ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.13–26

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.13–26

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Наталія ГУЗІЛЬ
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено мішану задачу для гіперболічної системи

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(t,u) = f(x,t)$$

в необмеженій за просторовими змінними області з крайовими умовами типу Діріхле. Одержано умови коректності задачі незалежно від поведінки даних і розв'язку при $|x| \to +\infty$.

Ключові слова: напівлінійна гіперболічна система першого порядку.

Теорія задачі Коші для лінійних гіперболічних систем першого порядку досить добре розроблена. Дослідженню цієї задачі присвячено сотні праць. Одержано різноманітні умови коректності задачі у різних функціональних просторах, вивчено поведінку особливостей розв'язків, поведінку розв'язків при великих значеннях часової змінної. Значно менше результатів для мішаних задач у випадку необмежених областей за просторовими змінними. Зокрема, у працях [1–12] досліджено певні мішані задачі для лінійних гіперболічних систем у необмежених областях спеціального вигляду. Дослідженню мішаних задач для напівлінійних гіперболічних систем першого порядку з багатьма незалежними змінними присвячено праці [13–17]. Зазначимо також класичні результати щодо коректності мішаних задач для гіперболічних систем, одержані в працях [18–20]. У праці [21] до дослідження мішаної задачі для деякої двовимірної напівлінійної гіперболічної системи першого порядку в необмеженій за просторовою змінною області застосовано метод Гальоркіна.

У цій праці досліджено мішану задачу для багатовимірної напівлінійної t-гіперболічної системи першого порядку в області з некомпактною межею. За допомогою методу Гальоркіна одержано деякі достатні умови існування та єдиності розв'язку майже всюди задачі з крайовими умовами типу Діріхле. Зазначимо, що така система досліджена в [22]. На відміну від цієї монографії в праці не припускаємо жодних умов щодо поведінки даних задачі та ров'язку при $|x| \to +\infty$.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbf{R}^l$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Розглянемо в Q_T систему рівнянь

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(t,u) = f(x,t), \tag{1}$$

де $u = \mathrm{col}(u_1,\dots,u_m), g = \mathrm{col}(g_1,\dots,g_m), f = \mathrm{col}(f_1,\dots,f_m)$, A_i, C – матриці порядку m для всіх $i = 1,\dots,l$.

Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, S_τ^1 множину точок поверхні $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, для яких

$$\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)\cos(n,x_i)\xi,\xi) < 0$$

для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$, а через S_τ^2 множину тих точок поверхні S_τ, для яких

$$\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)\cos(n,x_i)\xi,\xi) \geqslant 0$$

для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$, де n – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, а $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbf{R}^m$.

Задамо для системи (1) крайові

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S_T^1 \tag{2}$$

та початкові

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{3}$$

умови.

Припускатимемо, що виконуються відповідно умови:

(A) : елементи матриць A_i, A_{ix_j} належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для всіх $i,j = 1,\dots,l$; $A_i(x,t) = A_i'(x,t), i = 1,\dots,l$, для майже всіх $(x,t) \in Q_T$;

(C) : елементи матриць C, C_{x_i} належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для всіх $i = 1,\dots,l$;

(G) : функції $t \to g(t,\xi)$ вимірні на $(0,T)$ для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$; функції $\xi \to g(t,\xi)$ неперервні в $\mathbf{R}^m$ майже для всіх $t \in (0,T)$; існують такі додатні сталі g_0, g_1, що $\forall \xi,\eta \in \mathbf{R}^m$ і майже для всіх $t \in (0,T)$ виконуються нерівності

$$|g_i(t,\xi)| \leqslant g_1 \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^{p-1}, \quad i = 1,\dots,m, \quad p > 2,$$

$$(g(t,\xi) - g(t,\eta), \xi - \eta) \geqslant g_0|\xi - \eta|^p;$$

(G_1) : $(G(t,\eta)\xi,\xi) \geqslant 0$ для майже всіх $t \in (0,T)$ і будь-яких $\eta,\xi \subset \mathbf{R}^m$, де

$$G(t,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(t,\eta)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial g_1(t,\eta)}{\partial \eta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(t,\eta)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial g_m(t,\eta)}{\partial \eta_m} \end{pmatrix};$$

$(S): \quad S_T^1 = \Gamma_1 \times (0,T), \quad S_T^2 = \Gamma_2 \times (0,T), \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega.$

Зауваження 1. Прикладом функції g, яка задовольняє умову (G), може бути функція вигляду $g = (|u|^{p-2}u_1, \dots, |u|^{p-2}u_m)$.

Позначимо через $V_1(\Omega)$ і $V_1(Q_T)$ відповідно простори

$$V_1(\Omega) = \{v \,:\, v \in H^1(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = 0\},$$

$$V_1(Q_T) = \{v \,:\, v \in H^1(Q_T),\ v|_{S_T^1} = 0\}.$$

Приймемо, що

$$a_0 = \max_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \| A_{ix_j}(x,t) \|, \quad c_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^{l} \| C_{x_i}(x,t) \|^2,$$

де через $\| \cdot \|$ позначено евклідову норму матриці. Зазначимо, що з умови (C) випливає існування такої сталої c_0, що $(C(x,t)\xi,\xi) \geqslant c_0|\xi|^2$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$ і для будь-яких $\xi \in \mathbf{R}^m$.

Означення 1. Функцію u, яка задовольняє включення

$$u \in (L^2((0,T);V_1(\Omega)))^m, \quad u_t \in (L^{p'}(Q_T))^m, \quad p' = p/(p-1),$$

систему (1) для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, крайові та початкові умови (2), (3), називатимемо сильним розв'язком (розв'язком майже всюди) задачі (1)–(3) в обмеженій області Q_T.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (C), (G), (G₁), (S),* $u_0 \in (V_1(\Omega))^m$, $f \in (L^2([0,T];V_1(\Omega)))^m$, $\quad 2 < p \leqslant \frac{2l}{l-2}$, *якщо* $l > 2$. *Тоді існує єдиний сильний розв'язок задачі (1) – (3) в обмеженій області* Q_T.

Доведення. Побудуємо послідовність функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x), \quad N \in \mathbf{N},$$

де $\{\varphi_k(x)\}$ – система власних функцій задачі

$$\Delta u = \lambda u,$$

$$u\,|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma_2} = 0,$$

яка відповідає послідовності власних значень $\{\lambda_k\}$, а $c_1^N, \dots, c_N^N$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\int_\Omega \Big[(u_t^N, \varphi_k) + \sum_{j=1}^{l} (A_j(x,t)u_{x_j}^N, \varphi_k) + (C(x,t)u^N, \varphi_k) + (g(t,u^N), \varphi_k) -$$

$$-(f(x,t),\varphi_k)\Big]dx = 0, \tag{4}$$

$$c_k^N(0) = u_{0k}^N, \quad k = 1,\dots,N, \tag{5}$$

причому

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0k}^N \varphi_k(x), \quad \lim_{N\to\infty} ||u_0^N - u_0||_{(V_1(\Omega))^m} = 0.$$

Тут $\Delta u = (\Delta u_1,\dots,\Delta u_m)$. Зазначимо, що при виконанні умови $2 < p \leqslant \frac{2l}{l-2}$ система функцій $\{\varphi_k(x)\}$ є базою простору $(V_1(\Omega)\cap L^p(\Omega))^m$.

На підставі теореми Каратеодорі [23] задача (4), (5) має абсолютно неперервний розв'язок, визначений на відрізку $[0,h]$, $h > 0$. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $h = T$. Тому вважатимемо, що розв'язок задачі (4), (5) визначений на $[0,T]$.

Помножимо кожне рівняння системи (4) відповідно на функцію $c_k^N(t)$, додамо їх за k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau\in(0,T]$.

Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[(u_t^N,u^N) + \sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u_{x_j}^N,u^N) + (C(x,t)u^N,u^N) + (g(t,u^N),u^N) -$$

$$-(f(x,t),u^N)\Big]dxdt = 0. \tag{6}$$

Перетворимо й оцінимо кожний доданок рівності (6) окремо, враховуючи відповідні умови теореми

$$I_1 \equiv \int\limits_{Q_\tau}(u_t^N,u^N)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N|^2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_0^N|^2dx;$$

$$I_2 \equiv \int\limits_{Q_\tau}\sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u_{x_j}^N,u^N)dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}[(A_i(x,t)u^N,u^N)]_{x_i}dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}(A_{ix_i}(x,t)u^N,u^N)dxdt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)u^N,u^N)\cos(n,x_i)dS -$$

$$-\frac{1}{2}a_1\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2dxdt \geqslant -\frac{a_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2dxdt;$$

$$I_3 \equiv \int\limits_{Q_\tau}(C(x,t)u^N,u^N)dxdt \geqslant c_0\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2dxdt;$$

$$I_4 \equiv \int\limits_{Q_\tau} (g(t,u^N),u^N)dxdt \geqslant g_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^p dxdt;$$

$$I_5 \equiv -\int\limits_{Q_\tau} (f(x,t),u^N)dxdt \geqslant -\frac{\delta}{p}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^p dxdt - \frac{\mu_0(\delta)}{p'}\int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^{p'} dxdt, \quad \delta > 0,$$

a_1 залежить від A_i, $i = 1,\ldots,l$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1,\ldots,I_5$, з рівності (6) одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2 dx + 2\left(g_0 - \frac{\delta}{p}\right)\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^p dxdt \leqslant (a_1 - 2c_0)\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dxdt +$$

$$+\frac{2\mu_0(\delta)}{p'}\int\limits_{Q_\tau} |f(x,t)|^{p'} dxdt, \quad \tau \in [0,T]. \tag{7}$$

Нехай $\delta = (g_0 p)/2$. Тоді, використовуючи лему Гронуола-Белмона, з (7) отримуємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2 dx \leqslant \mu_1, \quad \tau \in [0,T], \tag{8}$$

$$\int\limits_{Q_T} |u^N|^2 dxdt \leqslant \mu_2, \tag{9}$$

$$\int\limits_{Q_T} |u^N|^p dxdt \leqslant \mu_2, \tag{10}$$

де сталі μ_1, μ_2 не залежать від N.

Помножимо кожне з рівнянь (4) відповідно на функцію $-\lambda_k c_k^N(t)$, замінимо $\lambda_k \varphi_k$ на $\Delta\varphi_k$, підсумуємо за k від 1 до N, проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$.

Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$-\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(u_t^N,\Delta u^N) + \sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u_{x_j}^N,\Delta u^N) + (C(x,t)u^N,\Delta u^N) +$$

$$+(g(t,u^N),\Delta u^N) - (f(x,t),\Delta u^N)\Bigg]dxdt = 0. \tag{11}$$

Перетворимо й оцінимо кожний доданок (11) окремо, врахувавши умови теореми. Одержимо

$$I_6 \equiv -\int\limits_{Q_\tau} (u_t^N,\Delta u^N)dxdt = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\int\limits_{\Omega_\tau} |u_{x_j}^N|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{j=1}^{l} |u_{0x_j}^N|^2 dx;$$

$$I_7 \equiv -\sum_{i,j=1}^{l}\int\limits_{Q_\tau}(A_i(x,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_jx_j})dxdt = -\sum_{i,j=1}^{l}\int\limits_{S_\tau}(A_i(x,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_j})\cos(n,x_j)dS+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{l}\int\limits_{Q_\tau}(A_{ix_j}(x,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_j})dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}[(A_i(x,t)u^N_{x_j}, u^N_{x_j})]_{x_i}dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}(A_{ix_i}(x,t)u^N_{x_j}, u^N_{x_j})dxdt = I_7^1 + I_7^2 + I_7^3 + I_7^4;$$

$$I_7^2 \equiv \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{l}(A_{ix_j}(x,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_j})dxdt \geqslant -a_0 l\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{x_i}|^2dxdt;$$

$$I_7^4 \geqslant -\frac{1}{2}la_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{x_i}|^2dxdt.$$

Оскільки Γ_1 – кусково-гладка, то рівняння певної гладкої частини цієї поверхні можна записати у вигляді

$$\Psi(x) \equiv \psi(x_1,\dots,x_{s-1},x_{s+1},\dots,x_l) - x_s = 0.$$

Тоді $\cos(n,x_i) = \omega(x)\Psi_{x_i}$, $i = 1,\dots,l$, де $\omega(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{l}[\Psi_{x_i}(x)]^2\right)^{-1/2}$. Звідси $\cos(n,x_j) = \frac{\Psi_{x_j}}{\Psi_{x_i}}\cos(n,x_i)$, $i,j = 1,\dots,l$.

Оскільки

$$u(x_1,\dots,x_{s-1},\psi(x_1,\dots,x_{s-1},x_{s+1},\dots,x_l),x_{s+1},\dots,x_l,t) \equiv 0,$$

то $u_{x_i} = u_{x_s}\Psi_{x_i}$, $i = 1,\dots,l$. Тому $u_{x_j}\cos(n,x_i) = u_{x_i}\cos(n,x_j)$.

Розглянемо тепер $I_7^1 + I_7^3$. Матимемо

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^1}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}[2(A_i(x,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_j})\cos(n,x_j) - (A_i(x,t)u^N_{x_j}, u^N_{x_j})\cos(n,x_i)]dS =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^1}\sum_{i=1}^{l}\left[(A_i(x,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_i})\cos(n,x_i) + \sum_{j=1,i\neq j}^{l}(A_i(x,t)u^N_{x_j}, u^N_{x_j})\cos(n,x_i)\right]dS =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^1}\sum_{j=1}^{l}\left[\sum_{i=1}^{l}(A_i\cos(n,x_i)u^N_{x_j}, u^N_{x_j})\right]dS \geqslant 0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial u^N}{\partial n} = \sum_{j=1}^{l} u^N_{x_j} \cos(n, x_j) = 0 \text{ на } \quad S^2_T,$$

то

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{S^2_\tau} \sum_{i=1}^{l}\left[\sum_{j=1}^{l}(2(A_i(x,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_j})\cos(n,x_j) - (A_i(x,t)u^N_{x_j}, u^N_{x_j})\cos(n,x_i))\right] dS =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{S^2_\tau}\left[\sum_{i=1}^{l} 2\left(A_i(x,t)u^N_{x_i}, \sum_{j=1}^{l} u^N_{x_j}\cos(n,x_j)\right) - \left(A_i(x,t)\sum_{j=1}^{l} u^N_{x_j}\cos(n,x_j), u^N_{x_j}\right)\right] dS = 0.$$

Отже, $I^1_7 + I^3_7 \geqslant 0$. Далі матимемо

$$I_8 \equiv -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}(C(x,t)u^N, u^N_{x_i x_i})dxdt \geqslant -\frac{1}{2}c_1\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^2 dxdt - \left(\frac{1}{2} - c_0\right)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{x_i}|^2 dxdt;$$

$$I_9 \equiv -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}(g(t,u^N), u^N_{x_i x_i})dxdt = -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} g_j(t,u^N)u^N_{j,x_i x_i}dxdt =$$

$$= -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}(g_j(t,u^N), u^N_{j,x_i})_{x_i}dxdt + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_j}{\partial u^N_s}u^N_{s,x_i}u^N_{j,x_i}dxdt = I^1_9 + I^2_9;$$

$$I^1_9 \equiv -\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} g_j(t,u^N)u^N_{j,x_i}\cos(n,x_i)dxdt = 0,$$

оскільки на S^1_τ в нуль обертається $g(t,u^N)$, а на S^2_τ похідна $\frac{\partial u^N}{\partial n}$;

$$I^2_9 \equiv \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_j}{\partial u^N_s}u^N_{s,x_i}u^N_{j,x_i}dxdt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}(G(t,u^N)u^N_{x_i}, u^N_{x_i})dxdt \geqslant 0;$$

$$I_{10} \equiv \int\limits_{Q_\tau}(f(x,t), \Delta u^N)dxdt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{j=1}^{l}(f(x,t), u^N_{x_j})_{x_j}dxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{j=1}^{l}(f_{x_j}(x,t), u^N_{x_j})dxdt \geqslant \int\limits_{S_\tau}\sum_{j=1}^{l}(f(x,t), u^N_{x_j})\cos(n,x_j)dS -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{j=1}^{l}|f_{x_j}(x,t)|^2 dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{j=1}^{l}|u^N_{x_j}|^2 dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_6, \ldots, I_{10}$, з рівності (11) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{j=1}^{l} |u_{x_j}^N|^2 dx \leqslant (2 - 2c_0 + 3a_0 l) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u_{x_i}^N|^2 dxdt+$$

$$+c_1 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} |f_{x_i}(x,t)|^2 dxdt. \tag{12}$$

Використовуючи (9) і лему Гронуола-Белмана, з (12) отримуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{j=1}^{l} |u_{x_j}^N|^2 dx \leqslant \mu_3, \quad \tau \in [0,T], \tag{13}$$

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{j=1}^{l} |u_{x_j}^N|^2 dxdt \leqslant \mu_4, \tag{14}$$

де сталі μ_3, μ_4 не залежать від N.

На підставі оцінок (8)-(10), (13), (14) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$ така, що

$u^{N_k} \to u$ $\quad *-$слабко в $(L^\infty((0,T); V_1(\Omega)))^m$,
$u^{N_k} \to u$ $\quad$ слабко в $(L^p(Q_T))^m$,
$u^{N_k}(\cdot, T) \to \xi$ $\quad$ слабко в $(L^2(\Omega))^m$ при $k \to \infty$.

Крім того, згідно з умовою (G) і (10)

$$\int\limits_{Q_T} |g(t,u^N)|^{p'} dxdt \leqslant \mu_5, \tag{15}$$

причому μ_5 не залежить від N.

Нехай P_N – оператор ортогонального проектування простору $(L^2(\Omega))^m$ на скінченновимірний простір, натягнутий на вектор-функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$. Тоді $P_N \in L((L^2(\Omega))^m, (L^2(\Omega))^m)$, $P_N \in L((V_1(\Omega))^m, (V_1(\Omega))^m)$, $P_N \in L(((V_1(\Omega))^m)', ((V_1(\Omega))^m)')$ і норма оператора P_N у цих просторах обмежена одиницею. Тоді з (4) випливає рівність

$$u_t^N + P_N\left(\sum_{i=1}^{l} A_i(x,t) u_{x_i}^N\right) + P_N(C(x,t)u^N) + P_N(g(t,u^N)) = P_N(f(x,t)).$$

Звідси, враховуючи (9), (14), (15) і умови теореми, одержуємо, що послідовність $\{u_t^N\}$ є обмеженою в просторі $(L^{p'}((0,T); (V_1(\Omega))'))^m$. Тоді на підставі теореми 5.1 [22, с. 70] існує підпослідовність послідовності $\{u^N\}$ (нехай це є $\{u^{N_k}\}$), збіжна в просторі $(L^2(\Omega))^m$ до функції u. Згідно з лемою 2.2 [24] $g(\cdot, u^{N_k}) \to g(\cdot, u)$ слабко в $(L^{p'}(Q_T))^m$ при $k \to \infty$.

Помножимо рівняння (4) (записані для N_k) відповідно на функції $z_k^{N_{k_0}} \in C^1([0,T])$, додамо їх за k від 1 до N_{k_0}, проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t^{N_k} + \sum_{j=1}^{l} A_j(x,t)u_{x_j}^{N_k} + C(x,t)u^{N_k} + g(t,u^{N_k}) - f(x,t), v^{N_{k_0}} \Big) dxdt = 0, \qquad (16)$$

де $v^{N_{k_0}}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N_{k_0}} z_k^{N_{k_0}}(t)\varphi_k(x)$.

Зазначимо, що множина функцій $\{v^{N_{k_0}}\}$ є щільною в $(V_1(Q_T)\bigcap L^p(Q_T))^m$. Тому перейшовши до границі в (16) спочатку при $k \to \infty$, а потім при $k_0 \to \infty$, одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[-(u, v_t) + \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)u_{x_i}, v) + (C(x,t)u, v) + (g(t,u), v) - (f(x,t), v) \Big] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_T} (\xi, v)dx - \int\limits_{\Omega_0} (u_0, v)dx = 0, \qquad (17)$$

правильну для довільної $v \in (V_1(Q_T)\bigcap L^p(Q_T))^m$.

З (17) одержуємо, що в Q_T

$$u_t = -\sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} - C(x,t)u - g(t,u) + f(x,t),$$

тобто $u_t \in (L^{p'}(Q_T))^m$ і $u \in (C([0,T]; L^2(\Omega)))^m$. Тому з (17) випливає, що $u(\cdot,T) = \xi$ і, крім того, на S_T^1 виконується рівність $u(x,t) = 0$.

Очевидно, що для функції u правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega} (u(x,\tau) - u_0(x), w(x))dx = \int\limits_0^\tau \int\limits_{\Omega_t} \Big(f(x,t) - \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} - C(x,t)u - g(t,u), w(x) \Big) dxdt -$$

$$- \int\limits_{S_\tau^2} \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t)\cos(n, x_i)u, w(x))dS, \qquad w \in (L^p(\Omega))^m.$$

Звідси

$$\lim_{\tau \to 0} \int\limits_{\Omega} (u(x,\tau) - u_0(x), w(x))dx = 0,$$

тобто функція u задовольняє початкову умову (3). Отже, функція u є сильним розв'язком задачі (1)–(3).

Доведемо єдиність розв'язку. Припустимо, що існують два розв'язки u^1 і u^2 задачі (1)–(3). Тоді функція $u = u^1 - u^2$ задовольнятиме систему

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(t,u^1) - g(t,u^2) = 0 \tag{18}$$

і початкову умову $u(x,0) = 0$.

Помножимо (18) на $ue^{-\gamma t}$ і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$, де додатну сталу γ виберемо пізніше. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[(u_t,u) + \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)u_{x_i},u) + (C(x,t)u,u) +$$

$$+(g(t,u^1) - g(t,u^2),u)\Big] e^{-\gamma t}dxdt = 0. \tag{19}$$

Перетворимо й оцінимо кожен доданок рівності (19), враховуючи умови (A), (C), (G) теореми. Матимемо

$$I_{11} \equiv \int\limits_{Q_\tau} (u_t,u)e^{-\gamma t}dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u|^2 e^{-\gamma\tau}dx + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u|^2 e^{-\gamma t}dxdt;$$

$$I_{12} \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)u_{x_i},u)e^{-\gamma t}dxdt \geqslant -\frac{1}{2}a_0 \int\limits_{Q_\tau} |u|^2 e^{-\gamma t}dxdt;$$

$$I_{13} \equiv \int\limits_{Q_\tau} (C(x,t)u,u)e^{-\gamma t}dxdt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u|^2 e^{-\gamma t}dxdt;$$

$$I_{14} = \int\limits_{Q_\tau} (g(t,u^1) - g(t,u^2),u)e^{-\gamma t}dxdt \geqslant g_0 \int\limits_{Q_\tau} |u|^p e^{-\gamma t} \geqslant 0.$$

Тоді

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u|^2 e^{-\gamma\tau}dx + \frac{\gamma}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u|^2 e^{-\gamma t}dxdt - \frac{1}{2}a_0\int\limits_{Q_\tau} |u|^2 e^{-\gamma t}dxdt + c_0\int\limits_{Q_\tau} |u|^2 e^{-\gamma t}dxdt \leqslant 0,$$

$\tau \in [0,T]$. З цієї нерівності при $\gamma - a_0 + 2c_0 \geqslant 0$ випливає, що $u(x,t) = 0$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

Нехай тепер Ω – необмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$ розглянемо систему (1) з умовами (2), (3).

Припускатимемо виконання такої умови:

(A_0) : існує $\{\Omega^i\}$ – послідовність обмежених областей таких, що межі $\partial\Omega^i$ –

кусково-гладкі, $\Omega^i \subset \Omega^{i+1}$ для $\forall i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Omega^i = \Omega$, на кожній $\Gamma_2^i = \partial\Omega^i \backslash (\overline{\Omega}^i \cap \partial\Omega)$ виконується умова $\sum\limits_{j=1}^{l} (A_j(x,t)\cos(n,x_j)\xi,\xi) \geqslant 0$ для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$ і майже для всіх $t \in (0,T)$.

Позначимо $Q_\tau^i = \Omega^i \times (0,\tau)$, $S_{i,\tau}^1 = \Gamma_1^i \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $i \in \mathbf{N}$, де Γ_1^i та частина межі області Ω^i на якій

$$\sum_{j=1}^{l} (A_j(x,t)\cos(n,x_j)\xi,\xi) < 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$ і всіх $\xi \in \mathbf{R}^m \backslash \{0\}$.

Позначимо

$$V_{1,loc}(\bar{\Omega}) = \{v : v \in V_1(\Omega^i) \quad \forall i \in \mathbf{N}\},$$

$$L_{loc}^r(\bar{\Omega}) = \{v : v \in L^r(\Omega^i) \quad \forall i \in \mathbf{N}\}, r \in (1,+\infty].$$

Припускатимемо, що виконуються відповідно умови:

(A_1) : елементи матриць A_i, A_{ix_j} належать до простору $L^\infty((0,T); L_{loc}^\infty(\bar{\Omega}))$ для всіх $i,j = 1,\ldots,l$; $A_i(x,t) = A_i^*(x,t)$ для всіх $i = 1,\ldots,l$ і майже всіх $(x,t) \in Q_T$;

(C_1) : елементи матриць C, C_{x_i} належать до простору $L^\infty((0,T); L_{loc}^\infty(\bar{\Omega}))$ для всіх $i = 1,\ldots,l$.

Означення 2. Функцію u, яка задовольняє включення

$$u \in (L^2((0,T); V_{1,loc}(\overline{\Omega})))^m, \quad u_t \in (L^{p'}((0,T); L^{p'}(\overline{\Omega})))^m,$$

систему (1) для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, крайові та початкові умови (2), (3), називатимемо сильним розв'язком (розв'язком майже всюди) задачі (1) – (3) в необмеженій області Q_T.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(A_0), (A_1), (C_1)$, $(G), (G_1), (S)$, $u_0 \in (V_{1,loc}(\bar{\Omega}))^m$, $f \in (L^2((0,T); V_{1,loc}(\bar{\Omega})))^m$, $2 < p \leqslant \frac{2l}{l-2}$, *якщо* $l > 2$. *Тоді існує єдиний сильний розв'язок задачі (1)-(3) в необмеженій області* Q_T.

Доведення. В області Q_T^i розглянемо систему (1) з крайовими

$$u(x,t) = 0 \text{ на } S_{i,T}^1 \tag{20}$$

і початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega^i. \tag{21}$$

На підставі теореми 1 існує сильний розв'язок u^i задачі (1), (20), (21) для всіх $i \in \mathbf{N}$. Легко бачити, що $u^k(x,t) = u^i(x,t)$ в Q_T^i при $k > i$. Тоді, функція u така, що $u(x,t) = u^i(x,t)$ при $(x,t) \in Q_T^i$ для $\forall i \in \mathbf{N}$ є розв'язком майже всюди задачі (1)-(3) в області Q_T.

Доведемо єдиність розв'язку цієї задачі. Припустимо, що задача (1) – (3) має в області Q_T два сильних розв'язки u^1 і u^2. Тоді $u = u^1 - u^2$ задовольняє систему (18), нульові початкові умови й умову (2). Нехай i – довільне фіксоване натуральне число. З умови (C_1) випливає існування такої сталої c_0^i, що для майже всіх (x,t) з області Q_T^i і для будь-яких $\xi \in \mathbf{R}^m$ правильна нерівність $(C(x,t)\xi,\xi) \geqslant c_0^i|\xi|^2$. Функція u в області Q_T^i задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T^i}\Bigg[(u_t,u)+\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)u_{x_i},u)+(C(x,t)u,u)+$$

$$+(g(t,u^1)-g(t,u^2),u)\Bigg]e^{-\gamma t}dxdt=0.$$

Враховуючи умови (A_0), (A_1), (C_1), (G), (S), початкові та крайові умови з цієї рівності цілком аналогічно як при доведенні єдиності в теоремі 1 одержуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T^i}|u|^2e^{-\gamma T}dx+\frac{1}{2}(\gamma-a_0+c_0^i)\int\limits_{Q_T^i}|u|^2e^{-\gamma t}dxdt\leqslant 0.$$

Вибравши у цій нерівності $\gamma = \frac{1}{2}(a_0 - c_0^i)$, одержимо, що $u(x,t) = 0$ майже всюди в Q_T^i. Оскільки i є довільним натуральним числом, то це завершує доведення теореми.

Зауваження 2. Як випливає з доведення теореми 2, єдиність сильного розв'язку задачі (1) – (3) зберігатиметься лише при виконанні умов (A_0), (A_1), (C_1), (G), (S), причому в умові (G) можна прийняти, що $g_0 = 0$, а $p \in (1,+\infty)$.

Зауваження 3. Теорема 2 залишається правильною при виконанні умов (A_0), (A_1), (C_1), (S), $g(t,\xi) \equiv 0$, $u_0 \in (V_{1,loc}(\bar{\Omega}))^m$, $f \in (L^2((0,T);V_{1,loc}(\bar{\Omega})))^m$.

Зауваження 4. Наведемо приклади області Q_T, в якій для системи (1) виконується умова (A_0).

1. Нехай

$$\Pi = \{x \in \mathbf{R}^l : 0 < x_1 < +\infty, |x_j| < b, j = 2,\dots,l\},$$

а $\Omega \subset \Pi$. Тоді область $Q_T = \Omega \times (0,T)$ задовольнятиме умову (A_0), якщо матриця A_1 – невід'ємна визначена для майже всіх $(x,t) \in Q_T$.

2. Нехай

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^l : x_j > 0, j = 1,\dots,l\}.$$

Тоді область $Q_T = \Omega \times (0,T)$ задовольнятиме умову (A_0), якщо матриці A_i – невід'ємно визначені для майже всіх $(x,t) \in Q_T$ і кожного $i = 1,\dots,l$.

1. *Ohkubo Toshio, Shirota Taira.* On structure of certain L^2-well-posed mixed problems for hyperbolic systems of first order // Hokkaido Math. J. – 1975. – Vol. 4. – P. 82-158.

2. *Kubota Kôji.* Remarks on L^2-well posedness of mixed problems for hyperbolic systems // Hokkaido Math. J. – 1977. – Vol. 6. – N 1. – P. 74-101.
3. *Kubota Kôji, Ohkubo Toshio.* On well posedness for Maxwell's equations // Hokkaido Math. J. – 1978. – Vol. 7. – N 1. – P. 142-168.
4. *Beir ao da Veiga H.* Homogeneous and nonhomogeneous boundary value problems for first order linear hyperbolic systems arising in fluid mechanics. I // Comm. Partial Differential Equations. – 1982. – Vol. 7. – N 10. – P. 1135-1149.
5. *Beir ao da Veiga H.* Homogeneous and nonhomogeneous boundary value problems for first order linear hyperbolic systems arising in fluid mechanics. II // Comm. Partial Differential Equations. – 1983. – Vol. 8. – N 4. – P. 407-432.
6. *Georgiev Wladimir S.* The Kreiss condition for dissipative hyperbolic systems of constant multiplicity // Boll. Un. Mat. Ital. B(6). – 1984. – Vol. 3. – N 2. – P. 383-395.
7. *Rauch Jeffrey.* Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 291. – N 1. – P. 167-187.
8. *Smoczyński Piotr.* Coincidence of weak and strong solutions of a symmetric positive system with boundary conditions of nonconstant rank // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1987. – Vol. 35. – N 5-6. – P. 307-314.
9. *Secchi Paolo.* The initial-boundary value problem for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary of constant multiplicity // Differential Integral Equations. – 1996. – Vol. 9. – N. 4. – P. 671-700.
10. *Ostkamp S.* Multidimensional characteristic Galerkin methods for hyperbolic systems // Math. Methods Appl. Sci. – 1997. – Vol 20. – N 13. – P. 1111-1125.
11. *Secchi Paolo.* A symmetric positive systems with nonuniformly characteristic boundary // Differential Integral Equations. – 1998. – Vol. 11. – N. 4. – P. 605-621.
12. *Benvenuti Stefano, Bove Antonio.* On a class of hyperbolic systems with multiple characteristics // Osaka J. Math. – 1998. – Vol. 35. – N 2. – P. 313-356.
13. *Похожаев С. И.* Слабо нелинейные гиперболические системы // Труды Москов. мат. общества. – 1970. – Т. 23. – С. 61-76.
14. *Yamaguti Masaya, Niizeki Shyôzô.* On the Cauchy problem for a semilinear hyperbolic system // J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – Vol. 20. – N 4. – P. 625-634.
15. *Métivier Guy.* The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data // Duke Math. J. – 1986. – Vol. 53. – N 4. – P. 983-1011.
16. *Métivier Guy, Rauch Jefrey.* Interaction of piecewise smooth progressing waves for semilinear hyperbolic equations // Comm. Partial Differential Equations. – 1990. – Vol. 15. – N 8. – P. 1079-1140.
17. *Făciu C., Simion N.* Energy estimates and uniqueness of the weak solutions of initial-boundary value problems for semolinear hyperbolic systems // Z. Angew. Math. Phys. – 2000. – Vol. 51. – N 5. – P. 792-805.
18. *Lax P. D., Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Comm. Pure and Appl. Math. – 1960. – Vol. 13. – P. 427-455.

19. *Lax P. D., Friedrichs K. O.* Boundary value problems for first order operators // Comm. Pure and Appl. Math. – 1965. – Vol. 18. – P. 355-388.

20. *Агранович М. С.* К теории граничных задач для симметризуемых систем первого порядка // Матем. сб. – 1967. – Т. 73. – N 2. – С. 161-197.

21. *Лавренюк С. П., Оліскевич М. О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними// Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54. – N 10. – С. 1356-1370.

22. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

23. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

24. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М., 1978.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SEMILINEAR HYPERBOLIC SYSTEM OF THE FIRST ORDER IN UNBOUNDED DOMAIN

Nataliya Huzil'

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

In this paper there is investigated the initial boundary value problem for the hyperbolic system

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(t,u) = f(x,t)$$

in unbounded domain with Dirichlet type boundary condition. The well posedness conditions are obtained for this problem without any restrictions on the behaviour of data and solution when $|x| \to +\infty$.

Key words: semilinear hyperbolic system of the first order.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.2003

Прийнята до друку 02.10.2003