехай G – нескінченна група, всі нескінченні підгрупи якої нормальні. Якщо G неабельова, то вона періодична; якщо G локально скінченна, то вона або дедекіндова, або містить таку нормальну квазіциклічну підгрупу K, що G/K – скінченна дедекіндова група. (С. М. Черніков [132]).

Останній результат отримав С. М. Черніков за умови існування нескінченної абельової підгрупи; пізніше отримав теорему В. П. Шунков [142], яка забезпечила існування такої підгрупи. Умова локальної скінченності не є зайвою, оскільки існують нескінченні періодичні групи, всі власні підгрупи яких скінченні. Приклади таких груп побудував О. Ю. Ольшанський [121, §28]. Групи, в яких система $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ задовольняє умову мінімальності (групи з умовою Min-(non-norm)), також розглядав С. М. Черніков. З результатів його праці [136] випливають такі твердження.

Нехай G – нескінченна група з умовою Min-(non-norm). Якщо G неперіодична, то вона абельова; якщо ж G локально скінчена, то вона або дедекіндова, або

черніковська.
Зауважимо, що у працях [132, 136] розглядали узагальнення наведених тут випадків. Ми не будемо детально розглядати їх, оскільки вони відображені в інших оглядових статтях (див., наприклад, [133, 134, 100, 128]).

Дуальною до умови мінімальності є умова максимальності. Групи, в яких система $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ задовольняє умову максимальності (групи з умовою Max-(non-norm)) розглядалися в працях Л. А. Курдаченка, М. Ф. Кузенного, М. М. Семка [109] та Дж. Кутоло [22]. Якщо клас локально ступінчатих груп з умовою Min-(non-norm) є простим об'єднанням класу дедекіндових груп та класу груп із звичайною умовою мінімальності, то для груп з умовою Max-(non-norm) ситуація інша. Основні результати цих праць можна сформулювати у такому вигляді.

Нехай G – локально ступінчата група, яка задовольняє умову Max-(non-norm). Тоді G – група одного з наступних типів:

1) G – майже поліциклічна група;

2) G – дедекіндова група;

3) $\zeta(G)$ має таку квазіциклічну p-підгрупу P, що G/P – скінченно породжена дедекіндова група;

4) $G = H \times L$, де $H \cong \mathbb{Q}_2$, L – скінченна неабельова дедекіндова група.

Якщо в групі всі скінченно породжені підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Природно виникає запитання про протилежну ситуацію: що можна сказати про групи, всі нескінченно породжені підгрупи (підгрупи, що не мають скінченої системи породжуючих елементів) яких нормальні, тобто система $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ складається тільки зі скінченно породжених підгруп. Ці групи розглядали у працях Л. А. Курдаченко та В. В. Пилаєв [111], Дж. Кутоло [22], Дж. Кутоло та Л. А. Курдаченко [23]. У цих працях є такі результати.

Нехай група G має зростаючий ряд підгруп, кожен фактор якого – локально майже розв'язна група. Кожна нескінченно породжена підгрупа групи G тоді і тільки тоді нормальна, коли G – група одного з наступних типів:

1) G дедекіндова;

2) G має таку нормальну квазіциклічну підгрупу K, що G/K – скінченно породжена дедекіндова група;

3) група G задовольняє такі умови:

3а) центр $\zeta(G)$ має квазіциклічну p-підгруппу K, що G/K – мінімаксна абельова група зі скінченною періодичною частиною;

3б) $Sp(G/K) = \{p\}$;

3в) $G/FC(G)$ – група без скруту;

3г) якщо A – абельова підгрупа G, то $A/(A \cap K)$ скінченно породжена;

4) $G = T \times A$, де $A \cong \mathbb{Q}_2$, T – скінченна дедекіндова група;

5) група G задовольняє такі умови:

5а) $G = (A \times T) \rtimes \langle g \rangle$, де $A \cong \mathbb{Q}_p$ для деякого простого числа p, T - скінченна дедекіндова підгрупа;

5б) якщо T неабельова, то $p = 2$;

5в) елемент g індукує на силовській p-підгрупі T_p підгрупи T ступеневий автоморфізм;

5г) існує таке число $r \in \mathbb{N}$, що $a^g = a^c$, де $c = p^r$ або $c = -p^r$ для кожного $a \in AT_{p'}$, $T_{p'}$ – силовська p'-підгрупа T.

У працях [14] та [98] введено дуже цікаві нові умови скінченності – слабкі умови максимальності та мінімальності для різних типів підгруп. Умови та пов'язані з ними результати зацікавили науковців, тому невдовзі було написано багато праць, присвячених цим умовам для різноманітних типів підгруп. Наша мета – розглядати результати цих досліджень, тому що їх згадували в оглядовій статті [102]. Наведемо тільки ті результати, які стосуються тематики нашої праці.

Нехай $\mathfrak{M}$ – деяка система підгруп групи G. Говоритимемо, що $\mathfrak{M}$ задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно максимальності) або група G задовольняє слабку умову мінімальності для $\mathfrak{M}$-підгруп чи скорочено Min-∞-$\mathfrak{M}$ (відповідно максимальності для $\mathfrak{M}$-підгруп чи скорочено Max-∞-$\mathfrak{M}$), якщо G не має таких нескінченних збігаючих (відповідно зростаючих) рядів $\{H_n | n \in \mathbb{N}\}$ підгруп із системи $\mathfrak{M}$, що індекси $|H_n : H_{n+1}|$ (відповідно $|H_{n+1} : H_n|$) нескінченні для кожного $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\mathfrak{M} = \mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$, то отримуємо групи зі слабкою умовою мінімальності (відповідно максимальності) для ненормальних підгруп або скорочено з умовою Min-∞-(non-norm) (відповідно Max-∞-(non-norm)). Ці групи вивчали у працях Л. А. Курдаченко та В. Е. Горецький [45], де виявлено, що *локально майже розв'язна група G тоді і тільки тоді задовольняє умову Min-∞-(non-norm) (відповідно Max-∞-(non-norm)), коли вона або дедекіндова, або мінімаксна.* Зазначимо також низку інших результатів про групи з обмеженнями на систему $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$. Якщо в групі всі циклічні підгрупи нормальні, то і всі її підгрупи нормальні. Тому виникає питання про будову груп, всі нециклічні підгрупи яких нормальні, тобто система $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ складається тільки з циклічних підгруп. Це питання сформулював С. М. Черніков [133]. Розв'язанню його та розгляду деяких його узагальнень присвячено праці Ф. М. Лимана [113-117]. Також у працях [118, 103-108, 119, 122, 123, 125, 126] досліджували метагамільтонові групи – групи, в яких система $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$ складається тільки з абельових підгруп.

2. Групи з "малими" системами підгруп, що не є майже нормальними

Підгрупа H групи G називається майже нормальною в G, коли $\mathbf{cl}_G(H)=\{H^g | g \in G\}$ – клас усіх спряжених з H підгруп – скінченна множина. Якщо підгрупа H нормальна в G, то $\mathbf{cl}_G(H)=\{H\}$, так що майже нормальні підгрупи – це природне узагальнення нормальних підгруп. Підгрупа H тоді і тільки тоді майже нормальна в G, коли її нормалізатор $N_G(H)$ має скінченний індекс в G (звідси і походить назва таких підгруп). Очевидно, перетин двох майже нормальних підгруп та підгрупа, породжена двома майже нормальними підгрупами, будуть майже нормальними підгрупами. Інакше кажучи, множина $\mathbb{L}_{\text{an}}(G)$ всіх майже нормальних підгруп групи буде граткою. На відміну від гратки всіх нормальних підгруп, ця гратка не буде повною. Групи, в яких $\mathbb{L}_{\text{an}}(G)$ буде повною граткою, розглядали Л. А. Курдаченко та С. Рінауро [42]. Результати цієї праці засвідчують, що досить багато таких груп мають центр скінченного індексу, тобто є *скінченними над центром.* Скінченні над центром групи відіграють тут роль, подібну до тієї, яку відіграють дедекіндові групи при вивченні груп з малою множиною $\mathbb{L}_{\text{non-norm}}(G)$. Про це свідчать, зокрема, такі два результати, що вже стали класичними. *Група G, кожна підгрупа якої майже нормальна (тобто $\mathbb{L}_{\text{non-an}}(G) = \emptyset$), скінченна над центром* (Б. Нейман [63]), і *група G, кожна* *абельова підгрупа якої майже нормальна (тобто $\mathbb{L}_{\text{non-an}}(G)$ складається з неабельових підгруп), також скінченна над центром* (І. І. Еремін [94]). І. І. Еремін почав розглядати групи, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-an}}(G)$ складається зі скінченних підгруп. Він отримав деякі умови, за яких такі групи скінченні над центром [95]. Опис такого роду груп за умови їх локальної майже розв'язності одержали Л. А. Курдаченко, С. С. Левіщенко та М. М. Семко [124].

Нехай G – неперіодична локально майже розв'язна група.

I Якщо G неперіодична, то кожна нескінченна підгрупа G тоді і тільки тоді майже нормальна, коли G – група одного з таких типів:

Ia G має центр скінченного індексу;

Iб $G = A\langle b\rangle$, $|b| = p$ – просте число, $A = C_G(A)$ – вільна абельова підгрупа 0-рангу $p-1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм (тобто кожна неодинична $\langle b\rangle$-інваріантна підгрупа A має скінченний індекс);

Iв G має таку скінченну підгрупу F, що G/F – група типу (2).

II Якщо G періодична, то кожна нескінченна підгрупа G тоді і тільки тоді майже нормальна, коли G – група одного з таких типів:

IIa G має центр скінченного індексу;

IIб $G = D\langle g\rangle$, $D = C_G(D)$ – подільна абельова підгрупа спеціального рангу $p-1$, p – просте число, $g^p \in D$, кожна власна $\langle g\rangle$-інваріантна підгрупа D скінченна;

IIв $G = D\langle g\rangle$, $D = C_G(D)$ – подільна абельова p-підгрупа спеціального рангу $\leqslant (q-1)$, де q – найменше просте число з множини $\Pi(\langle g\rangle)$, $|g|$ – p'-число, для кожного елементу $1 \neq y \in \langle g\rangle$ кожна власна $\langle y\rangle$-інваріантна підгрупа D скінченна;

IIг G має таку скінченну підгрупу F, що G/F – група типу (2) або (3).

Ці результати узагальнено у працях С. Франціозі, Ф. де Жіованні та Л. А. Курдаченка [30], де розглядали групи, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-an}}(G)$ складається зі скінченно породжених підгруп. Виявилось таке: *якщо G – група, яка має зростаючий ряд підгруп, кожен фактор якого – локально нільпотентна або локально скінченна група, і кожна нескінченно породжена підгрупа якої майже нормальна, то або $G/\zeta(G)$ скінченна, або G – майже розв'язна $\mathbb{A}_3$-група.* Майже розв'язні $\mathbb{A}_3$-групи, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-an}}(G)$ складається зі скінченно породжених підгруп, розпадаються на багато типів, які досить детально вивчено у [30]. Зауважимо, що у цій праці розглядали поставлене М. С. Черніковим [133] запитання про будову груп, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-an}}(G)$ складається з нециклічних підгруп. Групи, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-an}}(G)$ задовольняє умову мінімальності – групи з умовою Min-(non-an) – розглядали Л.А.Курдаченко та В.В.Пилаєв [110], які отримали такий результат.

I Неперіодична група G тоді і тільки тоді задовольняє умову Min-(non-an), коли вона має центр скінченного індексу або містить таку скінченну нормальну підгрупу F, що $H = G/F$ – група одного з таких типів.

1 $H = A \rtimes \langle b\rangle$, $|b| = p$ – просте число, $A = C_H(A)$ – вільна абельова підгрупа 0-рангу $p-1$, b індукує на A раціонально незвідний автоморфізм.

2 $H = K \times L$, K – подільна черніковська підгрупа, L – група типу (1).

II Локально скінченна група G тоді і тільки тоді задовольняє умову Min-(non-an), коли вона черніковська або має центр скінченного індексу.

Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-an}}(G)$ задовольняє умову максимальності – групи з умовою Max-(non-an) – розглядали Л. А. Курдаченко, М. Ф. Кузенний та М. М. Семко [109]. Вони мають більш просту будову, а саме *локально майже розв'язна група G тоді і тільки тоді задовольняє умову Max-(non-an), коли вона майже поліциклічна або має центр скінченного індексу.* Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-an}}(G)$ задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно максимальності) – групи з умовою Min-∞-(non-an) (відповідно Max-∞-(non-an)) – розглядали у працях Дж. Кутоло та Л. А. Курдаченко [24]. *Якщо група G, яка має зростаючий ряд підгруп, кожен фактор якого – локально майже розв'язна група, задовольняє умову Min-∞-(non-an) (відповідно Max-∞-(non-an)), то або $G/\zeta(G)$ скінченна, або G – майже розв'язна $\mathbb{A}_3$-група.*

Зазначимо, що у працях С. Франціозі, Ф. де Жіованні та Л. А. Курдаченко [31] розглядали групи, в яких множина $L_{\text{non-an}}(G)$ складається з субнормальних підгруп.

3. Групи з "малими" системами підгруп, що не є субнормальними

Відомо, що скінченна група, всі підгрупи якої субнормальні (тобто множина $\mathbf{L}_{\text{non-sn}}(G)$ порожня), нільпотентна. Щодо нескінченних груп ситуація зовсім інша. Існують локально нільпотентні розв'язні групи без центру, всі власні підгрупи яких субнормальні. Такі приклади побудували Г. Хайнекен та І. Мохамед [37-39], Б. Хартлі [33], Ф. Менегаццо [55]. Ми не будемо детально розглядати питання про будову груп, всі підгрупи яких субнормальні, оскільки його детально описано в літературі, зокрема у книзі Дж. Леннокса та С. Стоунхевера [53]. Зазначимо лише декілька важливих результатів, одержаних останнім часом.

Нехай G – група, всі підгрупи якої субнормальні. Тоді G розв'язна (В. Мьорес [57]).

Нехай G – група, всі підгрупи якої субнормальні. G буде нільпотентною в кожному з таких випадків: 1) якщо G періодична та гіперцентральна (В. Мьорес [58]); *2) якщо G періодична і резидуально скінченна* (Х. Сміт [75]); *3) якщо G має таку нормальну нільпотентну підгрупу A, що G/A обмежена* (Х. Сміт [76]); *4) якщо G періодична і резидуально нільпотентна* (Х. Сміт [77]); *5) якщо G – група без скруту* (Х. Сміт [78]).

Деякі умови нільпотентності груп, всі підгрупи яких субнормальні, пов'язані з властивостями нормальних замкнень елементів, досліджували Л. А. Курдаченко та Х. Сміт [43]. Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-sn}}(G)$ задовольняє умову мінімальності – групи з умовою Min-(non-sn) – розглядали С. Франціозі та Ф. де Жіованні [30]. При досить звичайних обмеженнях такі групи вичерпуються черніковськими та групами, всі підгрупи яких субнормальні. Вивчення груп, у яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-sn}}(G)$ задовольняє умову максимальності – груп з умовою Max-(non-sn) – виявилось результативнішим. Ці групи розглядали Л. А. Курдаченко та Х. Сміт [43]. Доведено, що *локально нільпотентна група тоді і тільки тоді задовольняє умову Max-(non-sn), коли кожна її підгрупа субнормальна. Локально майже розв'язна група G тоді і тільки тоді задовольняє умову Max-(non-sn), коли вона є групою одного з таких типів:*

1) G – майже поліциклічна група;

2) кожна підгрупа G субнормальна;

3) $G \neq B(G)$, $G/B(G)$ – скінченно породжена, майже абельова та не має скруту, $B(G)$ нільпотентна, для будь-якого елемента $g \notin B(G)$ кожен G-інваріантний абельовий фактор підгрупи $B(G)$ скінченно породжений як $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-модуль. Через $B(G)$ позначено радикал Бера групи G, тобто підгрупу, породжену всіма субнормальними циклічними підгрупами з G.

Дуже близькими до груп з умовою Max-(non-sn) виявились групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-sn}}(G)$ складається зі скінченно породжених підгруп. Їх розглядали Г. Хайнекен та Л. А. Курдаченко [36]. Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-sn}}(G)$ задовольняє слабку умову мінімальності – групи з умовою Min-∞-(non-sn) – розглядали Л. А. Курдаченко та Х. Сміт [44]. Тут ситуація подібна до звичайної умови мінімальності, як показує основний результат цієї роботи.

Нехай група G має зростаючий ряд підгруп, кожен фактор якого - локально нільпотентна або локально скінченна група. Якщо G задовольняє умову Min-∞-(non-sn), то або кожна підгрупа в G субнормальна, або G майже розв'язна і мінімаксна.
Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-sn}}(G)$ задовольняє слабку умову максимальності – групи з умовою Max-∞-(non-sn) – розглядали Л. А. Курдаченко та Х. Сміт [45]. Ситуація значно складніша. Зокрема, *якщо локально скінченна група G задовольняє умову Max-∞-(non-sn), то або кожна підгрупа з G субнормальна, або G – черніковська група; якщо ж група Бера задовольняє умову Max-∞-(non-sn), то кожна підгрупа з G субнормальна.*

4. Мінімальні не $\mathfrak{X}$-групи та близькі до них групи

До недавнього часу небагато було відомо про нескінченні групи без власної факторизації. Першим нескінченну абельову групу без власної факторизації (тобто квазіциклічну p-групу $\mathbb{C}_{p^\infty}$) побудував Г. Прюфер [67] у своїй дисертації (1921). Перш ніж була побудована перша неабельова нескінченна група без власної факторизації пройшло майже половина століття.

Першими приклад розв'язної групи без власної факторизації побудували Г. Хайнекен та І. Мохамед [37]. Побудована група виявилась ненільпотентною, тоді всі її власні підгрупи нільпотентні та субнормальні. Це спричинило подальше вивчення груп з нільпотентними власними підгрупами (детальніше див. [112, 70, 38, 54, 33, 137, 11, 55, 48-50, 34, 10, 3, 52]) і груп із субнормальними власними підгрупами (див. [15, 71, 20, 72, 73, 21, 57-61]).

Ненільпотентні групи, всі власні підгрупи яких нільпотентні та субнормальні, в честь першовідкривачів прийнято називати *групами типу Хайнекена-Мохамеда.* Одна властивість груп типу Хайнекена-Мохамеда фактично спричинила виділення такого означення. Група G називається *нерозкладною*, якщо будь-які дві її власні підгрупи знову породжують власну підгрупу в G; і називається *розкладною* – в іншому випадку. Групи типу Хайнекена-Мохамеда є прикладами нерозкладних груп. Даючи відповідь на запитання 1 із книги Б. Амберга, С. Франчіозі і Ф. Жіованні [1], один із авторів виявив, що *недосконала група нерозкладна тоді і тільки тоді, коли вона не має власної факторизації.* Нерозкладні розв'язні групи вивчав О. Д. Артемович [83, 84]. Якщо абельова група нерозкладна, то вона є p-групою для деякого простого числа p і ізоморфна або циклічній p-групі $\mathbb{C}_{p^n}$, або квазіциклічній p-групі $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Будь-яка група типу Хайнекена-Мохамеда є нерозкладною неабельовою групою.

Саме дослідження в цьому напрямі спонукали до задачі *охарактеризувати мінімальні не $\mathfrak{X}$-групи (якщо вони існують), де $\mathfrak{X}$ – деякий клас груп.* Нагадаємо, що група G, яка не є $\mathfrak{X}$-групою, тоді як всі її власні підгрупи є $\mathfrak{X}$-групами, називається *мінімальною не $\mathfrak{X}$-групою.* Зростаюча зацікавленість дослідників до груп типу Хайнекена-Мохамеда, які є також мінімальними ненільпотентними групами, значною мірою стимулювала вивчення мінімальних не $\mathfrak{X}$-груп. Необхідність у вивченні таких груп природно виникає і при дослідженні різних задач мінімальності. Мінімальні не $\mathfrak{X}$-групи – це групи з "малою" множиною не $\mathfrak{X}$-підгруп. Напевно, нереально повністю охопити всі дослідження в цьому напрямі. Опишемо найцікавіші з них. Історично перший результат належить Г. Міллеру та Х. Морено [56], які, як вже неодноразово зазначалось, досліджували скінченні мінімальні неабельові групи. Пізніше О. Ю. Шмідт [139] і Б. Хупперт [40] ввели в розгляд скінченні мінімальні ненільпотентні і відповідно скінченні мінімальні ненадрозв'язні групи. Л. Редеі [68] отримав опис скінченних мінімальних ненільпотентних груп. Учні Л. О. Шеметкова [138, частина VI] досліджували мінімальні групи, які не належать цій формації. Нескінченні мінімальні ненільпотентні групи почали вивчати Н. Ньюмен і Дж. Вайголд. Сформулюємо деякі результати щодо нескінченних груп.

Нехай $k \in \mathbb{N}$, G – група, в якої $\mathbf{L}_{\text{non-nil(k)}}(G) = \{G\}$. Тоді G може бути породжена щонайбільше $k+1$ елементами.

Нехай $k \in \mathbb{N}$, G – група, в якої $\mathbf{L}_{\text{non-nil(k)}}(G) = \{G\}$. Тоді $G/Fratt(G)$ – неабельова проста група.

Нехай $k \in \mathbb{N}$, G – проста група, в якої $\mathbf{L}_{\text{non-nil(k)}}(G) = \{G\}$ (відповідно $\mathbf{L}_{\text{non-nil}}(G) = \{G\}$). Тоді (а) кожна пара максимальних підгруп G має одиничний перетин; (б) якщо $1 \neq x \in G$, то знайдеться такий елемент g, що $\langle g^{-1}xg, x\rangle = G$; (в) G не має елементів порядку 2. (М. Ньюмен, Дж. Уайголд [64]).

Як вже згадувалось, приклади таких груп побудував О. Ю. Ольшанський [121, §28]. *Якщо G – група, всі власні підгрупи якох нільпотентні, то або G скінченно породжена, або G локально нільпотентна.* Приклади, побудовані О. Ю. Ольшанським, показують, що опис таких скінченно породжених груп практично неможливий. Щодо нескінченно породжених груп, всі власні підгрупи яких нільпотентні, то, як зазначалось, приклади груп, побудовані Г. Хайнекеном та І. Мохамедом, мають цю властивість. Опис таких груп також ще не отримано. Такі результати довів Х. Сміт [74].

Нехай G – розв'язна ненільпотентна група, всі власні підгрупи якої нільпотентні. Якщо G не має максимальних підгруп, то виконуються такі умови: а) G – зчисленна p-група для деякого простого числа p; б) $G/[G,G]$ – квазіциклічна p-група; в) кожна підгрупа групи G субнормальна; г) $[G,G]^p \neq [G,G]$ і кожна гіперцентральна фактор-група групи G є абельовою (зокрема, $[G,G] = \gamma_n(G)$ для всіх $n \geqslant 2$); д) $\zeta(G)$ містить у собі кожну подільну підгрупу; е) $C_G([G,G])$ – абельова підгрупа і $[G,G]$ – несуттєва підгрупа (тобто з рівності $H[G,G] = G$ завжди випливає $H = G$) (зокрема, G не має в собі власних підгруп скінченного індексу); є) якщо H – скінченна підгрупа $[G,G]$, то $H^G \neq [G,G]$; ж) гіперцентр групи G збігається з її центром.

Нехай G – нерозв'язна локально нільпотентна група, всі власні підгрупи якої нільпотентні. Тоді виконуються такі умови: а) G – p-група для деякого простого числа p; б) G – група Фіттінга; в) G задовольняє нормалізаторну умову; г) $\zeta(G)$ містить у собі кожну власну подільну підгрупу; д) існує така нільпотентна підгрупа H, що $G = H^G$; е) гіперцентр групи G збігається з її центром.

Р. Брандл, С. Франчіозі та Ф. де Жіованні [9] вивчали групи зі скінченними мінімальними ненільпотентними групами автоморфізмів.

Систематичне вивчення мінімальних не $\mathfrak{X}$-груп почали з праць В. В. Беляєва. Він дослідив мінімальні не FC-групи [93, 90, 91]. З його результатів і праці М. Кузуцуоглу та Р. Філліпса [51], зокрема випливає, що *локально скінченна мінімальна не FC-група є p-групою.* В. В. Беляєв і М. Ф. Сесекін [93, 90] досліджували мінімальні не BFC-групи (або, що еквівалентно, групи типу Міллера-Морено); В. В. Беляєв показав, що *досконала локально скінченна мінімальна не FC-група або проста, або p-група для деякого простого числа p.* М. Кузуцуоглу та Р. Філліпс [51] доповнили цей результат, показавши, що *не існує простих локально скінченних мінімальних не FC-груп.* Як вже зазначалось, А. Азар [3] та Ф. Ляйнен [52] також розглядали мінімальні не FC-групи. Ж. Женг та К. Шум [81, 82] визначили, що *недосконала група, яка не є скінченним розширенням свого центру, але будь-яка власна підгрупа якої скінченна над центром, є мінімальною не FC-групою.* Вивчаючи локально скінченні групи з майже абельовими власними підгрупами, В. В. Беляєв [92] виявив, що *локально скінченна мінімальна не майже абельова група є або групою Чаріна* (див. [127, 92]), *або нерозкладною метабельовою групою.* Незалежно мінімальні не майже абельові групи вивчала Б. Бруно [16-18]. О. Д. Артемович [83] з'ясував, що нерозкладні метабельові групи в деякому розумінні дуже близькі до груп типу Хайнекена-Мохамеда, і *розв'язні нерозкладні групи є p-групами.* Б. Бруно і Р. Філліпс [19, 12] також досліджували недосконалі мінімальні не майже нільпотентні групи. Б. Бруно і Р. Філліпс [12] визначили, що *недосконала мінімальна не майже абельова група (відповідно мінімальна не майже нільпотентна група періодична.* З результатів В. В. Беляєва [92] та Б. Бруно [16-18] випливає, що *розглядувані групи або розкладні (і тоді вони близькі до груп Чаріна), або нерозкладні.* За результатами А. Азара [6] вони недосконалі.

Х. Отал, Х. Пена, Б. Хартлі [65, 35], А. Азар, А. Арікан [8] вивчали мінімальні не CC-групи (про які досі все ще мало відомо). В [65] виявили, що *локально ступінчата мінімальна не CC-група G є F-досконалою зліченною досконалою локально скінченною p-групою.* М. Ху [79] охарактеризував групи, всі власні підгрупи яких є групами Бера, з максимальною підгрупою; показав, що *мінімальні неберові групи не містяться в класі груп типу Хайнекена-Мохамеда.* Пізніше М. Ху [80] і незалежно М. Діксон, М. Еванс, Х. Сміт [28, 29] вивчали групи, всі власні підгрупи яких є нільпотентними розширеннями скінченних груп і відповідно груп скінченного рангу. Близьким до зазначених досліджень є цикл робіт А. Азара з учнями [3, 4, 5, 7]. Х. Отал та Х. Пена [66], Ф. Наполітані та Е. Пегораро [62] шукали мінімальні групи, які не є розширеннями нільпотентних груп за допомогою черніковських груп. О. Д. Артемович [85] охарактеризував мінімальні не майже гіперцентральні групи. Задачі про мінімальні не $\mathfrak{X}$-групи залишаються актуальними і публікації, присвяченні їм, продовжують періодично виходити з друку.

5. Групи з "малими" системами неабельових і ненільпотентних підгруп та деякі близькі до них групи

Як ми вже зазначали, опис скінченних неабельових груп, всі власні підгрупи яких абельові (тобто $\mathbf{L}_{\text{non-sn}}(G) = \{G\}$), зроблено у праці Г. Міллера та Х. Морено [56], є одним з перших важливих результатів абстрактної теорії груп. Щодо нескінченних груп з цією властивістю, то їх існування виявив досить недавно О. Ю. Ольшанський (див. книгу [121, §28]). Водночас результати О. Ю. Ольшанського засвідчують, що говорити про опис цих груп зараз практично неможливо.

Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-ab}}(G)$ задовольняє умову мінімальності – групи з умовою Min-(non-ab) – почав розглядати М. С. Черніков [131]. З його результатів випливає, що неабельова локально розв'язна група з умовою Min-(non-ab)-черніковська. В. П. Шунков [143] розширив цей результат на локально скінченні групи. Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-ab}}(G)$ задовольняє умову максимальності – групи з умовою Max-(non-ab) – не вичерпуються абельовими та групами, що задовольняють Max. Простий приклад групи, що є вінцевим добутком групи простого порядку та нескінченої циклічної групи, засвідчує це. Групи з умовою Max-(non-ab) розглянули значно пізніше Д. І. Зайцев та Л. А. Курдаченко [101], з'ясували, що *локально майже розв'язна група G, яка не є майже поліциклічною тоді і тільки тоді G задовольняє умову Max-(non-ab), коли вона містить у собі нормальну абельову підгрупу A з такими властивостями: a) $A = C_G(A)$, b) G/A скінченно породжена, майже абельова і не має скруту, c) $\mathbb{Z}\langle g\rangle$-модуль A скінченно породжений для кожного елемента $g \notin A$.*

Природний наступний етап досліджень – вивчення груп, у яких множина $\mathbf{L}_{\text{non-ab}}(G)$ задовольняє слабку умову мінімальності (груп з умовою Min-∞-(non-ab)). Ці групи розглядав Д. І. Зайцев [99]. Тут ситуація подібна до звичайної умови мінімальності, оскільки *неабельова майже розв'язна група G тоді і тільки тоді задовольняє умову Min-∞-(non-ab), коли вона майже розв'язна і мінімаксна.* Групи, в яких множина $\mathbb{L}_{\text{non-sn}}(G)$ задовольняє слабку умову максимальності – групи з умовою Max-∞-(non-ab) – розглядали Л. С. Казарін, Л. А. Курдаченко, І. Я. Суботін [41]. Ситуація тут складніша, ніж для груп з умовою Max-(non-ab), лише неабельові локально скінченні групи з умовою Max-∞-(non-ab) будуть мінімаксними (тобто черніковськими), опис інших класів потребує спеціальних термінів і ми не будемо його наводити.

Наслідуючи Д. І. Зайцева [96], називатимемо нільпотентну групу G класу нільпотентності k *стало нільпотентною*, якщо кожна нескінченна підгрупа з G, що має клас нільпотентності k (зокрема, сама група), має власну нескінченну підгрупу класу нільпотентності k. *Кожна нескінченна нільпотентна група G класу нільпотентності k має власну нескінченну підгрупу класу нільпотентності k. Якщо G – нільпотентна група без скруту, то кожна її неодинична підгрупа є стало нільпотентною. Нехай G – нільпотентна група, в якої $\mathbf{L}_{\text{nil(k)}}(G) = \{G\}$. Тоді G скінченна.* (Д. І. Зайцев [96]). *Локально нільпотентна* *група G, що має нільпотентну підгрупу класу нільпотентності k, тоді і тільки тоді містить у собі стало нільпотентну підгрупу класу нільпотентності k, коли вона не є черніковською.* (Д. І. Зайцев [97]).

Питання про існування у періодичних груп нільпотентних підгруп класу $\leqslant k$ розглядав А. Н. Остиловський [120], який отримав такі результати.

Нехай G – бінарно скінченна група, яка не задовольняє Min. Якщо кожна нескінченна підгрупа, що має нескінченний індекс, задовольняє Min або є нільпотентною класу $\leqslant k$, то G – нільпотентна група класу $\leqslant k$.

Нехай G – бінарно скінченна група, що не є нільпотентною класу $\leqslant k$. Якщо множина $\mathbf{L}_{\mathrm{nil(k)}}(G) = \{G\}$ задовольняє слабку умову мінімальності, то G – черніковська група.

О. Д. Артемович [86] вивчав локально ступінчаті групи з умовою мінімальності для не майже гіперцентральних підгруп. Х. Сміт [74] почав розглядати групи G, у яких множина $\mathbf{L}_{\mathrm{non\text{-}nil}}(G)$ задовольняє умови мінімальності і максимальності та слабкі умови мінімальності і максимальності. Зокрема, локально нільпотентна група без скруту з цими умовами нільпотентна. Групи, в яких $\mathbf{L}_{\mathrm{non\text{-}nil}}(G) = \{G\}$ задовольняє умову максимальності, вивчали М. Діксон та Л. А. Курдаченко [26, 27]. Перша праця містить локально нільпотентні групи з цією властивістю, друга – розв'язні. Наведемо основні результати першої праці.

Нехай G – локально нільпотентна група з умовою Max-(non-nil), T – її періодична частина, R – скінченний резидуал G. Якщо G ненільпотентна та G/R нескінченно породжена, то виконуються такі умови: а) $R \leqslant T$ та T/R скінченна; б) G/T – нільпотентна мінімаксна група і $Sp(G/T) = \{p\}$ для деякого простого числа p; в) R – p-підгрупа; г) G має таку нільпотентну нормальну підгрупу U, що G/U квазіциклічна p-група; д) якщо S – ненільпотентна підгрупа з G, то $G = US$.

Нехай G – локально нільпотентна група з умовою Max-(non-nil), R – скінченний резидуал G. Якщо G ненільпотентна, G/R скінченно породжена, а R нільпотентна, то виконуються такі умови: а) R – подільна черніковська підгрупа; б) кожна власна G-інваріантна підгрупа R скінченна; в) $[G,R] = R$.

Нехай G – локально нільпотентна група з умовою Max-(non-nil), T – її періодична частина, R – скінченний резидуал G. Якщо G ненільпотентна та немінімаксна, а G/R скінченно породжена, то виконуються такі умови: R періодична, не має власних підгруп скінченного індексу, ненільпотентна, але кожна її власна підгрупа нільпотентна, G розв'язна і, крім того, R є розширенням нільпотентної групи за допомогою черніковської; зокрема, R – p-підгрупа для деякого простого числа p, що має зростаючий ряд нільпотентних G-інваріантних підгруп $\langle 1\rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \cdots \leqslant A_n \leqslant \cdots \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = R$.

Праця М. Діксона та Л. А. Курдаченка [27] містить опис розв'язних груп з умовою Max-(non-nil). О. Д. Артемович [87-89] досліджував локально нільпотентні групи з умовою максимальності для негіперцентральних підгруп. Ми не будемо детально розглядати їхню будову. Групи, в яких множина $\mathbf{L}_{\mathrm{non\text{-}nil}}(G) = \{G\}$ задовольняє слабку умову максимальності, вивчали Л. А. Курдаченко, П. Шумяцький та І. Я. Суботін [47]. Зокрема, локально скінченні групи з цією умовою є або локально нільпотентними, або черніковськими. С. Франчіозі, Ф. де Жіованні, Я. П. Сисак [32] охарактеризували деякі класи груп з умовою мінімальності для не FC-підгруп. М. С. Черніков [129, 130] вивчав групи з різними умовами (слабкої) π-максимальності та (слабкої) π-мінімальності. О. Д. Артемович [2] досліджував розв'язні групи з умовою мінімальності та відповідно мінімальності для підгруп, які не є черніковськими над нільпотентними.

З цього випливає, що мінімальні не $\mathfrak{X}$-групи особливо пов'язані з групами з умовами мінімальності та максимальності для не $\mathfrak{X}$-підгруп. Це спостереження і та особлива роль, яку відіграє поняття "нільпотентність" (і такі його можливі узагальнення як "майже нільпотентність", "гіперцентральність", "майже гіперцентральність") у теорії груп, а також (на прикладі груп типу Хайнекена-Мохамеда) зв'язок наявності "малої" родини власних ненільпотентних підгруп з відсутністю власних факторизацій у групі підтверджують необхідність досліджувати досить мало вивчені групи, близькі до нерозкладних, тобто групи з "малими" множинами ненільпотентних (відповідно негіперцентральних) підгруп. На цьому шляху виникає багато перспективних, цікавих і важливих задач, розв'язки яких потребують нових підходів і напрацювання нових методів. Значною мірою застосовують методи теорії кілець та модулів, демонструючи глибокі взаємозв'язки теорії груп і теорії кілець.

---

1. *Amberg B., Franciosi S., de Giovanni F.* Products of groups. – Oxford, 1992.
2. *Artemovych O. D.* Solvable groups with many conditions on nilpotent-by-Černikov subgroups // Mat. Studii. – 2000. – Vol. 13. – № 1. – P. 23-32.
3. *Asar A. O.* Barely transitive locally nilpotent p-groups // J. London Math. Soc. – 1997. – Vol. (2)55. – P. 357-362.
4. *Asar A. O.* On nonnilpotent p-groups and the normalizer condition // Türkish J. Math. – 1994 – Vol. 18. – P. 114-129.
5. *Asar A. O.* $\overline{NC}-p$-groups satisfying the normalizer condition // Türkish J. Math. – 1997. – Vol 21. – № 2. – P. 159-168.
6. *Asar A. O.* Locally nilpotent p-groups whose proper subgroups are hypercentral or nilpotent-by-Chernikov // J. London Math. Soc. – 2000. – Vol. 61. – P. 412-422.
7. *Asar A. O., Yalincaklioğlu A.* $\overline{NC}-p$-groups with nilpotent centralizers // Türkish J. Math. – 1997. – Vol. 21. – № 2. – P. 195-205.
8. *Asar A.O ., Arikan A.* On minimal non CC-groups // Revista Mat.Univ. Compl. (Madrid). – 1997. – Vol. 10. – № 1. – P. 31-37.
9. *Brandl R., Franciosi S., de Giovanni F.* Minimal non-nilpotent groups as automorphism groups // Monatshefte Math. – 1991. – Vol. 112. – P. 89-98.
10. *Belyaev V. V., Kuzucuoğlu M.* Barely transitive and Heineken Mohamed groups // J. London Math. Soc. – 1997. – Vol. (2)55. – P. 261-263.
11. *Bruno B., Phillips R. E.* A note on groups with nilpotent-by-finite proper subgroups // Archiv Math. – 1995. – Vol. 65. – P. 369-374.
12. *Bruno B., Phillips R. E.* On multipliers of Heineken-Mohamed type groups // Rend. Sem. Mat. Padova. – 1991. – Vol. 85. – P. 133-146.

13. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S.-B. Heidelberg Akad. – 1933. – № 2. – S. 12-17.
14. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Annalen. – 1968. – Vol. 175. – № 1. – P. 1-43.
15. *Brookes C. J. B.* Groups with every subgroup subnormal // Bull. London Math. Soc. – 1983. – Vol. 15. – P. 235-238.
16. *Bruno B.* On groups with abelian-by-finite proper subgroups //Boll. Un. Mat. Ital. – 1984. – Vol. (6)3-B. – P. 797-807.
17. *Bruno B.* Gruppi i cui sottogruppi propri contengono un sottogruppo nilpotente di indice finito // Boll. Un. Mat. Ital. – 1984. – Vol. (6)3-D. – P. 179-188.
18. *Bruno B.* Special q-groups and $\mathbb{C}_{p^\infty}$-groups of automorphisms //Archiv Math. – 1987. – Vol. 48. – P. 15-24.
19. *Bruno B.* On p-groups with "nilpotent-by-finite" proper subgroups // Bull. Un. Mat. Ital. – 1989. – Vol. (7)3-A. – P. 45-51.
20. *Casolo C.* On groups with all subgroups subnormal // Bull. London Math. Soc. – 1985. – Vol. 17. – P. 397.
21. *Casolo C.* Groups in which all subgroups are subnormal // Rend. Accad. Naz. Science XL. – 1986. – Vol. 10. – P. 247-249.
22. *Cutolo G.* On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups // Rivista Mat. pura ed applicata. – 1991. – Vol. 91. – P. 49-59.
23. *Cutolo G., Kurdachenko L. A.* Groups with a maximality condition for some non-normal subgroups // Geom. Dedicata. – 1995. – Vol. 55. – P. 279-292.
24. *Cutolo G., Kurdachenko L. A.* Weak chain conditions for non-almost normal subgroups // In: Groups 93 (Galway/St.Andrews, Galway 1993, Vol. 1). London Math. Soc., Lecture Notes Ser. – 1995. – Vol. 211. – P. 120-130.
25. *Dedekind R.* Über Gruppen deren sammtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Annalen. – 1897. – Bd. 48. – S. 548-561.
26. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Locally nilpotent groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups // Glasgow Math. J. – 2001. – Vol. 43. – № 1. – P. 85-102.
27. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Groups with the maximum condition on non-nilpotent subgroups // J. Group Theory. – 2001. – Vol. 4. – № 1. – P. 75-87.
28. *Dixon M. R., Evans M. J., Smith H.* Locally (soluble-by-finite) groups of finite rank // J. Algebra. – 1996. – Vol. 182. – P. 756-769.
29. *Dixon M. R., Evans M. J., Smith H.* Groups with all proper subgroups (finite rank)-by-nilpotent // Archiv Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 321-327.
30. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* On groups with many almost normal subgroups // Annali di Mat. pura ed appl. – 1995. – Vol. 169. – P. 35-65.
31. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* Groups with finite conjugacy classes of non-subnormal subgroups // Archiv Math. – 1998. – Bd. 70. – S. 169-181.

32. *Franciosi S., de Giovanni F., Sysak Ya. P.* Groups with many FC-subgroups. – Napoli: 1997. (Preprint/ Universita 'degli studi di Napoli "Federico II". Dipartamento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"; № 60).

33. *Hartley B.* A note on the normalizer conditions // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973. – Vol. 74. – № 1. – P. 11-15.

34. *Hartley B., Kuzucuoğlu M.* Non-simplicity of locally finite barely transitive groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1997. – Vol. 40. – P. 483-490.

35. *Hartley B., Otal J., Peña J. M.* Locally graded minimal non CC-groups are p-groups // Archiv Math. – 1991. – Vol. 57. – P. 209-211.

36. *Heineken H., Kurdachenko L. A.* Groups with subnormality for all subgroups that are not finitely generated // Annali di Mat. pura ed appl. – 1995. – Vol. 169. – P. 203-232.

37. *Heineken H., Mohamed I. J.* A group with trivial centre satisfying the normalizer condition // J. Algebra. – 1968. – Vol. 10. – P. 368-376.

38. *Heineken H., Mohamed I. J.* Groups with normalizer condition // Math. Annalen. – 1972. – Vol. 198. – № 3. – P. 178-187.

39. *Heineken H., Mohamed I. J.* Non-nilpotent groups with the normalizer condition // Lect. Notes Math. – 1974. – Vol. 372. – P. 357-360.

40. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Zeitschrift. – 1954. – Bd. 60. – S. 409-434.

41. *Kazarin L. S., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On groups saturated with abelian subgroups // Int. J. Algebra and Comp. – 1998. – Vol. 8. – № 4. – P. 443-466.

42. *Kurdachenko L. A., Rinauro S.* Intersection and join of almost normal subgroups // Comm. Algebra. – 1995. – Vol. 23. – № 5. – P. 1967-1974.

43. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with the maximal condition on non-subnormal subgroups // Boll. Unione Mat. Ital. – 1996. – 10B. – P. 441-460.

44. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with the weak minimal condition for non-subnormal subgroups // Annali Mat. – 1997. – Vol. 173. – P. 299-312.

45. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with the weak maximal condition for non-subnormal subgroups // Ricerche Mat. – 1998. – Vol. 47. – P. 29-49.

46. *Kurdachenko L. A., Smith H.* The nilpotence of some groups with all subgroups // Publicaciones Mat. – 1998. – Vol. 42. – P. 411-421.

47. *Kurdachenko L. A., Shumyatsky P., Subbotin I. Ya.* Groups with the many nilpotent subgroups // Algebra Colloq. – 2001. – Vol. 8. – № 2. – P. 129-143.

48. *Kuzucuoğlu M.* Barely transitive permutation groups // Archiv Math. – 1990. – Vol. 55. – P. 521-532.

49. *Kuzucuoğlu M.* A note on barely transitive permutation groups satisfying min-2 // Rend. Sem. Mat. UniVol. Padova. – 1993. – Vol. 90. – P. 9-15.

50. *Kuzucuoğlu M.* A note on barely transitive permutation groups satisfying min-2 // Istanbul Univ. Fen. Fek. Mat. Deg. – 1990. – Vol. 49. – № 6. – P. 521-532.

51. *Kuzucuoğlu M., Phillips R. E.* Locally finite minimal non-FC-groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1989. – Vol. 105. – P. 417-420.

52. *Leinen F.* A reduction for perfect locally finite minimal non-FC groups // Glasgow Math. J. – 1999. – Vol. 41. – P. 81-83.

53. *Lennox J. C., Stonehewer S. E.* Subnormal subgroups of groups. – Oxford, 1987.

54. *Meldrum J. D. P.* On the Heineken-Mohamed groups // J. Algebra. – 1973. – Vol. 27. – P. 437-444.

55. *Menegazzo F.* Groups of Heineken-Mohamed // J. Algebra. – 1995. – Vol. 171. – P. 807-825.

56. *Miller G. A., Moreno H.* Non-abelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. – 1903. – Vol. 4. – P. 389-404.

57. *Möhres W.* Torsionfreie Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind // Math. Ann. – 1989. – Bd. 284. – S. 245-249.

58. *Möhres W.* Auflösbare Gruppen mit endlichen Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind, I // Rend. Sem. Univ. Padova. – 1989. – Bd. 81. – S. 255-268.

59. *Möhres W.* Auflösbare Gruppen mit endlichen Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind, II // Rend. Sem. Univ. Padova. – 1989. – Bd. 81. – S. 269-287.

60. *Möhres W.* Torsiongruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind // Geom. Dedicata. – 1989. – Bd. 31. – S. 237-244.

61. *Möhres W.* Auflösbarkeit von Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal sind // Archiv Math. – 1990. – Bd. 54. – S. 232-235.

62. *Napolitani F., Pegoraro E.* On groups with nilpotent by Černikov proper subgroups // Archiv Math. – 1997. – Vol. 69 – P. 89-94.

63. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – Bd. 63. – S. 76-96.

64. *Newman M. F., Wiegold J.* Groups with many nilpotent subgroups // Archiv Math. – 1964. – Bd. 64. – S. 241-250.

65. *Otal J., Peña J. M.* Minimal non-CC-groups // Comm. Algebra. – 1988. – Vol. 16. – № 6. – P. 1231-1242.

66. *Otal J., Peña J. M.* Groups in which every proper subgroup is Černikov-by-nilpotent or nilpotent-by-Černikov // Archiv Math. – 1988. – Vol. 51. – P. 193-197.

67. *Prüfer H.* Unendliche abelsche Gruppen von Elementen endlicher Ordnung // Dissertation. – Berlin, 1921.

68. *Rédei L.* Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen// Publ. Mathematicae (Debrecen). – 1956. – Bd. 4. – S. 303-324.

69. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. – New York e.a.: Springer, 1980.

70. *Roseblade J.* On groups in which every subgroup is subnormal // J. Algebra. – 1965. – Vol. 2. – P. 402-412.

71. *Smith H.* Hypercentral groups with all subgroups subnormal // Bull. London Math. Soc. – 1983. – Vol. 15. – P. 229-234.

72. *Smith H.* Hypercentral groups with all subgroups subnormal, II // Bull. London Math. Soc. – 1986. – Vol. 18. – P. 343-348.

73. *Smith H.* On torsion-free hypercentral groups with all subgroups subnormal // Glasgow Math. J. – 1989. – Vol. 31. – P. 193-194.

74. *Smith H.* Groups with few non-nilpotent subgroups // Glasgow Math. J. – 1997. – Vol. 39. – P. 141-151.

75. *Smith H.* Residually finite groups with all subgroups subnormal // Bull. London Math. Soc. – 1999. – Vol. 31. – P. 679-680.

76. *Smith H.* Nilpotent-by-(finite exponent) groups with all subgroups subnormal // J. Group Theory. – 2000. – Vol. 3. – P. 47-56.

77. *Smith H.* Residually nilpotent groups with all subgroups subnormal // J. Algebra. – 2001. – Vol. 244. – P. 845-850.

78. *Smith H.* Torsion-free groups with all subgroups subnormal // Archiv Math. – 2001. – Bd. 76. – № 1. – S. 1-6.

79. *Xu Maoqian.* Groups whose proper subgroups are Baer groups // Acta Math. Sinica (New Ser.). – 1996. – Vol. 12. – № 1. – P. 10-17.

80. *Xu Maoqian.* Groups whose proper subgroups are finite-by-nilpotent// Archiv Math. – 1996. – Vol. 66. – P.353-359.

81. *Zhang Zhi Rang, Shum Kar Ping.* Minimal non-CF groups //Southeast Asian Bull. Math. – 1994. – Vol. 18. – № 3. – P. 183-186.

82. *Zhang Zhi Rang.* Finite-by-nilpotent groups and generalized FC-groups // Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1. – № 4. – P. 369-374.

83. *Артемович О. Д.* Неразложимые матабелевы группы // Укр.матем.журн. – 1990. – Т. 42. – № 9. – С. 1252-1254.

84. *Артемович О. Д.* Про нерозкладні групи // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 4. – С. 28-32.

85. *Артемович О. Д.* Про групи з майже гіперцентральними власними підгрупами // Доп. АН України. – 1997. – № 5. – С. 7-9.

86. *Артемович О. Д.* О локально ступенчатых группах с условием минимальности для некоторой системы негиперцентральных подгрупп // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51. – № 10. – С. 1425-1430.

87. *Артемович О. Д.* Про розв'язні періодичні групи з умовою максимальності для підгруп, які не є гіперцентральними // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 4. – С. 9-11.

88. *Артемович О. Д.* Групи з умовою максимальності для негіперцентральних підгруп // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. 1. – С. 27-30.

89. *Артемович О. Д.* Locally solvable groups with the maximal condition for non-hypercentral subgroups // Доп. АН України. – 2001. – № 9. – С. 42-44.

90. *Беляев В. В.* Группы типа Миллера-Морено // Сиб. матем. журн. – 1978. – Т. 19. – № 3. – С. 509-514.

91. *Беляєв В. В.* Минимальные не FC-группы // Труды Всесоюз. симпозиума по теории групп. – К., 1980. – С. 97-108.

92. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с почти абелевыми собственными подгруппами // Сиб. матем. журн. – 1983. – Т. 24. – С. 11-17.

93. *Беляев В. В., Сесекин Н. Ф.* О бесконечных группах типа Миллера-Морено // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. – 1975. – Vol. 26. – P. 369-376.

94. *Еремин И. И.* Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп // Матем. сб. – 1959. – Т. 47. – С. 45-54.

95. *Еремин И. И.* Группы с конечными классами сопряженных бесконечных подгрупп // Уч. зап. Перм. ун-та. – 1960. – Т. 17. – № 2. – С. 13-14.

96. *Зайцев Д. И.* Устойчиво нильпотентные группы // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2. – № 4. – С. 337-346.

97. *Зайцев Д. И.* О существовании устойчиво нильпотентных подгрупп в локально нильпотентных группах // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4. – № 3. – С. 361-368.

98. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп // Укр. матем. журн. – 1968. – Т. 20. – № 4. – С. 472-482.

99. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. матем. журн. – 1971. – Т. 23. – № 5. – С. 661-665.

100. *Зайцев Д. И., Каргаполов М.И., Чарин В.С.* Бесконечные группы с заданными свойствами подгрупп // Укр. матем. журн. – 1972. – Т. 24. – № 5. – С. 619-633.

101. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А.* Группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп // Укр. матем. журн. – 1991. – Т. 43. – № 7-8. – С. 925-930.

102. *Казарин Л. С., Курдаченко Л. А.* Условия конечности и факторизации в бесконечных группах // Успехи мат. наук. – 1992. – Т. 47. – № 3. – С. 75-114.

103. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Матем. заметки. – 1983. – Т. 34. – № 2. – С. 179-188.

104. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Будова розв'язних метагамільтонових груп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 2. – С. 6-9.

105. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 11. – С. 32-40.

106. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. матем. журн. – 1987. – Т. 39. – № 2. – С. 180-185.

107. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* О строении периодических неабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга три // Укр. матем. журн. – 1989. – Т. 41. – № 2. – С. 170-176.

108. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* О метагамильтоновых группах с элементарным коммутантом ранга два // Укр. матем. журн. – 1990. – Т. 42. – № 2. – С. 168-175.

109. *Курдаченко Л. А., Кузенний Н. Ф., Семко Н. Н.* Группы с некоторыми условиями максимальности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – № 1. – С. 9-11.

110. *Курдаченко Л. А, Пылаев В. В.* Группы, богатые почти нормальными подгруппами // Укр. матем. журн. – 1988. – Т. 40. – № 3. – С. 326-33О.

111. *Курдаченко Л. А., Пылаев В. В.* О группах, двойственных дедекиндовым // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 10. – С. 21-22.

112. *Курош А. Г., Черников С. Н.* Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук. – 1947. – Т. 2. – № 3. – С. 18-59.

113. *Лиман Ф. М.* Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 12. – С. 1075-1073.

114. *Лиман Ф. М.* 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4. – № 1. – С. 75-83.

115. *Лиман Ф. М.* Непериодические группы с некоторыми системами инвариантных подгрупп // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7. – № 4. – С. 70-86.

116. *Лиман Ф. М.* Группы, все разложимые подгруппы которых инвариантны // Укр. мат. журн. – 1970. – Т. 22. – № 6. – С. 725-733.

117. *Лиман Ф. Н.* Периодические группы, все абелевы нециклические подгруппы которых инвариантны // В сб.: Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 65-95.

118. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1976. – Т. 10. – № 1. – С. 60-75.

119. *Нагребецкий В. Т.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал.ун-та. – 1967. – Т. 6. – № 1. – С. 80-88.

120. *Остыловский А. Н.* О слабом условии минимальности для ненильпотентных подгрупп // Алгебра и логика. – 1984. – Т. 23. – № 4. – С. 439-444.

121. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989.

122. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах, I // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1966. – Т. 5. – № 3. – С. 45-49.

123. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах, III // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1970. – Т. 7. – № 3. – С. 195-199.

124. *Семко Н. Н., Левищенко С. С., Курдаченко Л. А.* О группах с бесконечными почти нормальными подгруппами // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 10. – С. 57-63.

125. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с элементарным коммутантом ранга два // Укр. матем. журн. – 1987. – Т. 39. – № 6. – С. 743-750.

126. *Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах, II // Мат. зап. Урал. ун-та. – 1968. – Т. 6. – № 5. – С. 50-53.

127. *Чарин В. С.* Замечание об условии минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР. – 1949. – Т. 66. – С. 575-576.

128. *Чарин В. С., Зайцев Д. И.* О группах с условиями конечности и другими ог-

раничениями для подгрупп // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40. – № 3. – С. 277-287.

129. *Черников Н. С.* Группы с условием π-минимальности // Докл. РАН. – 1998. – Т. 358. – № 2. – С. 169-170.

130. *Черников Н. С.* Группы с условием π-максимальности и π-слойной максимальности // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – вып. 2. – С. 311-320.

131. *Черников Н. С.* Бесконечные группы с заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 159. – С. 759-760.

132. *Черников Н. С.* Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Укр. матем. журн. – 1967. – Т. 19. – № 6. – С. 111-131.

133. *Черников Н. С.* Исследование групп с заданными свойствами // Укр.матем. журн. – 1969. – Т. 21. – № 2. – С. 193-209.

134. *Черников Н. С.* О проблеме Шмидта // Укр. матем. журн. – 1971. – Т. 23. – № 5. – С. 598-603.

135. *Черников Н. С.* О группах с ограничениями для подгрупп // В сб.: Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 17-39.

136. *Черников Н. С.* Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп // В сб.: Группы с ограничениями для подгрупп. – К.: Наук. думка, 1971. – С. 106-115.

137. *Хартли Б.* О нормализаторном условии и мини-транзитивных группах подстановок // Алгебра и логика. – 1974. – Т. 13. – № 5. – С. 589-602.

138. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М., 1978.

139. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366-372.

140. *Шмидт О. Ю.* Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп // Матем. сб. – 1926. – Т. 33. – С. 161-172.

141. *Шмидт О. Ю.* Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп // Труды. сем. по теории групп. – М., 1938. – С. 7-26.

142. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9. – № 5. – С. 579-615.

143. *Шунков В. П.* Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // В сб.: Алгебра. Матрицы и матричные группы. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1970. – С. 5-54.

GROUPS WITH MANY $\mathfrak{X}$-SUBGROUPS

[1]O. Artemovych, [2]L. Kurdachenko

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine
[2]*National University of Dnipropetrovsk,*
72 Gagarina Prosp. 320625 Dnipropetrovsk, Ukraine

We give survey of results on groups with many normal (respectively subnormal, nilpotent) subgroups and related topics.

Key words: minimal non-$\mathfrak{X}$-group, minimal condition on $\mathfrak{X}$-subgroups, maximal condition on $\mathfrak{X}$-subgroups.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.2002
Прийнята до друку 14.03.2003