ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.5–12

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.5–12

УДК 517.512.2

УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР'Є МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ СТЕПАНОВА

Максим БОДНАРЧУК, Ярослав ПРИТУЛА
Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено теорему про збіжність сум Фейєра в точці Лебега для майже періодичних функцій Степанова. Розглянуто два критерії абсолютної збіжності рядів Фур'є, умови на спектр і коефіцієнти рядів Фур'є.

Ключові слова: майже періодична функція, сума Фейєра, ряд Фур'є, абсолютна збіжність.

1. Нехай $f(x)$ – комплексно значна майже періодична функція Степанова (S – м.п.) [1]. Їй відповідає ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}, \tag{1}$$

де

$$\hat{f}(\lambda) = M\left\{ f(x) e^{-i\lambda x} \right\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\lambda x}\, dx,$$

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in R \colon |\colon \hat{f}(\lambda) \neq 0 \right\}.$$

Розглянемо функцію ([2], c.39)

$$\sigma(x,\mu) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+2t) \frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2}\, dt. \tag{2}$$

Лема 1. *Якщо f – S-м.п. функція з рядом Фур'є (1), тоді $\sigma(x,\lambda)$ – рівномірна майже періодична функція (р.м.п.) з рядом Фур'є*

$$\sigma(x,\mu) \sim \sum_{|\lambda|<\mu} \hat{f}(\lambda) \left(1 - \frac{|\lambda|}{\mu}\right) e^{i\lambda x}. \tag{3}$$

Доведення. Спочатку доведемо збіжність інтеграла (2). Скористаємось S - обмеженістю функції $f(x)$ ([1], с.260). Нехай

$$\sup_x \int_x^{x+1} |f(t)|\,dt = K < \infty,$$

тоді

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2t)\frac{\sin^2\mu t}{\mu t^2}\,dt\right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{|f(x+2t)|sin^2\mu t}{\mu t^2}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1}\frac{|f(x+2t)|sin^2\mu t}{\mu t^2}\,dt + \sum_{k=-\infty}^{-2}\frac{1}{\mu k^2}\int_k^{k+1}|f(x+2t)|dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu k^2}\int_k^{k+1}|f(x+2t)|\,dt$$

$$\leqslant \mu\int_{-1+\frac{x}{2}}^{1+\frac{x}{2}}|f(2t)|\,dt + \sum_{k=-\infty}^{-2}\frac{1}{\mu k^2}\int_{k+\frac{x}{2}}^{k+1+\frac{x}{2}}|f(2t)|\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu k^2}\int_{k+\frac{x}{2}}^{k+1+\frac{x}{2}}|f(2t)|\,dt$$

$$\leqslant K\left(2\mu + \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right). \tag{4}$$

Доведемо, що $\sigma(x,\mu)$ – р.м.п. функція. Нехай τ – ε – майже період функції $f(x)$, тобто

$$\sup_x \int_x^{x+1}|f(t+\tau) - f(t)|\,dt < \varepsilon.$$

Розглянемо різницю

$$\sigma(x+\tau,\mu) - \sigma(x,\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x+2t+\tau) - f(x+2t)\right]\frac{\sin^2\mu t}{\mu t^2}\,dt.$$

Позначимо $\varphi_\tau(x+2t) = f(x+2t+\tau) - f(x+2t)$, тоді анологічно як у нерівності (4) можемо показати, що

$$|\sigma(x+\tau,\mu) - \sigma(x,\mu)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\tau(x+2t)\frac{\sin^2\mu t}{\mu t^2}\,dt\right| \leqslant \varepsilon\frac{1}{\pi}\left(2\mu + \frac{2}{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right).$$

Звідси випливає, що $\sigma(x,\mu)$ – р.м.п. функція. Обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $\sigma(x,\mu)$. Маємо

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sigma(x,\mu)e^{-i\lambda x}\,dx = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+2t)\frac{\sin^2\mu t}{\mu t^2}dte^{-i\lambda x}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2} \left[\frac{1}{2T} \int\limits_{-T+2t}^{T+2t} f(x) e^{-i\lambda(x-2t)}\, dx \right] dt.$$

Згідно з посиленою теоремою про середнє значення в останньому інтегралі можна перейти до границі $T \to \infty$. Отримаємо

$$M\left\{\sigma(x,\mu)e^{-i\lambda x}\right\} = M\left\{f(x)e^{-i\lambda x}\right\} \times \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda 2t} \frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2}\, dt,$$

а далі, використавши рівність ([2], с. 39),

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda 2t} \frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2}\, dt = \begin{cases} 0, & |\lambda| > \mu \\ 1 - \frac{|\lambda|}{\mu}, & |\lambda| \leqslant \mu \end{cases}$$

одержимо розвинення (3).

2. Розглянемо узагальнення для S-м.п. функцій теореми Лебега про збіжність сум Фейєра ([3], с. 151).

Теорема 1. *Якщо x – точка Лебега S-м.п. функції $f(x)$, тоді*

$$\lim_{\mu \to \infty} \sigma(x, \mu) = f(x).$$

Доведення. За означенням x є точкою Лебега функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \int\limits_0^h [f(x+t) - f(x)]\, dt = 0.$$

Оцінимо різницю

$$|\sigma(x,\mu) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+2t) - f(x)| \frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| < \frac{1}{\mu}} |f(x+2t) - f(x)| \frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2}\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \geqslant \frac{1}{\mu}} |f(x+2t) - f(x)| \frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2}\, dt.$$

Використаємо нерівності

$$\frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2} < \mu$$

і

$$\frac{\sin^2 \mu t}{\mu t^2} \leqslant \frac{1}{\mu t^2}$$

і отримаємо

$$|\sigma(x,\mu) - f(x)| \leqslant \frac{\mu}{\pi} \int\limits_{|t|<\frac{1}{\mu}} |f(x+2t) - f(x)|\, dt + \frac{1}{\pi} \int\limits_{1>|t|\geqslant\frac{1}{\mu}} \frac{|f(x+2t)-f(x)|}{\mu t^2}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant 1} |f(x+2t) - f(x)| \frac{1}{\mu t^2}\, dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оскільки x – точка Лебега, то

$$\lim_{\mu\to\infty} I_1 = 0.$$

Позначимо

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t |f(x+2t) - f(x)|\, dt.$$

Тоді

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{\mu}}^{1} \frac{1}{\mu t^2}\, d\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\mu\varphi\left(\frac{1}{\mu}\right) - \frac{\varphi(1)}{\pi\mu} - \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{\mu}}^{1} \frac{\varphi(t)}{\mu t^3}\, dt. \tag{5}$$

Враховуючи, що $\varphi(t) = o(t)$, з (5) одержуємо, що

$$\lim_{\mu\to\infty} I_2 = 0.$$

З S – обмеженості функції $f(x)$ випливає обмеженість інтеграла

$$\int\limits_{|t|\geqslant 1} \frac{|f(x+2t)-f(x)|}{t^2}\, dt,$$

тому

$$\lim_{\mu\to\infty} I_3 = 0.$$

Теорема доведена.

3. Далі розглянемо теореми, які є узагальненнями на S-м.п. функції відомих теорем про абсолютну збіжність рядів Фур'є з додатними коефіцієнтами ([4], с. 16, [1], с. 71). Використовуватимемо таку лему.

Лема 2. *Якщо для комплексних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ існують дійсні числа a і $\alpha(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2})$, що*

$$|\arg a_j - a| \leqslant \alpha (\operatorname{mod} 2\pi), j = 1, \ldots n,$$

тоді виконується нерівність

$$\cos\alpha \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leqslant |\sum_{j=1}^{n} a_j|.$$

Доведення леми легко провести, використовуючи геометричну інтерпретацію комплексних чисел ([5], [6]). Для S-м.п. функції $f(x)$ з рядом Фур'є (1) позначимо $\theta(\lambda) = \arg \hat{f}(\lambda)$. Надалі розглядатимемо тільки такі S - м.п. функції, в яких спектр $\Lambda = \{\lambda | \hat{f}(\lambda) \neq 0\}$ має єдину точку згущення на нескінченності.

Теорема 2. *Нехай $f(x)$ – S-м.п. функція, спектр якої має єдину точку згущення на нескінченності, для якої існує точка Лебега x_0 і δ $(0 \leqslant \delta < \frac{\pi}{2})$, що для довільної множини $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \subset \Lambda$ існує $a \in R$ і правильні нерівності*

$$|\lambda_k x_0 + \theta(\lambda_k) + a| \leqslant \delta (\operatorname{mod} 2\pi), k = 1...n. \tag{6}$$

Тоді

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \left|\hat{f}(\lambda)\right| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{\cos \delta}. \tag{7}$$

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і довільну множину $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$. На підставі теореми 1 виберемо таке λ_0, що $\lambda_0 \geqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k|$ і для довільних $\mu > \lambda_0$

$$|\sigma(x_0, \mu) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

де x_0-точка Лебега функції $f(x)$. Тоді для довільних $\mu > \lambda_0$

$$|\sigma(x_0, \mu)| = \left| \sum_{|\lambda| < \mu} \left|\hat{f}(\lambda)\right| \left(1 - \frac{|\lambda|}{\mu}\right) e^{i(\lambda x_0 + \theta(\lambda))} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_0)| + \varepsilon. \tag{8}$$

Враховуючи умову (6) з леми 2, отримаємо

$$\left| \sum_{|\lambda| < \mu} \left|\hat{f}(\lambda)\right| \left(1 - \frac{|\lambda|}{\mu}\right) e^{i(\lambda x_0 + \theta(\lambda))} \right| \geqslant \cos \delta \sum_{|\lambda| < \mu} \left|\hat{f}(\lambda)\right| \left(1 - \frac{|\lambda|}{\mu}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \cos \delta \sum_{k=1}^{m} \left|\hat{f}(\lambda_k)\right| \left(1 - \frac{|\lambda_k|}{\mu}\right). \tag{9}$$

З нерівностей (8), (9) випливає

$$\sum_{k=1}^{m} \left|\hat{f}(\lambda_k)\right| \leqslant \frac{|f(x_0)| + \varepsilon}{\cos \delta \left(1 - \frac{|\lambda_0|}{\mu}\right)}.$$

Оскільки ε і μ довільні, то одержуємо

$$\sum_{k=1}^{m} \left|\hat{f}(\lambda_k)\right| \leqslant \frac{|f(x_0)|}{\cos \delta},$$

а звідси маємо нерівність (7).

Умови абсолютної збіжності рядів Фур'є для обмежених S-м.п. функцій розглядали в [7].

Для $a \in R$ введемо такі позначення:

$$f_a(x) = f(x + a), a^+ = \max\{a, 0\}, a^- = \max\{-a, 0\}.$$

Теорема 3. *Нехай $f(x)$ – S-м.п. функція, спектр якої має єдину точку згущення на нескінченності і для якої існує точка Лебега a, що*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\operatorname{Re}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{-}<\infty \quad , \quad \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\operatorname{Im}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{-}<\infty. \tag{10}$$

Тоді

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\hat{f}(\lambda)\right|<\infty. \tag{11}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $a=0$. З теореми 1 маємо

$$\lim_{\mu\to\infty}\sigma(0,\mu)=\lim_{\mu\to\infty}\sum_{|\lambda|<\mu}\hat{f}(\lambda)\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)=f(0). \tag{12}$$

Очевидно, що

$$\sigma(0,\mu)=\sum_{|\lambda|<\mu}\hat{f}(\lambda)\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)=$$

$$\sum_{|\lambda|<\mu}\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)\left(\operatorname{Re}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{+}+i\sum_{|\lambda|<\mu}\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)\left(\operatorname{Im}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{+}+$$
$$+\sum_{|\lambda|<\mu}\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)\left(\operatorname{Re}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{-}+i\sum_{|\lambda|<\mu}\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)\left(\operatorname{Im}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{-}.$$

З умов (10), (12) випливає, що

$$\lim_{\mu\to\infty}\sum_{|\lambda|<\mu}\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)\left(\operatorname{Re}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{+}<\infty,$$
$$\lim_{\mu\to\infty}\sum_{|\lambda|<\mu}\left(1-\frac{|\lambda|}{\mu}\right)\left(\operatorname{Im}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{+}<\infty.$$

Тому збігаються ряди

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\operatorname{Re}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{+}<\infty \qquad \text{і} \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\operatorname{Im}\hat{f}_a(\lambda)\right)^{+}<\infty.$$

Враховуючи умови (10), отримуємо збіжність ряду $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\left|\hat{f}(\lambda)\right|$. Нехай $a\neq 0$. Тоді $x=0$ є точкою Лебега для $f_a(x)=f(x+a)$. З доведеного маємо

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\hat{f}_a(\lambda)\right|<\infty.$$

Оскільки $\hat{f}_a(\lambda)=e^{ia\lambda}\hat{f}(\lambda)$, тоді

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\hat{f}(\lambda)\right|<\infty.$$

Теорема доведена повністю.

Вважатимемо, що функція $f(x)$ в околі $U(a)$ точки a майже всюди обмежена, якщо існує K, що для майже всіх $x\in U(a)$ $|f(x)|\leqslant K$.

Теорема 4. *Нехай $f(x)$ – S-м.п. функція, спектр якої має єдину точку згущення на нескінченності і для якої існує точка a, в околі якої $f(x)$ майже всюди обмежена, а також збігаються ряди*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\operatorname{Re}\hat{f}_a(\lambda)\Big)^-, \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\operatorname{Im}\hat{f}_a(\lambda)\Big)^-.$$

Тоді

$$\sum_{\lambda\in\lambda}\left|\hat{f}(\lambda)\right| < \infty.$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $a = 0$. З (2) маємо

$$\sigma(0,\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{-h}^{h} f(2t)\frac{\sin^2\mu t}{\mu t^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-h} + \int_{h}^{\infty}\right) f(2t)\frac{\sin^2\mu t}{\mu t^2}\,dt.$$

Оскільки $f(x)$ майже всюди обмежена в околі $a = 0$, то перший інтеграл обмежений деяким числом K. Інші два інтеграли прямують до нуля при $\mu \to \infty$. Це випливає з S-обмеженості функції $f(x)$. Враховуючи обмеженість $\sigma(0,\mu)$, доведення можна закінчити за схемою доведення теореми 3.

Для випадку 2π-періодичної функції теореми 3 і 4 доведено в [8], [9].

---

1. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М., 1953.
2. *Besicovitch A. S.* Almost Periodic Functions. – Cambridge University, 1932.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М., 1965. Т.1.
4. *Кахан Ж. П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. – М., 1976.
5. *Притула Я. Г.* Про абсолютну збіжність рядів Фур'є майже періодичних функцій Бора // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – N 4. – С. 319-322.
6. *Vasic P.M., Janić R. R., Keckic J. D.* A complementary triangle inequality. Publ. elektr. fak. univer. Beograd. – 1971. – N 338-352. – P. 77-81.
7. *Притула Я. Г.* Некоторые вопросы абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций одной и двух переменных: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1970.
8. *Artemiadis N.* Criteria for absolute convergence of Fourier series // Proc. of the Amer. Math. Soc. – 1975. – Vol. 50.
9. *Artemiadis N.* Criteria for absolute convergence of Fourier series // Proc. Conf. Harmonic analisis. Iraklion. 1978. Lecture Notes in Math, 781. Springer. – 1980. – P. 1-7.

CONDITIONS OF ABSOLUTE CONVERGENCE OF FOURIER SERIES OF STAPANOFF'S ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

Maksim Bodnarchuk, Yaroslav Pritula

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We prove the theorem about convergence of Fejer sums in Lebegue point for Stepanoff's almost periodic functions. We take to consideration two criteria of absolute convergence of Fourier series. In this work we use conditions for spectrum and arguments of Fourier series.

Key words: almost periodic function, Fejer sum, Fourier series, absolute convergence.

Стаття надійшла до редколегії 04.01.2002

Прийнята до друку 02.10.2003