ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.61.С.249–258

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.61.P.249–258

УДК 393.3

СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Віктор РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем математики і механіки імені Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна

Отримано зображення напружено-деформованого стану (НДС) при довільному осесиметричному навантаженні на торцях товстостінного циліндра у вигляді ряду за власними функціями. Доведено існування зліченої кількості власних значень. Коефіцієнти ряду знаходять з умови мінімуму інтеграла квадрата відхилення розв'язку від заданих граничних умов на торці. Запропоновано два чисельні методи знаходження коефіцієнтів ряду. Знайдено розв'язок крайової задачі для бігармонічного рівняння в циліндричній системі координат.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, власні значення, власні функції, проблема моментів, цілі функції, осесиметрична теорія пружності, напружено-деформований стан, циліндр.

У статті розглянуто НДС товстостінного циліндра: внутрішній радіус – R_1, зовнішній – R_2, нескінченної або скінченної довжини H, вісь x збігається з віссю симетрії циліндра. Циліндр навантажений довільними осесиметричними торцевими зусиллями при вільних від навантаження бокових поверхнях. Запропоноване формулювання задачі може описувати пружний півпростір, куля, куля або півпростір з вирізом, суцільний циліндр і т.п. Для того щоб знайти НДС товстостінного циліндра, потрібно проінтегрувати рівняння Ляме [1-3] при заданих граничних умовах. Осесиметричні задачі розглядали в [1-7]. Огляд літератури наведено в [2-3]. У працях [5,6] запропоновано чисельний розв'язок рівнянь Ляме, в [4] наведений наближений розв'язок. В [7] подано розрахунок тонкостінного циліндра у випадку, коли його можна моделювати циліндричною оболонкою. Проте проблема побудови наближеного з заданою точністю аналітичного розв'язку для довільного навантаження на торцях залишилася невирішеною.

1. Знаходження розв'язку методом розкладання в ряд за власними функціями. Ляв [1], виразивши переміщення і напруження у вигляді

$$w = -\frac{1}{2G}\frac{\partial^2}{\partial r \partial x}L, \quad u = \frac{1}{2G}\left[2(1-\nu)\nabla^2 L - \frac{\partial^2}{\partial x^2}L\right], \; \sigma_r = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\nabla^2 L - \frac{\partial^2}{\partial r^2}L\right),$$

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial x}\left((2-\nu)\nabla^2 L - \frac{\partial^2}{\partial x^2}L\right),\ \tau_{rx} = \tau = \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\nabla^2 L - \frac{\partial^2}{\partial x^2}L\right), \tag{1}$$

звів розв'язання рівнянь Ляме до знаходження бігармонічної функції $L = L(x,r)$, що задовольняє відповідні граничні умови та рівняння

$$\nabla^2\nabla^2 L(x,r) = 0,\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{2}$$

де ν - коефіцієнт Пуассона, G - модуль зсуву.

Сформульовану задачу розрахунку НДС товстостінного циліндра зведемо до знаходження такого розв'язку бігармонічного рівняння (2), який задовольняє нульові граничні умови на бокових поверхнях

$$\sigma_r(x,R_j) = 0,\ \tau(x,R_j) = 0,\ \ j = 1,2 \tag{3}$$

і задані граничні умови в напруженнях на торцях циліндра [див. 1, 2, 3]. Цей розв'язок подамо методом розділення змінних у вигляді ряду

$$L(x,r) = \sum_{k=1}^{\infty} Re\{\left(Z_{0,k}^2(\beta_k r) + rZ_{1,k}^1(\beta_k r)\right)\exp(-\beta_k x) +$$

$$+\left(Z_{0,k}^4(\beta_k r) + rZ_{1,k}^3(\beta_k r)\right)\exp(\beta_k x)\}, \tag{4}$$

де $\beta_k \in C$ – шукані спектральні параметри, для яких окремі розв'язки в зображенні (4) задовольняють граничні умови (3). Введені функції $Z_{m,k}^j(\beta_k r) = g_{k,j}J_m(\beta_k r) + c_{k,j}N_m(\beta_k r)$, $j = \overline{1,4}$ є циліндричними, де $g_{k,j}, c_{k,j}$ - невідомі загалом комплексні коефіцієнти, $J_m(\beta_k r)$ - функції Бесселя першого роду, $N_m(\beta_k r)$ - функції Бесселя другого роду або функції Неймана [8].

Спочатку припустимо, що циліндр за змінною x в сторону додатних значень є півбезмежним. З фізичних міркувань випливає, що в цьому випадку окремий частковий розв'язок бігармонічного рівняння (2) у зображенні (4) повинен мати вигляд

$$L(x,\beta r) = Re\{\left(Z_0^2(\beta r) + rZ_1^1(\beta r)\right)\exp(-\beta x)\}, \tag{5}$$

де $Re(\beta) > 0$, $Z_0^1(\beta r) = gJ_0(\beta r) + cN_0(\beta r)$, $Z_0^2(\beta r) = bJ_0(\beta r) + aN_0(\beta r)$, a, g, c, b, - невідомі комплексні коефіцієнти. Якщо функція Лява $L(x,\beta r)$ задовольняє граничні умови (3), то її називатимемо власною функцією. Підставивши функцію Лява (5) у зображення напружень (1) і використавши властивості Беселевих функцій, виразимо нормальні та дотичні напруження через введені циліндричні функції:

$$\sigma_r = Re\{\beta\left((1-2\nu)\beta Z_0^1(\beta r) + \left[\frac{\beta}{r}Z_1^2(\beta r) - \beta^2 Z_0^2(\beta r) - \beta^2 rZ_1^1(\beta r)\right]\right)\exp(-\beta x)\},$$

$$\sigma_x = -Re\{\beta\left[2(2-\nu)\beta Z_0^1(\beta r) - \beta^2\left(Z_0^2(\beta r) + rZ_1^1(\beta r)\right)\right]\exp(-\beta x)\}, \tag{6}$$

$$\tau = Re\{\beta^2\left[\beta Z_1^2(\beta r) - 2(1-\nu)Z_1^1(\beta r) - \beta rZ_0^1(\beta r)\right]\exp(-\beta x)\}.$$

Знайдемо рівняння, яке повинно задовольняти спектральний параметр β, щоб функція $L(x,\beta r)$ стала власною функцією. З зображення (6) випливає, що граничні умови (3), з яких можна визначити власні значення β, набувають вигляду

$$\left[\frac{1}{R_j} Z_1^2(\beta R_j) + (1-2\nu) Z_0^1(\beta R_j) - \beta Z_0^2(\beta R_j) - \beta R_j Z_1^1(\beta R_j)\right] = 0,$$

$$\left[\beta Z_1^2(\beta R_j) - 2(1-\nu) Z_1^1(\beta R_j) - \beta R_j Z_0^1(\beta R_j)\right] = 0, \ j = 1, 2. \tag{7}$$

Використавши вираз власних функцій (5), зведемо граничні умови (7) до чотирьох лінійних рівнянь з невідомими комплексними коефіцієнтами a, g, c, b

$$\beta\left(bJ_1(\beta R_j) + aN_1(\beta R_j)\right) - 2(1-\nu)\left(gJ_1(\beta R_j) + cN_1(\beta R_j)\right) - \beta R_j\big(gJ_0(\beta R_j) +$$

$$+cN_0(\beta R_j)\big) = 0, \quad \left(bJ_1(\beta R_j) + aN_1(\beta R_j)\right) + (1-2\nu) R_j\left[gJ_0(\beta R_j) + cN_0(\beta R_j)\right] -$$

$$-\beta R_j^2\left(gJ_1(\beta R_j) + cN_1(\beta R_j)\right) - \beta R_j\left(bJ_0(\beta R_j) + aN_0(\beta R_j)\right) = 0, \ j = 1, 2. \tag{8}$$

Як відомо, відмінний від нуля розв'язок системи (8) можливий тільки за умови рівності нулю визначника цієї системи. Якщо розкрити визначник, то отримаємо характеристичне рівняння, яке можна розв'язати чисельно. Отже, потрібно знайти набір спектральних параметрів β_k і власних функцій (5), які б у вигляді ряду задовольнили відповідні граничні умови в напруженнях на торцях циліндра. Врахувавши зображення (6), (7), легко визначити таке.

Теорема 1. *Якщо функція Лява (5) задовольняє другу граничну умову (7), то нормальні торцеві напруження, які їй відповідають, є самозрівноваженими.*

Доведення. За означенням, нормальні торцеві напруження є самозрівноваженими тоді і тільки тоді, коли сумарне інтегральне нормальне зусилля T_x, яке діє на торці циліндра, дорівнює нулю. Теорему доведемо безпосереднім обчисленням. Врахувавши співвідношення (6), знайдемо зусилля T_x, яке діє на торці циліндра

$$T_x = 2\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} r\sigma_x(0, r)\, dr = 2\pi\beta^3 \left[\beta Z_1^2(\beta r) - 2(1-\nu) Z_1^1(\beta r) - \beta r Z_0^1(\beta r)\right]_{R_1}^{R_2}.$$

Використавши другу граничну умову (7), отримаємо твердження теореми. Теорема 1 правильна також для окремих розв'язків (4), а отже, і для будь-якого набору розв'язків у вигляді (4), (5). Звідси випливає, що одних розв'язків вигляду (4), (5) у випадку, коли на торці циліндра діє несамозрівноважене сумарне зусилля $T_x \neq 0$, недостатньо. Спочатку треба розв'язати відому задачу [1,2] для рівномірно розподілених на торці циліндра нормальних напружень σ_x і долучити в подання функції Лява (4) доданок $L_0(x, r) = \frac{G}{E}\sigma_0 x\left(\nu r^2 + \frac{1-2\nu}{3}x^2\right)$, де $\sigma_0 = \frac{T_x}{S}$, S - площа торцевої поверхні, E - модуль Юнга. Функція $L_0(x, r)$ відповідає нульовому значенню спектрального параметра $\beta_0 = 0$. Легко перевірити, що вона є власною функцією.

2. Обчислення НДС суцільного циліндра. Розглянемо суцільний циліндр $R_1 = 0$, $R_2 = R$,. Введемо безрозмірну радіальну змінну γ, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, $r = R\gamma$.

У цьому випадку коефіцієнти a, c в зображенні (5) повинні дорівнювати нулю і характеристичне рівняння системи (8) спрощується до вигляду

$$z^2 \left[J_0^2(z) + J_1^2(z)\right] = \delta J_1^2(z), \qquad (9)$$

де $\delta = 2(1-\nu)$, $z = \beta R$ - безрозмірний спектральний параметр. Легко зауважити, що дійсні розв'язки характеристичного рівняння (9) можливі тільки за $z^2 < \frac{\delta}{2}$. З поведінки функцій Бесселя при $z^2 < \frac{\delta}{2}$ випливає, що характеристичне рівняння (9) має тільки один дійсний корінь $z_0 = 0$, якому відповідає власна функція $L_0(x, r)$. Інші корені характеристичного рівняння будуть комплексними і мають вигляд $z_k = (\pm\mu_k \pm i\alpha_k) R$. Ми повинні вибрати корені з додатними дійсними частинами $z_k = \mu_k + i\alpha_k$, $\overline{z_k} = \mu_k - i\alpha_k$, де $\mu_k > 0$, $k = 1, 2, 3...$

Розв'язування рівняння (9) зведемо до задачі пошуку нулів функції

$$F(z) = z^2 \left[J_0^2(z) + J_1^2(z)\right] - \delta J_1^2(z). \qquad (10)$$

Використовуючи означення порядку і типу функції [див. 9, 10], можна показати, що функція $F(z)$ є цілою порядку 1 типу 2.

Теорема 2. *Функція $F(z)$ має зліченну кількість нулів $z_k = R\beta_k$.*

Доведення. Приймемо $z = \sqrt{\zeta}$. Функція $F\left(\sqrt{\zeta}\right)$ стосовно комплексної змінної ζ є функцією порядку $\frac{1}{2}$. З теореми 5 [10, с.268] випливає доведення.

Теорема 3. *Система функцій $\{ J_0(z_k\gamma), J_1(z_k\gamma)\}$, $k = 0, 1, 2, ...$ є повною в комплексному крузі $|\gamma| \leqslant 1$.*

Доведення. Оскільки $J_0(z), J_1(z)$ - цілі функції порядку $\rho = 1$ типу $\sigma = 1$, а для послідовності нулів $z_k = R\beta_k$ виконується умова $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{|z_k|} < e$, то доведення теореми 3 випливає з твердження теореми 18 [див. 9, с. 283].

Наслідок. *Система функцій $\{J_0(z_k\gamma)\}$, $k = 0, 1, 2, ...$ є повною на одиничному відрізку $\gamma \in [0, 1]$ в класі аналітичних функцій.*

З граничних умов (8) (у випадку суцільного циліндра) випливає, що невідомі коефіцієнти g_k, b_k комплексні та лінійно залежні між собою

$$b_k = \zeta_k g_k, \text{ де } \quad \zeta_k = \frac{m_k + \delta}{\beta_k}, \; m_k = \sqrt{\delta - (z_k)^2}. \qquad (11)$$

Розмістимо корені z_k , а отже і β_k, в порядку зростання їх дійсних частин. Кожному кореню z_k відповідає окремий розв'язок (5), (11), в який входить довільний комплексний коефіцієнт g_k.

2.1. Знаходження НДС півбезмежного циліндра методом моментів. У цьому випадку функція Лява, яка визначає НДС суцільного циліндра, набуває вигляду

$$L(x, R\gamma) = L_0(x, R\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} Re\{g_k\varphi_k(z_k\gamma)\exp(-\beta_k x)\}, \qquad (12)$$

де $\gamma = \frac{r}{R}$, $\varphi_k(z_k\gamma) = \varsigma_k J_0(z_k\gamma) + R\gamma J_1(z_k\gamma)$. Комплексні коефіцієнти g_k знайдемо з відомих граничних умов. Припустимо, що на торці циліндра задано нормальні та дотичні напруження, які можна подати у вигляді

$$\sigma(\gamma) = \sigma_0 + f_1(\gamma) = \sigma_0 + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \gamma^{2j}, \ \tau_g(\gamma) = f_2(\gamma) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \gamma^{2j+1}, \ 0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \quad (13)$$

де $\sigma_0 \neq 0$ - задає рівномірний стиск-розтяг циліндра. Функції $f_1(\gamma)$, $f_2(\gamma)$ повинні задовольняти коректні фізичні умови

$$\int_0^1 \gamma f_1(\gamma)\, d\gamma = 0, \ f_2(1) = 0, \ |f_1(\gamma)| < \infty, \ |f_2(\gamma)| < \infty, \ \gamma \in [0,1]. \quad (14)$$

Зображення (13) не накладає обмежень на значення прикладених зовнішніх дотичних і нормальних зусиль, оскільки довільну функцію інтегровну на проміжку $[0,1]$ можна апроксимувати з заданою точністю парними та непарними поліномами.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів g_k використаємо метод моментів [11] разом з методом найменших квадратів. Врахувавши співвідношення (11), (12), (13), подамо граничні умови на торці циліндра у вигляді

$$f_1(\gamma) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \gamma^{2j} = \sum_{k=1}^{\infty} Re\,[c_k \chi_k(\gamma)],$$

$$f_2(\gamma) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \gamma^{2j+1} = \sum_{k=1}^{\infty} Re\,[c_k \psi_k(\gamma)], \quad (15)$$

де $\chi_k(\gamma) = (m_k - 2)J_0(z_k\gamma) + z_k\gamma J_1(z_k\gamma)$, $\psi_k(\gamma) = m_k J_1(z_k\gamma) - z_k\gamma J_0(z_k\gamma)$, $c_k = x_k + iy_k = \frac{z_k^2}{R^2} g_k$, x_k, y_k - визначають дійсну й уявну частину невідомого комплексного коефіцієнта c_k, i - уявна одиниця. Виділимо у функцій $\chi_k(\gamma)$, $\psi_k(\gamma)$ дійсну й уявну частину $\chi_k(\gamma) = \chi_{rk}(\gamma) + i\chi_{yk}(\gamma)$, $\varphi_k(\gamma) = \psi_{rk}(\gamma) + i\psi_{yk}(\gamma)$.

З наслідку теореми 3 випливає, що система функцій $\{\chi_k(\gamma)\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ є повною на відрізку $\gamma \in [0,1]$, а $\{\psi_k(\gamma)\}$, $k = 1,2,3,\ldots$ - повною в класі аналітичних функцій, які дорівнюють нулю при $\gamma = 0$, $\gamma = 1$. Це відповідає обмеженням (14) на граничні навантаження.

Розглянемо інтеграл квадратичного відхилення шуканого розв'язку від заданих зовнішніх граничних навантажень на торці циліндра

$$\Phi\{x_1,\ldots x_N, y_1,\ldots y_N\} = \int_0^1 \gamma \left\{ \left\{ \sum_{k=1}^{N} [x_k \chi_{rk}(\gamma) - y_k \chi_{yk}(\gamma)] - f_1(\gamma) \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_{k=1}^{N} [x_k \psi_{rk}(\gamma) - y_k \psi_{yk}(\gamma)] - f_2(\gamma) \right\}^2 \right\} d\gamma, \quad (16)$$

де N задає кількість членів ряду (15). Комплексні коефіцієнти c_k, визначимо з умови мінімуму функціонала (16). Для його мінімізації знайдемо частинні похідні $\frac{\partial \Phi\{x_1,\ldots,x_N, y_1,\ldots,y_N\}}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \Phi\{x_1,\ldots,x_N, y_1,\ldots,y_N\}}{\partial y_j}$, $j = \overline{1,N}$ і прирівняємо їх до нуля.

Після громіздких обчислень інтегралів одержимо систему $2N$ лінійних рівнянь для визначення $2N$ невідомих x_k, y_k, $k=\overline{1,N}$ у вигляді

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{x_k B^1_{k,j}-y_k B^2_{k,j}\right\}=\int_0^1 \gamma\left[f_1(\gamma)\,\chi_{rj}(\gamma)+f_2(\gamma)\,\psi_{rj}(\gamma)\right],$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{x_k B^3_{k,j}-y_k B^4_{k,j}\right\}=\int_0^1 \gamma\left[f_1(\gamma)\,\chi_{yj}(\gamma)+f_2(\gamma)\,\psi_{yj}(\gamma)\right],\ j=\overline{1,N}, \tag{17}$$

де $B^1_{k,j}=Re\,(N_{k,j})$, $B^2_{k,j}=Im\,(N_{k,j})$, $B^3_{k,j}=-Im\,(A_{k,j})$, $B^4_{k,j}=Re\,(A_{k,j})$,

$$2N_{k,j}=D_{k,j}(z_k,z_j)+D_{k,j}(z_k,\overline{z}_j)+M_{k,j}(z_k,z_j)+M_{k,j}(z_k,\overline{z}_j),$$

$$2A_{k,j}=-D_{k,j}(z_k,z_j)+D_{k,j}(z_k,\overline{z}_j)-M_{k,j}(z_k,z_j)+M_{k,j}(z_k,\overline{z}_j).$$

Коефіцієнти $M_{k,j}(z_k,z_j)$, $D_{k,j}(z_k,z_j)$, $k=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N}$ для значень індексів $k\neq j$ знаходять за формулами

$$M_{k,j}(z_k,z_j)=m_k m_j F_{1,1}(z_k,z_j)-m_k z_j G(z_j,z_k)-m_j z_k G(z_k,z_j)+z_k z_j F_{0,3}(z_k,z_j),$$

$$D_{k,j}(z_k,z_j)=Q_k Q_j F_{0,1}(z_k,z_j)+Q_k z_j G(z_k,z_j)+Q_j z_k G(z_j,z_k)+$$

$$+z_k z_j F_{1,3}(z_k,z_j),\quad F_{0,1}(z_k,z_j)=W(z_k,z_j)\left[z_k J_1(z_k)\,J_0(z_j)-z_j J_1(z_j)\,J_0(z_k)\right],$$

$$G(z_k,z_j)=W(z_k,z_j)\left[z_k J_1(z_k)\,J_1(z_j)+z_j J_0(z_j)\,J_0(z_k)-2z_j F_{0,1}(z_j,z_k)\right],$$

$$F_{1,3}(z_k,z_j)=W(z_k,z_j)\left[2z_k G(z_k,z_j)-2z_j G(z_j,z_k)-z_k J_0(z_k)\,J_1(z_j)+\right.$$

$$\left.+z_j J_0(z_j)\,J_1(z_k)\right],\quad W(z_k,z_j)=\frac{1}{z_k^2-z_j^2},\quad Q_k=m_k-2,$$

$$F_{0,3}(z_k,z_j)=\frac{1}{z_k}\left[z_j F_{1,3}(z_k,z_j)+J_1(z_k)\,J_0(z_j)-2G(z_j,z_k)\right],$$

$$F_{1,1}(z_k,z_j)=W(z_k,z_j)\left[z_k J_2(z_k)\,J_1(z_j)-z_j J_2(z_j)\,J_1(z_k)\right].$$

Коефіцієнти $D_{k,k}(z_k,z_k)$, $M_{k,k}(z_k,z_k)$, $k=\overline{1,N}$ знаходять за формулами

$$6D_{k,k}(z_k,z_k)=3Q_k^2\left[J_1^2(z_k)+J_0^2(z_k)\right]+z_k^2\left[J_1^2(z_k)+J_2^2(z_k)\right]+6Q_k J_1^2(z_k),$$

$$12M_{k,k}(z_k,z_k)=6m_k^2\left[J_1^2(z_k)-J_0(z_k)\,J_2(z_k)\right]-12m_k J_1^2(z_k)+$$

$$+z_k^2\left[2J_1^2(z_k)+3J_0^2(z_k)-J_2^2(z_k)\right].$$

Як бачимо, інтегральні коефіцієнти $B^m_{k,j}$, $k=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N}$, $m=\overline{1,4}$ у лівій частині системи рівнянь (17) знайдено в явному вигляді через функції Бесселя, а в правій частині – інтеграли від відомих функцій. Розв'яжемо цю систему $2N$ лінійних рівнянь, одержимо дійсні й уявні частини комплексних коефіцієнтів c_k, $k=\overline{1,N}$. Знайдемо шукані комплексні коефіцієнти $g_k=\frac{R^2}{z_k^2}c_k$. Далі за поданнями (1), (12) знайдемо НДС суцільного циліндра.

2.2. Знаходження НДС обмеженого суцільного циліндра. Розглянемо циліндр скінченної висоти H, навантажений з двох боків довільними нормальними та дотичними напруженнями з однаковим нормальним зусиллям $T_x = S\sigma_0$

$$\sigma_N(B_m,\gamma) = \sigma_0 + \sum_{j=0}^{N-1} a_j^m \gamma^{2j}, \quad \tau_g(B_m,\gamma) = \sum_{j=0}^{N-1} b_j^m \gamma^{2j+1}, \tag{18}$$

де індекс $m = 0$ відповідає нижньому торцю, $m = 1$ - верхньому торцю, $B_0 = 0$, $B_1 = \frac{H}{R}$, а функції $\sigma_N(B_m,\gamma)$, $\tau_g(B_m,\gamma)$, $m = 0,1$ стосовно змінної γ задовольняють умови, аналогічні (14). Функція Лява для скінченного циліндра має зображення

$$L = L_0(x, R\gamma) + \sum_{k=1}^{N} Re\{[\varsigma_k J_0(z_k\gamma) + rJ_1(z_k\gamma)][g_k e^{(-\beta_k x)} + q_k e^{(\beta_k x)}]\}. \tag{19}$$

Для знаходження невідомих g_k, q_k використаємо метод розкладення граничних умов в ряд за степенями змінної γ. Врахувавши зображення (6), (19) і зовнішні навантаження (18), після перетворень одержимо граничні умови у вигляді двох рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N} Re\{\beta_k^2 [g_k \exp(-z_k B_m) - q_k \exp(z_k B_m)] [(m_k - 2) J_0(z_k\gamma) + z_k\gamma J_1(z_k\gamma)]\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} a_j^m \gamma^{2j}, \qquad \sum_{k=1}^{N} Re\{\beta_k^2 [g_k \exp(-z_k B_m) +$$

$$+ q_k \exp(z_k B_m)] [m_k J_1(z_k\gamma) - z_k\gamma J_0(z_k\gamma)]\} = \sum_{j=0}^{N-1} b_j^m \gamma^{2j+1}, \tag{20}$$

де $m = 0,1$. Прирівнявши в рівняннях (20) коефіцієнти при однакових степенях змінної γ, одержимо чотири системи по N лінійних рівнянь для визначення невідомих комплексних коефіцієнтів g_k, q_k

$$\sum_{k=1}^{N} Re\left\{z_k^{2j+3}(m_k - 2 - 2j)[g_k \exp(-z_k B_m) + q_k \exp(z_k B_m)]\right\} = 2(j+1)A_j b_j^m,$$

$$\sum_{k=1}^{N} Re\left\{z_k^{2j+2}(m_k - 2 - 2j)[g_k \exp(-z_k B_m) - q_k \exp(z_k B_m)]\right\} = A_j a_j^m, \tag{21}$$

де $j = \overline{0, N-1}$, $m = 0,1$, $A_j = (-1)^j\, 2^{2j} j! j! R^2$.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (21) і визначимо невідомі g_k, q_k. Далі за формулами (1), (19) знайдемо НДС циліндра заданої висоти H.

3. Знаходження НДС півбезмежного товстостінного циліндра. Введемо безрозмірні змінні $2R = R_1 + R_2$, $2h = R_2 - R_1$, $\varepsilon R = h$, $r = R\gamma$, $z = \beta R$, $\beta R_j = z\alpha_j$, $\alpha_j = 1 + (-1)^j \varepsilon$, $j = 1,2$. Після громіздких перетворень подамо умову рівності нулю визначника системи рівнянь (8) у вигляді трансцендентного рівняння стосовно комплексного спектрального параметра z

$$\left(\alpha_1^2 z^2-\delta\right)\left(\alpha_2^2 z^2-\delta\right) B_{11}(z)+\alpha_1^2 \alpha_2^2 z^4 B_{00}(z)+\left(\alpha_1^2 z^2-\delta\right) \alpha_2^2 z^2 B_{10}(z)+$$
$$+\left(\alpha_2^2 z^2-\delta\right) \alpha_1^2 z^2 B_{01}(z)-\frac{4 z^2}{\pi^2}\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)+\frac{8 \delta}{\pi^2}=0, \qquad (22)$$

де

$$B_{kj}(z)=\left[J_k\left(\alpha_1 z\right) N_j\left(\alpha_2 z\right)-J_k\left(\alpha_2 z\right) N_j\left(\alpha_1 z\right)\right]^2, \ k=0,1, \ j=0,1.$$

Безпосереднім обчисленням можна перевірити, що для функцій $B_{kk}(z)$, $z^2 B_{01}(z)$, $z^2 B_{10}(z)$ точка $z=0$ є регулярною. Отже, характеристичне рівняння (22) визначає цілу функцію, яка має нескінченну кількість нулів z_k, $k=1,2,3\ldots$.

Підставивши зображення (5) для кожного значення z_k в граничні умови (8), (аналогічно як для суцільного циліндра), виразимо невідомі коефіцієнти a_k, c_k, b_k через g_k у вигляді $b_k=R\varsigma_{k,1}g_k$, $c_k=\varsigma_{k,2}g_k$, $a_k=R\varsigma_{k,3}g_k$. Функція Лява в цьому випадку має зображення

$$L(x, R\gamma)=L_0(x, R\gamma)+\sum_{k=1}^{\infty} Re\{Rg_k[\gamma J_1(z_k\gamma)+$$
$$+\varsigma_{k,1} J_0(z_k\gamma)+\varsigma_{k,2}\gamma N_1(z_k\gamma)+\varsigma_{k,3} N_0(z_k\gamma)] \exp\left(\frac{-z_k x}{R}\right)\}. \qquad (23)$$

3.1. Розкладення граничних умов у ряди за степенями радіальної змінної γ. Нехай на торці циліндра задані відомі зовнішні нормальні та дотичні зусилля, які задовольняють відповідні для товстостінного циліндра умови (14), де враховано, що $\alpha_1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_2$. Граничні умови на торці циліндра в загальному випадку мають вигляд $\sigma_x(0,\gamma)=\sigma_0+\sum_{j=0}^{N-1} a_j \gamma^{2j}$, $\tau(0,\gamma)=\sum_{j=0}^{N-1} b_j \gamma^{2j+1}$, де $\alpha_1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_2$, N задає точність апроксимації граничних умов і кількість членів ряду (23). Щоб розкласти в ряд за степенями γ функцію Лява (23), потрібно апроксимувати $\ln(\gamma)$ на проміжку $\alpha_1 \leqslant \gamma \leqslant \alpha_2$ поліномом стосовно γ. Задовольнимо ці граничні умови з врахуванням подань (1), (23) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної γ, після нескладних перетворень одержимо систему $2N$ лінійних рівнянь для визначення невідомих g_k, $k=\overline{1,N}$

$$\sum_{k=1}^{N} Re\left\{z_k^2 g_k\left\{B_j^1 z_k^{2j}\left(z_k\varsigma_{k,1}-\delta_j^0-2(j+1)\right)+z_k\varsigma_{k,2}c_{j,k}^0+\left(z_k\varsigma_{k,3}-\delta_j^0\varsigma_{k,2}\right) c_{j,k}^1\right\}\right\}=$$
$$=R^2 b_j, \qquad \sum_{k=1}^{N} Re\{z_k^2 g_k\{2(j+1) B_j^1 z_k^{2j}\left(z_k\varsigma_{k,1}-\alpha\right)+z_k^{2j} B_{j-1}^1+$$
$$+z_k\varsigma_{k,2}c_{j-1,k}^1+\left(z_k\varsigma_{k,3}-\alpha\varsigma_{k,2}\right) c_{j,k}^0\}\}=R^2 a_j, \ j=\overline{0, N-1}, \qquad (24)$$

де

$$c_{j,k}^1=\pi_1 z_k^{2j-1}\left[z_k^2 B_j^1\left(f_k-d_j-j_1\right)+c_2 B_{j-1}^1-z_k^{-2} v_1 \delta_j^1\right], \ \pi_1=\frac{2}{\pi}, \ j_1=(2j+2)^{-1},$$

$$c^0_{j,k} = \pi_1 z_k^{2j-2}\left[z_k^2 B_j^0 (C - d_j) + c_2 B_{j-1}^0\right],\ j = \overline{1, N-1},\ c^0_{0,k} = \pi_1 C,$$
$$4c^1_{0,k} = \pi_1\left[z_k (2C - 1) - 2\pi_1 v z_k^{-1}\right],\ v_1 = -\left(1 - \varepsilon^2\right)^{-2},\ v = -2\left(1 + \varepsilon^2\right) v_1,$$
$$f_k = \ln\left[(1 + \varepsilon) z_k\right] + \frac{c_2}{v_1},\ c_2 = \frac{1}{4\varepsilon}\ln\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},\ B_k^i = \frac{(-1)^k}{2^{2k+i}(k + i)!k!},\ d_j = \sum_{n=1}^{j}\frac{1}{n},$$

$\alpha = 2(2 - \nu)$, $c^1_{-1,k} = 0$, δ^1_j - символ Кронекера, C - постійна Ейлера-Маскароні [8].

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (24) і визначимо невідомі g_k, $k = \overline{1, N}$. Далі за зображеннями (1), (23) знайдемо НДС товстостінного циліндра. Як і для суцільного циліндра скінченої висоти H можна розрахувати НДС товстостінного циліндра висотою H .

---

1. *Ляв А. Е.* Математическая теория упругости. – М., 1935.
2. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М., 1970.
3. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. – М., 1975.
4. *Гринченко В. Т.* Осесимметричная задача теории упругости для толстостенного цилиндра конечной длины // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3. – Вып. 8. – С. 93-102.
5. *Shibahara Masao, Oda Juhachi* Problems on the finite hollow cylinders under the axially symmetrical deformations // Bull. Japan Soc. Mech. – 1968. – Vol. 11. – № 48. – P. 1000-1014.
6. *Васильев Ю. Н.* Приближенное решение осесимметричной задачи теории упругости для пологого конечного цилиндра с нагрузкой по торцам, симметричной относительно срединной плоскости // Вестник МГУ. – Серия мат. и мех. – 1970. – № 1. – С. 90-97.
7. *Прокопов В. К.* Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13. – № 2. – С. 135-144.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. – М., 1974.
9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М., 1956.
10. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Дальнейшее построение теории. – М., 1968. – Т. 2.
11. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. – М., 1983.

SPECTRAL OF AXIALLY SYMMETRIC PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

V. Revenko

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
NAS of Ukraine, 3b Naukova str. 79053 Lviv, Ukraine

A presentation of the stressed-strained state (SSS) for a cylinder, end-loaded arbitrary of axially symmetrically, is obtained in the form of series in own functions. It is shown that spectral values will be complex conjugate numbers and there will be an infinite number of them. The series coefficients are defined from the condition of integrals minimum of deviation quadratic for the solution from the given boundary conditions on the end. Two numerical methods for calculation of the series coefficients are proposed. A solution of the boundary problem for a biharmonic equation is found in cylindrical coordinate system.

Key words: biharmonic equation, eigenvalues, eigenfunctions, problem of moments, entire functions, axially symmetric elasticity theory, stressed-strained state, cylinder.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.2002

Прийнята до друку 14.03.2003