ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.27-37

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.27-37

УДК 517.95

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНОГО ВІД ЧАСУ КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПОХІДНІЙ ЗА ЧАСОМ У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ

Олена ГУЛЬ, Уляна ДОРОЖОВЕЦЬ, Микола ІВАНЧОВ
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Визначено умови існування та єдиності розв'язку двох обернених задач для одновимірного параболічного рівняння, в якому невідомим є залежний від часу коефіцієнт при похідній за часом. Задачі відрізняються наборами крайових умов та умов перевизначення.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння, функція Гріна.

В обернених задачах визначення старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні другого порядку традиційними є задачі з невідомим коефіцієнтом при другій похідній за просторовими змінними [1-3]. Якщо розглянути випадок рівняння теплопровідності

$$c\rho u_t = \lambda u_{xx} + f(x,t),$$

то в ньому невідомими можуть бути як коефіцієнт теплопровідності λ, так і коефіцієнт об'ємної теплоємності $c\rho$, що приводить до розташування невідомого коефіцієнта або перед другою похідною u_{xx}, або перед похідною за часом u_t. У цій праці ми розглянули випадок подібного розташування старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні. Досліджено дві задачі, які відрізняються різними наборами крайових умов та умов перевизначення, а також дещо відмінними методами доведення існування розв'язку цих задач. Подібну задачу у випадку невідомого коефіцієнта, що залежить від просторових змінних, розглянуто в [4].

1. В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h < \infty, 0 < t < T < \infty\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$a(t)u_t = u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)$, початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h] \tag{2}$$

© Гуль Олена, Дорожовець Уляна, Іванчов Микола, 2003

та крайові умови й умову перевизначення

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Припустимо, що виконуються умови:
(A1) $\varphi \in C^2[0,h], \mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,3, b, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;
(A2) $\varphi''(x) > 0, x \in [0,h]; \mu_3'(t) > 0, b(0,t)\mu_1(t) + c(0,t)\mu_3(t) + f(0,t) > 0, t \in [0,T]$;
(A3) $\varphi'(0) = \mu_1(0), \varphi'(h) = \mu_2(0), \varphi(0) = \mu_3(0)$.

Теорема 1. *При виконанні умов (A1)–(A3) існує розв'язок $(a(t), u(x,t))$ задачі (1)–(4) з класу $C[0,T_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$ такий, що $a(t) > 0$ на $[0,T_0]$, де число $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$ визначають вихідними даними задачі.*

Доведення. Позначимо через $G_k(x,t,\xi,\tau), k = 1,2,3,4$ функції Гріна для рівняння теплопровідності

$$u_t = \frac{1}{a(t)} u_{xx}, \quad (x,t) \in Q_T$$

з крайовими умовами $u(0,t) = \mu_1(t), u(h,t) = \mu_2(t)$ при $k = 1$, умовами $u_x(0,t) = \mu_1(t), u_x(h,t) = \mu_2(t)$ при $k = 2$, умовами $u(0,t) = \mu_1(t), u_x(h,t) = \mu_2(t)$ при $k = 3$ та умовами $u_x(0,t) = \mu_1(t), u(h,t) = \mu_2(t)$ при $k = 4$, які визначаються формулами

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{[\frac{k-1}{2}]n} \left(\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))} \right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4(\theta(t) - \theta(\tau))} \right) \right), \quad k = 1,2,3,4, \quad \theta(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)}. \tag{5}$$

При відомій неперервній функції $a(t) > 0, t \in [0,T]$, знаходження розв'язку прямої задачі (1)–(3) зводиться до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)u_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{6}$$

$(x,t) \in \overline{Q}_T$, де

$$u_0(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\frac{\mu_1(\tau)}{a(\tau)}d\tau +$$

$$+ \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\frac{\mu_2(\tau)}{a(\tau)}d\tau + \int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}d\tau. \tag{7}$$

Ввівши позначення $u_x = v$, рівняння (6) можна замінити еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \qquad (8)$$

$$v(x,t) = u_{0x}(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_{2x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \qquad (9)$$

$$(x,t) \in \overline{Q}_T.$$

У рівнянні (1) приймемо $x = 0$. Враховуючи умови (3), (4), звідси знайдемо

$$a(t) = \frac{1}{\mu_3'(t)}(u_{xx}(0,t) + b(0,t)\mu_1(t) + c(0,t)\mu_3(t) + f(0,t)) \quad t \in [0,T]. \qquad (10)$$

Для визначення u_{xx} продиференціюємо двічі за x рівняння (8). Враховуючи співвідношення

$$G_{2xx}(x,t,\xi,\tau) = G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau),$$

яке отримуємо безпосередньо з формули (5) та інтегруючи частинами, знаходимо

$$w(x,t) = u_{0xx}(x,t) - \int_0^t \int_0^h G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+$$
$$+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T, \qquad (11)$$

де $w = u_{xx}$.

Отже, задачу (1)–(4) зведено до системи рівнянь (8)–(11) стосовно невідомих $(a(t),\ u(x,t), v(x,t), w(x,t))$. Неважко переконатись в їхній еквівалентності у тому сенсі, коли $(a(t), u(x,t))$ є розв'язком задачі (1)–(4) з класу $C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, то функції $(a(t), u(x,t), v(x,t) = u_x(x,t), w(x,t) = u_{xx}(x,t))$ утворюють розв'язок системи рівнянь (8)–(11) з класу $C[0,T]\times(C(\overline{Q}_T))^3$. Правильним є й обернене твердження.

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (8)–(11) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. З цією метою визначимо спочатку апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (8)–(11).

Використовуючи очевидні співвідношення

$$G_{2x}(x,t,\xi,\tau) = -G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau), \quad G_{2xx}(x,t,\xi,\tau) = -a(\tau)G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau),$$

які випливають з (5), та інтегруючи частинами, знаходимо

$$u_{0x}(x,t) = \int_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\frac{\mu_1(\tau)}{a(\tau)}d\tau -$$
$$- \int_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)\frac{\mu_2(\tau)}{a(\tau)}d\tau + \int_0^t \int_0^h G_{2x}(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}d\tau, \qquad (12)$$

$$u_{0xx}(x,t)=\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi-\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau)\frac{f_\xi(\xi,\tau)}{a(\tau)}d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (13)$$

З умов теореми маємо

$$\int\limits_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi\geqslant\min_{[0,h]}\varphi''(x)\int\limits_0^h G_2(0,t,\xi,0)d\xi=\min_{[0,h]}\varphi''(x)>0,$$

тому існує такий проміжок $[0,T_0], 0<T_0\leqslant T$, на якому виконуватиметься нерівність

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi\geqslant\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau$$

$$-\int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau)\frac{f_\xi(\xi,\tau)}{a(\tau)}d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+(b_\xi(\xi,\tau+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+$$

$$+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (14)$$

Тоді на проміжку $[0,T_0]$ правильною буде нерівність $u_{xx}(0,t)\geqslant 0$, що, з врахуванням припущень теореми і рівняння (10), приводить до оцінки

$$a(t)\geqslant A_0>0,\quad t\in[0,T_0], \qquad (15)$$

з відомою сталою $A_0>0$.

З (15) згідно з (5) негайно випливає оцінка

$$\theta(t)\leqslant\frac{1}{A_0}t\leqslant C_1<\infty,\quad t\in[0,T_0]. \qquad (16)$$

Оцінки функцій u,v,w почнемо з оцінки v. Диференціюючи (1) і (2) за x, доводимо, що функція v є розв'язком задачі

$$a(t)v_t=v_{xx}+b(x,t)v_x+(b_x(x,t)+c(x,t))v+c_x(x,t))u+f_x(x,t),\ (x,t)\in Q_{T_0}, \qquad (17)$$

$$v(x,0)=\varphi'(x),\ x\in[0,h], \qquad (18)$$

$$v(0,t)=\mu_1(t),\quad v(h,t)=\mu_2(t),\quad t\in[0,T_0]. \qquad (19)$$

Розв'язок задачі (17)–(19) подамо у вигляді

$$v(x,t) = v_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h \tilde{G}(x,t,\xi,\tau) c_\xi(\xi,\tau) u(\xi,\tau) \frac{d\xi d\tau}{a(\tau)},$$

де $\tilde{G}(x,t,\xi,\tau)$ – функція Гріна задачі (17)–(19), а v_0 – розв'язок рівняння

$$a(t)v_{0t} = v_{0xx} + b(x,t)v_{0x} + (b_x(x,t) + c(x,t))v_0 + f_x(x,t), \quad (x,t) \in Q_{T_0}, \tag{20}$$

що задовольняє умови (18), (19). За принципом максимуму [5] виконується оцінка

$$|v_0(x,t)| \leqslant M_0 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{T_0},$$

де стала $M_0 > 0$ визначається вихідними даними задачі (20), (18), (19). Позначимо $U(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |u(x,t)|$, $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$. Враховуючи (15) й очевидну оцінку

$$\int_0^h \tilde{G}(x,t,\xi,\tau) d\xi \leqslant 1,$$

отримуємо нерівність

$$V(t) \leqslant C_1 + C_2 \int_0^t U(\tau) d\tau. \tag{21}$$

З іншого боку маємо

$$u(x,t) = \mu_3(t) + \int_0^x v_\xi(\xi,\tau) d\xi,$$

звідки приходимо до нерівності

$$U(t) \leqslant C_3 + C_4 V(t). \tag{22}$$

Підставляючи (22) у (21) та застосовуючи нерівність Гронуолла, отримуємо

$$V(t) \leqslant M_1 < \infty, \quad t \in [0, T_0],$$

або, враховуючи (22) та позначення,

$$|u(x,t)| \leqslant M_2 < \infty, \quad |v(x,t)| \leqslant M_1 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}. \tag{23}$$

Для оцінки w використаємо рівняння (11) з якого з урахуванням (13) та оцінок (15), (23), отримуємо

$$W(t) \leqslant C_5 + C_6 \int_0^t \frac{W(\tau) d\tau}{a(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{24}$$

Звідси випливає оцінка [6, Лема 2.6, с. 13]

$$W(t) \leqslant M_3 < \infty, \quad t \in [0, T_0]$$

або

$$|u_{xx}(x,t)| \leqslant M_3 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}. \tag{25}$$

При наявності (25) з рівняння (10) отримуємо оцінку

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_0]. \tag{26}$$

Отже, оцінки розв'язків системи (8)–(11) визначено. Розглядаючи систему рівнянь (8)–(11) як операторне рівняння

$$\omega = P\omega \tag{27}$$

стосовно $\omega = (a, u, v, w)$ з оператором P, який визначається правими частинами рівнянь (8)–(11) і згідно з оцінками (15), (23), (25), (26) відображає множину $\mathcal{N} \equiv \{(a,u,v,w) \in C[0,T_0] \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1, |u(x,t)| \leqslant M_2, |v(x,t)| \leqslant M_1, 0 \leqslant w(x,t) \leqslant M_3\}$ в себе, та, застосовуючи до нього теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора за схемою, наведеною в [3], доводимо існування розв'язку системи рівнянь (8)–(11). За еквівалентністю системи рівнянь (8)–(11) та задачі (1)–(4) одержуємо твердження теореми.

Не змінюючи доведення теореми 1, за рахунок деяких додаткових припущень можна отримати існування розв'язку задачі (1)–(4) у гельдерівських класах функцій.

Теорема 2. *Якщо, крім умов (A1)–(A1), виконується умова*

(A4) $\varphi \in H^{\gamma}[0,h], \mu_i \in H^{\frac{1+\gamma}{2}}[0,T], i = 1,2, \mu_3 \in H^{1+\gamma/2}[0,T], 0 < \gamma < 1,$
то задача (1)–(4) має розв'язок $(a,u) \in H^{\gamma/2}[0,T_0] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{T_0})$, *де число* $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$ *визначається вихідними даними задачі.*

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(4).

Теорема 3. *Якщо виконуються умови*

(A5) $b, c \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_T)$;

(A6) $\mu_3'(t) \neq 0, t \in [0,T]$,
то задача (1)–(4) не може мати більше одного розв'язку $(a(t), u(x,t))$ *з класу* $H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Якщо $(a_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2,$ – два розв'язки задачі (1)–(4), то їхня різниця $a(t) = a_1(t) - a_2(t), u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$a_1(t)u_t = u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u - a(t)u_{2t}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{28}$$

$$u(x,0) = 0, \ x \in [0,h], \quad u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0, \ t \in [0,T], \tag{29}$$

$$u(0,t) = 0, \ t \in [0,T]. \tag{30}$$

Позначимо через $G^\star(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (28), (29). Тоді розв'язок задачі (28), (29) можна подати у вигляді

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_0^h G^\star(x,t,\xi,\tau)\frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{31}$$

Приймемо в рівнянні (28) $x = 0$, використовуючи умови (29), (30)

$$a(t)u_{2t}(0,t) = u_{xx}(0,t).$$

Враховуючи те, що u_2 задовольняє умову (4), та диференціюючи (31), отримаємо

$$a(t) = -\frac{1}{\mu_3'(t)} \int_0^t d\tau \int_0^h G_{xx}^\star(0,t,\xi,\tau) \frac{a(\tau)}{a_1(\tau)} u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi, \quad t \in [0,T]. \tag{32}$$

З того, що $u_{2t}(x,t)$ задовольняє умову Гельдера за x з показником γ, та оцінок об'ємних теплових потенціалів [7, с. 23] випливає, що ядро інтегрального рівняння (33) має інтегровну особливість

$$\left| \int_0^h G_{xx}^\star(x,t,\xi,\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi d\tau \right| \leqslant \frac{C_7}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}}.$$

Тому за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду рівняння (32) має тільки тривіальний розв'язок $a(t) \equiv 0, t \in [0,T]$. Враховуючи це в рівнянні (28), приходимо до однорідного рівняння

$$a_1(t)u_t = u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u$$

з умовами (29), що дає $u(x,t) \equiv 0, (x,t) \in \overline{Q}_T$. Отже, теорему доведено.

2. Для рівняння (1) розглянемо такі крайові умови та умову перевизначення:

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{33}$$

$$u(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{34}$$

Очевидно, що теорема 3 єдиності розв'язку переноситься на випадок задачі (1), (2), (33), (34). Дослідження існування розв'язку вимагає впровадження функції Гріна для складнішого рівняння, ніж рівняння теплопровідності.

Вважатимемо, що для вихідних даних задачі (1), (2), (33), (34) виконуються умови (A1), (A2) та умови узгодження нульового і першого порядків

(A3') $\varphi'(0) = \mu_1(0), \varphi(h) = \mu_2(0), \varphi(0) = \mu_3(0), \dfrac{\mu_2'(0)}{\mu_3'(0)}(\varphi''(0) + b(0,0)\varphi'(0) + c(0,0)\varphi(0) + f(0,0)) = \varphi''(h) + b(h,0)\varphi'(h) + c(h,0)\varphi(h) + f(h,0)$.

Теорема 4. *При виконанні умов (A1), (A2), (A3') існує розв'язок $(a(t), u(x,t))$ задачі (1), (2), (33), (34) з класу $C[0,T_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$ такий, що $a(t) > 0$ на $[0,T_0]$, де число $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$ визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Аналогічно до попереднього пункту отримуємо рівняння (10). Оцінка

$$|u(x,t)| \leqslant M_4 < \infty, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T \tag{35}$$

зі сталою $M_4 > 0$, що визначається тільки вихідними даними задачі, є наслідком принципу максимуму. Нерівності (15), (16) переносяться на цей випадок без змін.

Перш ніж оцінювати $v = u_x$, задачу (1), (2), (33) зведемо до рівняння

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_4(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi \frac{d\tau}{a(\tau)}, \qquad (36)$$

$(x,t) \in \overline{Q}_T$, де

$$u_0(x,t) = \int_0^h G_4(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^t G_4(x,t,0,\tau)\frac{\mu_1(\tau)}{a(\tau)}d\tau -$$
$$- \int_0^t G_{4\xi}(x,t,h,\tau)\frac{\mu_2(\tau)}{a(\tau)}d\tau + \int_0^t \int_0^h G_4(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}d\tau. \qquad (37)$$

Диференціюючи (36), (37) за x і проводячи нескладні перетворення, отримуємо

$$v(x,t) = u_{0x}(x,t) + \int_0^t \int_0^h G_{4x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi \frac{d\tau}{a(\tau)}, \qquad (38)$$

$(x,t) \in \overline{Q}_T$, де

$$u_{0x}(x,t) = \int_0^h G_3(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi + \int_0^t G_{3\xi}(x,t,0,\tau)\frac{\mu_1(\tau)}{a(\tau)}d\tau +$$
$$+ \int_0^t G_3(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h G_{4x}(x,t,\xi,\tau)\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}d\tau. \qquad (39)$$

З (38), (39) для функції $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$ приходимо до нерівності

$$V(t) \leqslant C_1 + C_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_3 \int_0^t \frac{V(\tau)d\tau}{a(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad t \in [0, T_0]. \qquad (40)$$

Застосовуючи нерівність (40) саму до себе, зведемо її до вигляду

$$V(t) \leqslant C_4 + C_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_5 \int_0^t \frac{V(\tau)d\tau}{a(\tau)}, \quad t \in [0, T_0], \qquad (41)$$

з відомими додатними сталими C_4, C_5. Застосовуючи до нерівності (41) лему 2 [7, с. 300] та оцінки (15), (16), одержуємо

$$V(t) \leqslant C_6 + C_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \quad t \in [0, T_0]. \qquad (42)$$

Для оцінки зверху величини $u_{xx}(0,t)$ використаємо функцію Гріна рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x. \tag{43}$$

На підставі означення функції Гріна неважко перевірити, що функція

$$\tilde{G}_4(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\Bigg(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh+\beta(t)-\beta(\tau))^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+$$
$$+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh+\beta(t)-\beta(\tau))^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\Bigg), \quad \text{де } \beta(t) = \int_0^t b(\tau)d\tau, \tag{44}$$

є функцією Гріна задачі (43), (2), (33).

Позначимо через $\tilde{G}_4(x,t,\xi,\tau;y)$ функцію, визначену рівністю (44), в якій $\beta(t)$ замінено на $\beta(y,t) = \int_0^t b(y,\tau)d\tau$. Зведемо пряму задачу (1), (2), (33) до такого інтегро-диференціального рівняння:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t\int_0^h \tilde{G}_4(x,t,\xi,\tau;y)((b(\xi,\tau)-b(y,\tau))v(\xi,\tau)+$$
$$+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))\frac{d\xi d\tau}{a(\tau)}, \tag{45}$$

де $y \in [0,h]$ – довільна фіксована точка, а $u_0(x,t)$ визначається формулою (37). Продиференціюємо (46) двічі за x і приймемо $y = x = 0$

$$u_{xx}(0,t) = u_{0xx}(0,t) + \int_0^t\int_0^h \tilde{G}_{4xx}(0,t,\xi,\tau;0)((b(\xi,\tau)-b(0,\tau))v(\xi,\tau)+$$
$$+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))\frac{d\xi d\tau}{a(\tau)}. \tag{46}$$

З формули (37) знаходимо

$$u_{0xx}(0,t) = \int_0^h G_4(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi - \int_0^t G_4(0,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau -$$
$$-\int_0^t G_{4\xi}(0,t,h,\tau)(\mu_2'(\tau)-f(h,\tau))d\tau - \int_0^t\int_0^h G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)\frac{f_\xi(\xi,\tau)}{a(\tau)}d\tau. \tag{47}$$

Оцінюючи в формулі (46) другу похідну від функції Гріна і враховуючи (47) та (35), приходимо до нерівності

$$u_{xx}(0,t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_9 \int\limits_0^t \frac{V(\tau)d\tau}{a(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \quad t \in [0, T_0],$$

або, після оцінки останнього інтеграла з використанням (42),

$$u_{xx}(0,t) \leqslant C_{10} + C_{11} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \quad t \in [0, T_0]. \tag{48}$$

Тоді з рівняння (10) одержуємо нерівність

$$a(t) \leqslant C_{12} + C_{13} u_{xx}(0,t) \leqslant C_{14} + C_{15} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

з якої випливає, що

$$\max_{[0,T_0]} a(t) \leqslant C_{14} + 2C_{15}\sqrt{T_0}(\max_{[0,T_0]} a(t))^{1/2}.$$

Розв'язуючи отриману нерівність стосовно $(\max\limits_{[0,T_0]} a(t))^{1/2}$, знаходимо оцінку

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_0], \tag{49}$$

в якій $A_1 > 0$ визначається сталими C_{14}, C_{15}, T_0. З (49) і (42) негайно випливає оцінка

$$|v(x,t)| \leqslant M_5 < \infty, \quad t \in [0, T_0], \tag{50}$$

зі сталою $M_5 > 0$, що визначається вихідними даними задачі.

Отже, апріорні оцінки розв'язків $(a(t), u(x,t), v(x,t))$ системи рівнянь (10), (36), (38) визначено, що величина $u_{xx}(0,t)$ визначається за формулою (46). Повторюючи після цього міркування з доведення теореми 1, доводимо правильність теореми 4. Аналогічно до попереднього можна також одержати існування розв'язку задачі (1), (2), (33), (34) у гельдерівських класах функцій.

1. *Cannon J. R., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation// J. Math. Anal. Appl. – 1991. – Vol. 160. – P. 572-582.

2. *Исаков В. М.* Об одном классе обратных задач для параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 263. – N 6. – С. 1296-1299.

3. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39. – N 3. – С. 539-550.

4. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I // Сиб. мат. журн. – 1992. – Т. 33. – N 3. – С. 146-155.

5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

6. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – К., 1995.

7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.

INVERSE PROBLEMS FOR DETERMINING A TIME-DEPENDENT COEFFICIENT AT THE DERIVATIVE WITH RESPECT TO TIME VARIABLE IN A PARABOLIC EQUATION

Olena Gul, Ulyana Dorozhovets, Mykola Ivanchov

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We establish conditions for existence and uniqueness of solution of two inverse problems for one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the derivative with respect to time variable. The problem are distinguished by the set of boundary and overdetermination conditions.

Key words: inverse problem, parabolic equation, Green function.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.2003

Прийнята до друку 02.10.2003