ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.61.С.259–261

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.61.P.259–261

УДК 512.4

ТРИ ЗАДАЧІ ПРО СТАНОВО ЗАМКНЕНІ ГРУПИ АВТОМОРФІЗМІВ ОДНОРІДНОГО КОРЕНЕВОГО ДЕРЕВА

Віталій СУЩАНСЬКИЙ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул.Володимирська, 64 01033 Київ, Україна

Сформульовано три проблеми про такі зображення груп автоморфізмів кореневого дерева, образ яких є станово замкненою групою автоморфізмів.

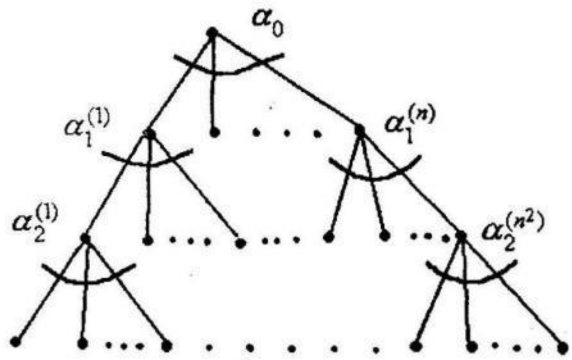
Ключові слова: кореневе дерево, група автоморфізмів, група станово замкнених автоморфізмів.

1. Кореневим називається дерево з виділеною вершиною – його коренем. Множина вершин дерева (T, x_0), що перебувають на заданій відстані k (у природній метриці симпліціального графа) називається сферою радіуса k. Коренева вершина x_0 утворює сферу радіуса 0. Дерево (T, x_0) називається сферично однорідним, якщо степені всіх вершин кожної зі сфер однакові. Це означає, що кожна вершина k сфери ($k \geqslant 0$) дерева (T, x_0) з'єднана з тим самим числом n_k вершин $(k+1)$-і сфери. Кожне нескінченне сферично однорідне кореневе дерево однозначно, з точністю до ізоморфізму, визначається послідовністю чисел $< n_1, n_2, \dots >$, яка називається його сферичним типом [1]. Кореневе дерево T називається однорідним, якщо його сферичний тип має вигляд $< n, n, \dots >$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Число n називається сферичним індексом однорідного дерева. Для кожного натурального n з точністю до ізоморфізму кореневих дерев існує лише одне однорідне кореневе дерево сферичного індексу n, яке позначатимемо T_n. Для довільної вершини y дерева T_n символом $T(y)$ позначимо кореневе піддерево дерева T_n з коренем y. Зрозуміло, що T_n і $T(y)$ ізоморфні як кореневі дерева.

2. Автоморфізмом кореневого дерева називається таке бієктивне перетворення множини його вершин, яке зберігає інцидентність вершин і залишає нерухомим корінь дерева. Кожен автоморфізм кореневого дерева T_n переставляє між собою лише вершини, що належать до однієї сфери, причому з'єднані з однією й тією вершиною сфери меншого радіуса. Тому автоморфізм f однозначно визначається вершино поміченим деревом D_f (Рис.), яке називається [2] портретом автоморфізму f.

Робота виконана при підтримці Міністерства науки і освіти України, грант № Ф7/474–2001

Для довільної вершини u дерева D_f помічене кореневе піддерево $D_f(u)$ з коренем u також є портретом деякого автоморфізму f_u дерева T_n. Цей автоморфізм називається [2] u-им станом автоморфізму f. Отже, кожному автоморфізму f дерева T_n відповідає множина R_f найможливіших станів цього автоморфізму.



Автоморфізм f називається скінченно становим, якщо $|R_f| < \infty$. Як відомо, автоморфізми дерева T_n можна інтерпретувати як автоматні підстановки над n-елементним алфавітом, які задаються автоматами Мілі [3]. При такій інтерпретації скінченно становим автоморфізмам дерева T_n відповідають скінченно автоматні підстановки і навпаки.

3. Нехай $AutT_n$ — група автоморфізмів дерева T_n. Підгрупа $G < AutT_n$ називається становo замкненою [2], якщо разом з кожним автоморфізмом містить всі його стани. Сама $AutT_n$, її підгрупа скінченно станових автоморфізмів, підгрупа автоморфізмів, які нетривіально діють лише на якомусь початку дерева, є прикладами становo замкнених підгруп. Серед інших відомих прикладів — групи Григорчука [3], групи Гупта-Сідкі [4],[5] та багато інших. Широкий клас груп, що занурюються в $AutT_n$, описують таким твердженням.

Теорема. *Нехай G — група зі спадним субнормальним рядом підгруп*

$$G = G_0 > G_1 > G_2 > \dots$$

таким, що $\cap_{i=0}^{\infty} = \{1\}$ і G_i/G_{i+1} ізоморфно занурюється в симетричну групу S_n для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$. Тоді група G ізоморфно занурюється в $AutT_n$.

Доведення теореми випливає з того, що для такої групи G природно конструюється дія на ультраметричному просторі, який збігається з простором кінців однорідного дерева сферичного індекса n (див [6]).

Проте поки що зовсім незрозуміло, які групи можна занурити в $AutT_n$ так, щоб їх образи були групами скінченно станових ізоморфізмів T_n. У багатьох випадках такі занурення невідомі для конкретних груп, хоча питання про їх існування цікаве з багатьох поглядів. Тому ми сформулюємо такі задачі.

1. Чи зображається точно вінцевий добуток кратності m

$$A_m = \underbrace{\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} \wr \dots \wr \mathbb{Z}}_{m}$$

нескінченної циклічної групи $\mathbb{Z}$ на себе як скінченно станова група автоморфізмів дерева T_n при $n \geqslant 2$?

2. Побудувати точні становo замкнені зображення вільної групи F_2 рангу 2 автоморфізмами дерева T_n, $n \geqslant 2$. Зображення F_2 автоморфізмами дерева T_n сконструйовано для всіх $n \geqslant 2$. Ці зображення не є становo замкненими (див., напр., [7]).
3. Побудувати мінімальну за включенням становo замкнену групу автоморфізмів дерева T_n.

Ці задачі, на наш погляд, можуть пояснити саму природу скінченної становості, яка поки що залишається малозрозумілою.

---

1. *Bass H., Otero-Espinar M. V., Rockmore D., Tresser Ch.* Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees // Lect. Notes in Math. - 1996. - Vol. 1621 (Springer, Berlin).
2. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Труды мат. ин-та им. В.Стеклова. - 2000. - Т. 231. - С. 134-214.
3. *Григорчук Р. И.* О проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и прилож. - 1980. - Т. 14. - № 1. - С. 41-43.
4. *Gupta N. D., Sidki S. N.* On the Burnside problem for periodic groups // Math.Z. - 1983. - Vol. 182. - P. 385-388.
5. *Gupta N. D., Sidki S. N.* Some infinite p-groups // Algebra i Logika. - 1983. - Vol. 22. - P. 584-589.
6. *Сущанский В. И.* Представления финитно аппроксимируемых групп изометриями однородных ультраметрических пространств конечной ширины // Доп. АН України. - 1988. - № 4. - С. 19-22.
7. *Brunner A. H., Sidki S. N.* The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by finite state automata // Intern.J. Algebra and Comput. - 1998. - Vol. 8. - № 1. - P. 127-139.

THREE PROBLEMS ON STATED CLOSED AUTOMORPHISM GROUP OF HOMOGENEOUS ROOTED TREE

V. Sushchansky

Kyiv Taras Shevchenko National University,
64 Volodymyrska str. 01033 Kyiv, Ukraine

Here are formulated three problems in this paper on such representations of automorphism groups of the rooted tree that their images are the stated closed automorphism groups.

Key words: rooted tree, automorphism group, stated closed automorphism group.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.2002
Прийнята до друку 14.03.2003