ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2003.Вип.61.С.238–248 *Ser.Mech-Math.2003.Vol.61.P.238–248*

УДК 512.553

ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КІЛЬЦЯ, НАД ЯКИМИ ВСІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СКРУТИ ТРИВІАЛЬНІ

Микола КОМАРНИЦЬКИЙ, Володимир СТЕФАНЯК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул.Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Запропоновано деякі способи побудови диференціальних радикальних фільтрів у неодинарних диференціальних кільцях. З'ясовано, що кожному такому фільтру відповідає диференціальний скрут у категорії лівих диференціальних модулів над базовим диференціальним кільцем. Описано один тип диференціальних кілець, над якими всі диференціальні скрути тривіальні.

Ключові слова: **диференціювання, диференціальні кільця, диференціально прості кільця, диференціальні модулі, диференціальні скрути, диференціальні радикальні фільтри, тривіальні диференціальні скрути.**

1. Зауважимо, що теорія скрутів у категорії модулів над асоціативним кільцем досить добре розвинена. Їй присвячено багато монографій. Найфундаментальнішою з цієї галузі є праця Дж. Голана [1]. В категорії одинарних диференціальних модулів над одинарним диференціальним кільцем диференціальні скрути і диференціальні радикальні фільтри вперше розглядали в [2]. Загальним питанням теорії радикалів у кільцях, модулях і, навіть, в довільних абелевих і Гротендикових категоріях, також присвячено низку монографій і статей, серед яких зазначимо [3, 4, 5]. Проте радикалам і скрутам у категорії диференціальних модулів приділено мало уваги. Причиною є те, що ця категорія ізоморфна до категорії звичайних модулів над кільцем диференціальних операторів основного диференціального кільця. Проте зазначений ізоморфізм вирішує тільки загальнотеоретичні проблеми і зовсім не вирішує конкретних питань про локалізації диференціальних кілець та про радикальні фільтри в диференціальних кільцях. Це, зокрема, пояснюється складністю механізму зв'язку між ідеалами (односторонніми чи двосторонніми) кільця коефіцієнтів та ідеалами кільця диференціальних операторів (див. [6]). Тому виникає потреба (досліджуючи локалізації диференціальних кілець) мати змогу користуватись адекватною мовою диференціальних понять, а не їх трансформаціями в кільці диференціальних операторів.

За аналогією з [2] з'ясовуємо, що деякі найпростіші факти про звичайні радикальні фільтри без ускладнень переносяться на випадок кілець з багатьма диференціюваннями. Спочатку узагальнюються такі поняття, як диференціальний скрут, диференціальний радикальний фільтр тощо на випадок кілець з багатьма диференціюваннями та формулюються і доводяться найпростіші їхні властивості. Скрути, визначені цими радикальними фільтрами, тісно пов'язані. Зокрема, кільце дробів, побудоване за допомогою отриманого диференціального радикального фільтра, при певних обмеженнях на скрут можна перетворити в диференціальне кільце стосовно диференціювання, яке продовжує диференціювання основного кільця. Цей факт використовують потім для вивчення одинарних комутативних диференціальних кілець, всі диференціальні скрути над якими тривіальні.

2. Попередні відомості та факти. Всі розглядувані кільця припускатимемо асоціативними з одиницею, а всі модулі лівими й унітарними. Потрібні основні поняття зі звичайної теорії кілець можна знайти в [7], а матеріал з диференціальної алгебри можна використати з [8] або [9].

Нехай R – кільце. Тоді відображення $\delta: R \to R$ називається його *диференціюванням*, якщо для будь-яких елементів a і b з R правильні рівності $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ і $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. Елемент $a \in R$, для якого $\delta(a) = 0$, називається *константою щодо* δ. Диференціювання, стосовно якого всі елементи кільця є константами, називається *тривіальним*. Кільце з заданим на ньому диференціюванням називається *одинарним диференціальним кільцем*. На практиці часто доводиться розглядати більше, ніж одне диференціювання. Тому надалі кільце R називатимемо *диференціальним*, якщо на ньому задано скінченну множину попарно комутуючих диференціювань $\delta_1, \ldots, \delta_n$. *Константами* довільного диференціального кільця називають елементи, які є константами щодо всіх структурних диференціювань цього кільця. Якщо R – диференціальне кільце з диференціюваннями $\delta_i, i = 1, \ldots, n$, то можна збудувати нове кільце D_R, яке називається кільцем лінійних диференціальних операторів кільця R.

Нагадаємо, що лінійний диференціальний оператор від диференціювань $\delta_1, \ldots, \delta_n$ з коефіцієнтами з кільця R зображається у вигляді

$$\sum_{i_1=0, i_2=0, \ldots, i_n=0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} {d_1}^{i_1} {d_2}^{i_2} \ldots {d_n}^{i_n},$$

де $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in R$, d_i – диференціальні невідомі.

Дію такого оператора на елемент кільця задають за правилом

$$\left(\sum_{i_1=0, i_2=0, \ldots, i_n=0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} {d_1}^{i_1} {d_2}^{i_2} \ldots {d_n}^{i_n} \right)(a) =$$

$$= \sum_{i_1=0, i_2=0, \ldots, i_n=0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \left({\delta_1}^{i_1} \circ {\delta_2}^{i_2} \circ \cdots \circ {\delta_n}^{i_n} \right)(a)$$

для кожного $a \in R$. Сукупність усіх таких лінійних операторів можна перетворити в кільце. Як операцію додавання беремо звичайне додавання лівих поліномів від некомутативних невідомих $d_1, d_2, \ldots, d_n$, а як множення – операцію, яка індукується співвідношеннями $\delta_i \cdot a = a\delta_i + \delta_i(a)$, $a \in R$, з врахуванням дистрибутивності та асоціативності. Це кільце називається *кільцем лінійних диференціальних* *операторів* від диференціювань $d_1, d_2, \dots, d_n$ з коефіцієнтами з диференціального кільця R і позначають через $\mathcal{D}_R$ (див., наприклад, [8]).

Аналогічно визначають ліві модулі з багатьма диференціюваннями. Точніше, нехай M – лівий R-модуль. Відображення $\partial\colon M \to M$ називається *диференціюванням модуля* M, якщо для всіх $m, m_1, m_2 \in M$ і кожного $a \in R$ виконуються рівності:

1) $\partial(m_1 + m_2) = \partial(m_1) + \partial(m_2)$;

2) $\partial(am) = \delta(a)m + a\partial(m)$.

Модуль M, на якому задано скінченну кількість попарно комутуючих диференціювань $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$, називається ***лівим диференціальним R-модулем.*** Якщо M_1 і M_2 – ліві диференціальні R-модулі з диференціюваннями $\partial_1', \partial_2', \dots, \partial_n'$ і $\partial_1'', \partial_2'', \dots, \partial_n''$ відповідно, то R-модульний гомоморфізм $f\colon M_1 \to M_2$ називається *диференціальним гомоморфізмом*, якщо для будь-якого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, виконуються рівності $f(\partial_i'(m)) = \partial_i''(f(m_1))$ для будь-якого $m \in M_1$. Категорію всіх лівих диференціальних R-модулів і всіх диференціальних гомоморфізмів позначатимемо через $R - D\mathrm{mod}$. При $n = 1$ цю категорію називатимемо *одинарною* категорією лівих диференціальних модулів. Добре відомо, що категорія $R - D\mathrm{mod}$ ізоморфна до категорії лівих модулів над кільцем диференціальних операторів кільця R. Цей ізоморфізм визначаємо так: якщо M – лівий диференціальний R-модуль, то $\mathcal{D}_R$-модульна структура на M задається за допомогою співвідношення

$$\left(\sum_{i_1=0, i_2=0, \dots, i_n=0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} {d_1}^{i_1} {d_2}^{i_2} \dots {d_n}^{i_n}\right)(m) =$$

$$= \sum_{i_1=0, i_2=0, \dots, i_n=0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \left({\partial_1}^{i_1} \circ {\partial_2}^{i_2} \circ \dots \circ {\partial_n}^{i_n}\right)(m),$$

де $\sum\limits_{i_1=0, i_2=0, \dots, i_n=0}^{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n} {d_1}^{i_1} {d_2}^{i_2} \dots {d_n}^{i_n} \in \mathcal{D}_R, m \in M$. Навпаки, якщо M – лівий $\mathcal{D}_R$-модуль, то відображення $\partial_i\colon M \to M$, які задають за законом $\partial_i(m) = d_i \cdot m$, $1 \leqslant i \leqslant n$, є диференціюваннями модуля M. Отже, кожний $\mathcal{D}_R$-модуль можна розглядати як диференціальний R-модуль. Легко перевірити, що кожний $\mathcal{D}_R$-модульний гомоморфізм автоматично є диференціальним R-гомоморфізмом.

Аналогічно до того, як це робиться в одинарному випадку, визначаємо поняття диференціального скруту в категорії лівих диференціальних модулів з багатьма диференціюваннями. Говоритимемо, що в категорії $R - Dmod$ задано *диференціальний скрут* σ, якщо кожному лівому диференціальному R-модулю M зіставляється деякий його диференціальний підмодуль $\sigma(M)$ і правильні такі умови.

ДС1. Для кожного диференціального гомоморфізму $f\colon M \to N$

$$f(\sigma(M)) \subseteq \sigma(N).$$

ДС2. Якщо $N \subseteq \sigma(M)$, де $M, N \in R - Dmod$, то $\sigma(N) = N$.

ДС3. $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ для кожного $M \in R - Dmod$.

диференціальний підмодуль $\sigma(M) \subseteq M$ називається *σ-періодичною частиною* диференціального модуля M. Якщо $\sigma(M) = M$ (відповідно, $\sigma(M) = 0$), то M називається *σ-періодичним* (*σ-напівпростим*, або *модулем без σ-скруту*). Якщо одна з цих умов виконується для всіх диференціальних модулів M, то назвемо σ *тривіальним скрутом*. Обидва тривіальні скрути є диференціальними автоматично.

Нехай R – диференціальне кільце з диференціюваннями $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Введемо позначення $a^{(i_1,i_2,\dots,i_n)} = \left(\delta_1{}^{i_1} \circ \delta_2{}^{i_2} \circ \dots \circ \delta_n{}^{i_n}\right)(a)$ для будь-якого елемента a кільця R. Крім того, нехай $a^{(\infty)} = \left\{a^{(i_1,\dots,i_n)} \mid i_1, \dots, i_n = 0, 1, \dots\right\}$.

Нагадаємо, що лівий ідеал I кільця R називається *диференціальним*, якщо для кожного a з I маємо $\delta_i(a) \in I$ для всіх $i = \overline{1, n}$.

Нехай R – диференціальне кільце з диференціюванням δ. Система $\mathcal{F}$ лівих диференціальних ідеалів кільця R називається *диференціальним радикальним фільтром* кільця R, якщо виконуються такі умови.

ДФ1. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $I \subseteq J$, де J – диференціальний ідеал кільця R, то $J \in \mathcal{F}$.

ДФ2. Якщо $I \in \mathcal{F}$ і $a \in R$, то $(I : a^{(\infty)}) \in \mathcal{F}$.

ДФ3. Якщо $I \subset J$, де $J \in \mathcal{F}$ – такий, що $(I : a^{(\infty)}) \in \mathcal{F}$ для кожного $a \in J$, то $I \in \mathcal{F}$.

Як і у випадку звичайних радикальних фільтрів, легко перевірити, що $I \bigcap J \in \mathcal{F}$. Зауважимо таке: коли R розглядати з тривіальним диференціюванням, то диференціальний радикальний фільтр зводиться до звичайного радикального фільтра. В цьому випадку умови ДФ1, ДФ2, ДФ3 позначатимемо через Ф1, Ф2, Ф3 відповідно.

Система $\mathcal{B}$ лівих диференціальних ідеалів, що належать до диференціального радикального фільтра $\mathcal{F}$, називається *базою* для $\mathcal{F}$, якщо кожний диференціальний ідеал, який належить до $\mathcal{F}$, містить деякий диференціальний ідеал з $\mathcal{B}$. Для спрощення термінології лівий ідеал, породжений множинами $a_1^{(\infty)}, a_2^{(\infty)}, \dots, a_n^{(\infty)}$, називатимемо ідеалом, *диференціально породженим* $a_1, a_2, \dots, a_n$. Такі ідеали інколи називаються *диференціально скінченно породженими*.

3. Зв'язок між звичайними і диференціальними радикальними фільтрами. Наступні три леми доводяться аналогічно до відповідних лем для звичайних радикальних фільтрів. Зауважимо, що перші дві з них не вимагають існування одиниці в кільці R.

Лема 1. *Нехай R – диференціальне кільце і $\mathcal{B}$ – система скінченно породжених (як ліві диференціальні ідеали) диференціальних двосторонніх ідеалів кільця R, замкнена стосовно множення ідеалів. Тоді система лівих диференціальних ідеалів $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{T \mid T - \text{лівий диференціальний ідеал}, T \supseteq B, B \in \mathcal{B}\}$ є диференціальним радикальним фільтром кільця R.*

Лема 2. *Нехай R – диференціальне кільце, I– ідемпотентний двосторонній ідеал кільця R. Тоді система лівих диференціальних ідеалів кільця I, які містять ідеал I, є диференціальним радикальним фільтром.*

Зауважимо, що в лемі 2 диференціальність ідеала I не вимагається, оскільки кожний ідемпотентний ідеал диференціального кільця є диференціальним.

Лема 3. *Нехай S – двосторонній диференціальний ідеал кільця R і в кільці R кожний лівий диференціальний ідеал є двостороннім. Тоді система лівих диференціальних ідеалів $\mathcal{F}_S = \{T \mid T -$ лівий диференціальний ідеал, $S + T = R\}$ є диференціальним радикальним фільтром кільця R.*

Наведені леми засвідчують, що диференціальні радикальні фільтри існують. Для доведення того факту, що кожному диференціальному радикальному фільтру відповідає скрут в категорії $R - Dmod$, нам треба довести такі дві леми.

Лема 4. *Нехай R – диференціальне кільце і $\mathcal{F}$ – диференціальний радикальний фільтр. Тоді система $\overline{\mathcal{F}}$ таких лівих ідеалів кільця R, що відповідає таким $B \in \mathcal{F}$, що $B \subseteq T$, є радикальним фільтром кільця R (звичайним).*

Доведення. Умову Ф1 для системи $\overline{\mathcal{F}}$ перевіряємо тривіально. Перевіримо властивість Ф2 радикального фільтра. Нехай $\mathcal{K} \in \overline{\mathcal{F}}$ і $a \in R$. Тоді існує $I \in \mathcal{F}$ такий, що $I \subseteq \mathcal{K}$. Отримуємо

$$(\mathcal{K} : a) \supseteq (I : a) \supseteq (I : a^{(\infty)}) \in \mathcal{F}.$$

З Ф1 випливає, що $(\mathcal{K} : a) \in \overline{\mathcal{F}}$.

Для перевірки умови Ф3 нехай $\mathcal{K} \supset T, \mathcal{K} \in \overline{\mathcal{F}}$ і $(T : \lambda) \in \overline{\mathcal{F}}$ при будь-якому $\lambda \in \mathcal{K}$. Тоді існує $I \in \mathcal{F}$ такий, що $I \subseteq \mathcal{K}$, й існують $I_\lambda \in \mathcal{F}$ такі, що $(T : \lambda) \supseteq I_\lambda$ для кожного $\lambda \in I$. Позначимо через S новий диференціальний ідеал $\sum\limits_{\lambda \in I} I_\lambda \lambda^{(\infty)}$. Тоді $I \bigcap S$ – диференціальний лівий ідеал кільця R і $I \bigcap S \subset I \in \mathcal{F}$. Крім того, $I \bigcap S : \lambda^{(\infty)} \supseteq I_\lambda$ при будь-якому $\lambda \in I$. Отже, за властивістю ДФ3 $I \bigcap S \in \overline{\mathcal{F}}$. Ми одержали, що $T \supseteq S \supseteq I \bigcap S \in \overline{\mathcal{F}}$, звідки випливає, що $T \in \overline{\mathcal{F}}$.

Лема доведена.

Лема 5. *Нехай R – диференціальне кільце з кільцем лінійних диференціальних операторів $\mathcal{D}_R$. Якщо $\mathcal{F}$ – диференціальний радикальний фільтр кільця R, то система $\underline{\mathcal{F}}$ лівих ідеалів кільця $\mathcal{D}_R$, кожний з яких містить лівий ідеал вигляду $\mathcal{D}_R I$, де $I \in \mathcal{F}$ – радикальний фільтр кільця $\mathcal{D}_R$.*

Доведення. Легко перевірити, що умова Ф1 виконується. Перевіримо умову Ф2. Нехай $T \in \underline{\mathcal{F}}$ і $\lambda = \sum\limits_{i_1=0, i_2=0, \ldots, i_n=0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} {d_1}^{i_1} {d_2}^{i_2} \ldots {d_n}^{i_n}$ є довільним елементом кільця $\mathcal{D}_R$. Тоді $\mathcal{K}_\lambda = \bigcap\limits_{i_1=0, i_2=0, \ldots, i_n=0}^{k_1, k_2, \ldots, k_n} (I : a^{(\infty)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \in \mathcal{F}$, де $T \supseteq \mathcal{D}_R I, I \in \mathcal{F}$. Отже, $\mathcal{K}_\lambda \subseteq \mathcal{D}_R I$, тобто $(T : \lambda) \supseteq \mathcal{D}_R \mathcal{K}_\lambda$. Доведемо тепер, що $\underline{\mathcal{F}}$ володіє властивістю Ф3. Нехай $\mathcal{K} \supseteq T, \mathcal{K} \in \underline{\mathcal{F}}$ і $(T : \lambda) \in \underline{\mathcal{F}}$ при будь-якому $\lambda \in \mathcal{K}$. Тоді існує $I \in \mathcal{F}$ такий, що $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{D}_R I$ і для кожного $\lambda \in \mathcal{K}$ існує $I_\lambda \in \mathcal{F}$ такий, що $(T : \lambda) \subseteq I_\lambda$. Зокрема, $I_\lambda \lambda^{(\infty)} \supseteq I \bigcap T$ при будь-якому $\lambda \in I$. Позначимо через S лівий диференціальний ідеал $\sum\limits_{\lambda \in I} I_\lambda \lambda^{(\infty)}$. Тоді $S \bigcap I \subset I$ і $S \bigcap I : \lambda^{(\infty)} \supseteq I_\lambda$ при будь-якому $\lambda \in I$. Отже, за властивістю ДФ3 одержуємо, що $S \bigcap I \in \mathcal{F}$, звідки $T \supseteq I \bigcap T \supseteq S \bigcap I \Rightarrow T \supseteq \mathcal{D}_R(S \bigcap I)$, що і треба було довести.

Теорема 1. *Якщо $\mathcal{F}$ – диференціальний радикальний фільтр диференціального кільця R, то функція $\tau(M) = \{x \mid x \in M, Ix = 0, I \in \mathcal{F}\}$, де $M \in R - Dmod$, є диференціальним скрутом в категорії $R - Dmod$.*

Доведення. Оскільки за лемою 5 $\underline{\mathcal{F}}$ є радикальним диференціальним фільтром кільця $\mathcal{D}_R$, то за теоремою Габріеля-Маранди ([11]) йому відповідає скрут $\underline{\tau}$ у категорії $\mathcal{D}_R - mod$. Але категорія $\mathcal{D}_R - mod$ ізоморфна категорії $R - Dmod$, і при цьому ізоморфізмі скрут $\underline{\tau}$ переходить у деякий скрут τ_1 в категорії $R - Dmod$. Легко переконатись в тому, що $\tau_1 = \tau$. Теорему доведено.

У наступному прикладі використовуємо термінологію теорії узагальнених функцій, з якою можна ознайомитись в [10].

Приклад. Нехай R – кільце нескінченно-диференційовних фінітних дійснозначних функцій, яке розглядається як одинарне диференціальне кільце стосовно звичайного диференціювання. Тоді сукупність усіх узагальнених функцій з класом фінітних основних функцій R є диференціальним R-модулем щодо звичайного диференціювання узагальнених функцій. Зауважимо, що це природний приклад диференціального модуля, який не має структури диференціального кільця. Побудуємо диференціальний радикальний фільтр кільця R. Для цього візьмемо ненульову фінітну нескінченно-диференційовну функцію $f(x)$, яка в нулі разом зі всіма своїми похідними дорівнює нулю. Розглянемо диференціально головний ідеал I, породжений функцією f, тобто

$$I = (f, f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots).$$

Приймемо $\mathcal{F} = \{I, I^2, \dots, I^n, \dots\}$. За лемою 1 $\mathcal{F}$ – диференціальний радикальний фільтр, а за теоремою 1 йому відповідає скрут τ у категорії $R - Dmod$. Виявляється, що диференціальна періодична частина модуля узагальнених функцій збігається з множиною всіх регулярних у нулі узагальнених функцій, тобто це множина усіх узагальнених функцій типу Дірака.

Як бачимо, з кожним диференціальним радикальним фільтром $\mathcal{F}$ пов'язані два звичайні радикальні фільтри $\underline{\mathcal{F}}$ і $\overline{\mathcal{F}}$ кільця $\mathcal{D}_R$ і кільця R відповідно. Позначимо через $Q_{\overline{\mathcal{F}}}$ кільце дробів кільця R стосовно радикального фільтра $\overline{\mathcal{F}}$, а через $Q_{\underline{\mathcal{F}}}$ - кільце дробів кільця $\mathcal{D}_R$ за радикальним фільтром $\underline{\mathcal{F}}$.

Лема 6. Якщо R - диференціальне кільце і $\mathcal{F}$ – диференціальний радикальний фільтр кільця R, якому відповідає точний скрут у категорії $R - Dmod$, то диференціювання δ кільця R можна продовжити до диференціювання кільця $Q_{\overline{\mathcal{F}}}$.

Доведення (це наслідок з основної теореми Голана з [11]).

Теорема 2. *Нехай R – диференціальне кільце і $\mathcal{F}$ – диференціальний радикальний фільтр кільця R. Тоді*

$$Q_{\underline{\mathcal{F}}} \cong \mathcal{D}_{Q_{\underline{\mathcal{F}}}}.$$

Перейдемо до застосування техніки диференціальних радикальних фільтрів під час розв'язання завдання про те, коли в категорії диференціальних модулів над комутативним кільцем всі диференціальні скрути тривіальні. Для цього нам потрібні деякі результати, які належать до диференціальної алгебри.

До кінця статті розглядатимемо лише одинарні диференціальні кільця.

Нагадаємо, що комутативне диференціальне кільце називається *диференціально простим,* якщо в ньому немає нетривіальних диференціальних ідеалів. Зауважимо, що кожне таке кільце має одиницю та характеристику (див. [12]).

Теорема 3. *Нехай R – комутативне диференціально просте кільце характеристики $p > 0$ з диференціюванням δ. Якщо $a_0 + a_1\delta + \ldots + a_n\delta^n = 0$, де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R, a_n \neq 0$ при деякому натуральному n, то*

$$R \cong K[x]/(x^p),$$

де K – деяке поле характеристики $p > 0$.

Доведення. Оскільки $\delta(x^p) = 0$ для будь-якого $x \in R$, то x^pR – диференціальний ідеал кільця R при довільному $x \in R$. За умов диференціальної простоти кільця R маємо, що або $x^pR = 0$, або $x^pR = R$. Це означає, що x або зворотний, або нільпотентний, тобто, що R – локальне кільце з максимальним ідеалом N, який є нільідеалом.

Виберемо тепер оператор

$$b_0 + b_1\delta + \ldots + b_k\delta^k = 0 \tag{1}$$

з найменшим можливим k таким, що $b_k \neq 0$. Тоді коефіцієнти b_k, які трапляються в операторах вигляду (1), утворюють диференціальний ідеал, відмінний від нульового. На підставі диференціальної простоти кільця R отримаємо, що цей ідеал збігається з кільцем R. Це означає, що

$$c_0 + c_1\delta + \ldots + c_{k-1}\delta^{k-1} + \delta^k = 0 \tag{2}$$

при деяких $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in R$.

Враховуючи (2), отримаємо, що N – нільпотентний ідеал кільця R, тобто що $(N)^k = 0$. Справді, нехай $z = y_1y_2\ldots y_k$ – добуток k довільних елементів ідеалу N. Очевидно, $\delta(z), \delta^2(z), \ldots, \delta^{k-1}(z)$ знову будуть елементами ідеалу N, а завдяки (2) і $\delta^k(z) \in N$. Диференціюючи (2), застосоване до елемента z, бачимо, що $\delta^n(z) \in N$ при будь-якому натуральному n. Диференціальний ідеал $\{z\}$, породжений елементом z, є диференціальним ідеалом, який міститься в ідеалі N. На підставі диференціальної простоти кільця R маємо, що $\{z\} = 0$, а отже, і $z = 0$. Оскільки z – довільний елемент з N^k, то $N^k = 0$.

Для завершення доведення достатньо застосувати теорему 4.1 з праці Блокка [12], яка стверджує таке: якщо в комутативному диференціально простому кільці R характеристики $p > 0$ існує такий елемент $x \neq 0$, що $xN = 0$, то це кільце ізоморфне $K[x]/(x^p)$, де K – поле характеристики p.

Теорема доведена.

Нехай R – довільне кільце (без диференціювання). Розглянемо кільце $R[x]$ поліномів з коефіцієнтами з R від комутуючої змінної x. Припустимо, що кільце R має ненульову характеристику $p > 0$. Тоді $R[x]$ є диференціальним кільцем стосовно звичайного диференціювання, а ідеал (x^p) є диференціальним ідеалом, тому фактор-кільце $R_p = R[x]/(x^p)$ є диференціальним кільцем, яке називається *кільцем зрізаних поліномів з коефіцієнтами з R*.

Правильне таке твердження.

Твердження 1. *Нехай K – кільце характеристики $p > 0$. Тоді кільце лінійних диференціальних операторів кільця зрізаних поліномів з коефіцієнтами з K ізоморфне до кільця $p \times p$-матриць над кільцем K.*

Доведення. Нехай $R = K[x]/(x^p)$ і $\mathcal{D}_R$ – кільце лінійних диференціальних операторів кільця R. Тоді кожний елемент з $\mathcal{D}_R$ має вигляд $\sum\limits_{i,j=0}^{p-1} a_{ij}x^i\delta^j$. Побудуємо відображення з $\mathcal{D}_R$ у кільце матриць порядку p над K. Нехай

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p-1 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

тоді приймемо

$$\kappa\left(\sum_{i,j=0}^{p-1} a_{ij}x^i\delta^j\right) = \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{ij}X^iD^j.$$

Для перевірки того, що κ – кільцевий гомоморфізм, достатньо перевірити, що $DX = XD + E$, де E – одинична матриця, але це перевіряється безпосереднім обчисленням.

Покажемо, що κ – сюр'єктивний гомоморфізм. Для цього обчислимо добутки X^iD^j і D^iX^j. Отримаємо

$$X^iD^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{i!}{1!} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(i+1)!}{2!} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{(p-1)!}{(p-i-1)!} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{i!}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \frac{(i+1)!}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

й аналогічно

$$
D^i X^j = \begin{pmatrix}
* & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & * & 0 & \dots & 0 & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & * & 0 & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & * & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix},
$$

де $*$ позначає деякий елемент кільця K, причому зворотний, а кожний із верхніх блоків матриць має i рядків.

З вигляду матриць $X^i D^j$ і $D^i X^j$ легко зрозуміти, що за допомогою них можна отримати всі матричні одиниці кільця $Mat(K,p)$. Отже, κ – сюр'єктивний гомоморфізм.

Ін'єктивність відображення κ випливає з того, що кожна матриця виражається через матричні одиниці однозначно (це можна перевірити безпосередньо).

Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай R – таке комутативне диференціально просте кільце характеристики $p > 0$, що кільце $\mathcal{D}_R$ ізоморфне до кільця матриць над деяким тілом K. Тоді кільце R ізоморфне до кільця зрізаних поліномів над деяким полем характеристики $p > 0$.*

Доведення. Позаяк $\mathcal{D}_R$ лівий векторний простір скінченної вимірності над тілом K, то при деякому n

$$k_0 + k_1\delta + \ldots + k_n\delta^n = 0. \tag{3}$$

Розглянувши елементи k_i як оператори з $\mathcal{D}_R$ і звівши (3) до вигляду $a_0 + a_1\overline{\delta} + \ldots + k_m\overline{\delta}^m = 0$, одержимо залежність, яка є в умовах теореми 3, звідки і випливає наше твердження.

Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай R – комутативне диференціально просте кільце. Якщо в категорії $R - Dmod$ всі диференціальні скрути тривіальні, то R ізоморфне до кільця зрізаних поліномів над полем характеристики $p > 0$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок характеристики 0. Познер [13] довів, що комутативне диференціально просте кільце R характеристики 0 є областю цілісності, а отже, і кільце $\mathcal{D}_R$ є областю цілісності. Проте над областю цілісності всі скрути тривіальні лише в тому випадку, коли ця область цілісності є полем. Позаяк в $\mathcal{D}_R$ елемент δ завжди незворотний, то звідси випливає, що над диференціально простим кільцем характеристики 0 завжди існують нетривіальні диференціальні скрути.

Нехай тепер char$R = p > 0$. Тоді за результатом В. А. Андрунакієвича та Ю. М. Рябухіна [14] кільце $\mathcal{D}_R$ є кільцем матриць над локальним досконалим кільцем.

---

1. *Golan J. S.* Torsion theories. – Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics Series. No. 29, Longman Scientific and Technical. – 1986.
2. *Горбачук О. Л., Комарницький М. Я.* Про диференціальні кручення. – У зб. "Теоретичні і прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь". – К.: Наук. думка, 1977. – С. 11-15.
3. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория. – М., 1979.
4. *Popescu N.* Abelian categories with applications to rings and modules. – London & New York, Academic press, 1973.
5. *Lopez A. J., Lopez M. P. L., Noova E. V.* Gabriel Filters in Grothendieck categories // Publications Mathematiques. – 1992. – Vol. 36. – P. 673-683.
6. *Goodearl K. R., Letzter E. S.* Prime ideals in skew and q-skew polynomial rings // Memoirs AMS. – 1994. – Vol. 109. – № 521. – P. 1-106.
7. *Kolchin E. R.* Differential algebra and algebraic groups. – New York, 1976.
8. *Bjork, J.-E.* Rings of differential operators. – Text. Monograph, North-Holland Publ. Co., 1979.
9. *Block R. E.* Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal // Ann. of Math. – 1969. – Vol. 90. – № 3. – P. 438-459.
10. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М., 1958, Т. 1.
11. *Golan J. S.* Extension of derivation to modules of quotients // Comm. Alg. – 1981. – Vol. 9. – № 3. – P. 275-281.
12. *Block R. E.* Determination of the diferentially simple rings with a minimal ideal // Ann. of Math. – 1960. – Vol. 90. – № 3. – P. 438-459.
13. *Posner E. C.* Differentially simple rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1960. – Vol. 11. – P. 337-343.
14. *Андрунакиевич В. А., Рябхин Ю. М.* Наднильпотентные и подимпотентные радикалы алгебр и радикалы модулей // Матем. исслед. – 1968. – № 3. – Вып. 2. – С. 5-15.

ON DIFFERENTIAL RINGS FOR WHICH ALL DIFFERENTIAL TORSION THEORIES ARE TRIVIAL

M. Komarnytsky, V. Stefanyak

Ivan Franko National University of Lviv,
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine

Some methods of constructing differential radical filters are proposed. In addition every differential radical filter is in correspondence with some differential torsion theory in the category of left differential modules over the basic differential ring. One kind of differential rings for which all differential torsion theories are trivial is described.

Key words: derivation, differential rings, differentially simple rings, differential modules, differential torsion theories, differential radical filters, trivial differential torsion theories.

Стаття надійшла до редколегії 15.08.2002
Прийнята до друку 14.03.2003