ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.38-47

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.38-47

УДК 519.2

ПРО ЗБІЖНІСТЬ СУМИ НЕЗАЛЕЖНИХ ПОТОКІВ ОДНОРІДНИХ ПОДІЙ ДО НЕСТАЦІОНАРНОГО ПОТОКУ З ОБМЕЖЕНОЮ ПІСЛЯДІЄЮ

Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано умови збіжності суми незалежних потоків однорідних випадкових подій до нестаціонарного потоку з обмеженою післядією та показниковим розподілом часу до виникнення першої події. Визначено ймовірнісні характеристики рекурентних потоків із скінченним і нескінченним запізненням – часткових випадків одержаного класу граничних потоків.

Ключові слова: потік випадкових подій, сумарний потік, граничний потік, потік з обмеженою післядією, рекурентний потік із запізненням.

Відомо, що значна кількість потоків однорідних випадкових подій, які простежуються на практиці, мало відрізняються від пуассонівських або пуассонівських стаціонарних (найпростіших) потоків, оскільки вони в певному сенсі граничні для сумарних потоків. Цей емпіричний факт підтверджено граничними теоремами, які дають умови збіжності сумарного потоку до найпростішого [1, 2; 3, с. 24-29] або пуассонівського [4]. З потреб практики все частіше виникають задачі, які вимагають дослідження інших класів потоків подій, зокрема потоків з обмеженою післядією [3, с. 39; 5, с. 8; 6, с. 529].

У цій праці ми розглянули питання про умови наближення потоку, який є сумою великої кількості незалежних потоків, до деякого нестаціонарного потоку з обмеженою післядією та показниковим розподілом часу до виникнення першої події. Доведення граничної теореми грунтується на побудові сумарного потоку, що містить лише перші та другі події вихідних потоків. Частина отриманих умов, а саме умова (3), яка означає, що випадкові процеси, які підсумовують, нескінченно малі в сенсі Григеліоніса [4] і умова (4), яка визначає границю суми функцій розподілу часу до виникнення перших подій незалежних потоків, – такі самі як дві з трьох умов граничної теореми 4.1 [3] про збіжність до найпростішого потоку. Проте виникають нові умови, які зв'язують функції розподілу часу до виникнення других подій потоків-доданків і ймовірності всіляких впорядкувань перших n подій сумарного потоку в результаті розташування перших та других подій вихідних k потоків. У другій частині статті досліджуємо підкласи одержаного класу граничних потоків

– рекурентні потоки зі скінченним та нескінченним запізненням і показниковими розподілами інтервалів часу між сусідніми подіями.

1. Гранична теорема. Нехай для кожного натурального k визначено k незалежних потоків $\{t_{n(j)},\ 1 \leqslant n < N_j\}$ $(j = \overline{1,k})$ і $\{t_n^{(k)},\ 1 \leqslant n < N^{(k)}\}$ – сумарний потік, який є об'єднанням всіх $t_{n(j)}$, $j = \overline{1,k}$. Нехай $\{t_n,\ 1 \leqslant n < \infty\}$ – потік з обмеженою післядією (тобто потік, в якому інтервали часу між сусідніми подіями – взаємно незалежні випадкові величини). Скажемо, що послідовність випадкових потоків $\{t_n^{(k)}\}$ збігається при $k \to \infty$ до потоку $\{t_n\}$, якщо для кожного фіксованого n $(1 \leqslant n < N^{(k)})$ і будь-яких $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{ t_1^{(k)} < x_1;\quad t_m^{(k)} - t_{m-1}^{(k)} < x_m,\ m = \overline{2,n} \right\} = \prod_{m=1}^{n} F_{m-1,m}(x_m),$$

де $F_{0,1}(x) = P\{t_1 < x\}$, $F_{m-1,m}(x) = P\{t_m - t_{m-1} < x\}$ $(m = \overline{2,n})$ – функції розподілу інтервалів часу між сусідніми подіями в потоці $\{t_n\}$.

Введемо позначення $F_{m(j)}(x) = P\{t_{m(j)} < x\}$, $m = 1, 2, 3$ і визначимо випадковий потік однорідних подій $\{\tau_{n(j)},\ 1 \leqslant n < \bar{N}_j\}$ так. Якщо потік $\{t_{n(j)}\}$ містить лише одну подію, то й $\{\tau_{n(j)}\}$ містить лише одну подію, яка відбувається в момент $\tau_{1(j)} = t_{1(j)}$. Якщо $\{t_{n(j)}\}$ містить хоча б дві події, то $\{\tau_{n(j)}\}$ містить справді дві події, які відбуваються відповідно в моменти часу $\tau_{1(j)} = t_{1(j)}$, $\tau_{2(j)} = t_{2(j)}$. Отже, новий потік містить лише першу та другу подію вихідного потоку. Нехай, далі $\{\tau_n^{(k)},\ 1 \leqslant n < \bar{N}^{(k)}\}$ – сумарний потік, який є об'єднанням всіх $\{\tau_{n(j)}\}$ для $j = \overline{1,k}$.

Лема. *Нехай для будь-якого фіксованого $x > 0$ виконується умова*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} F_{3(j)}(x) = 0. \tag{1}$$

Тоді для кожного фіксованого $n \geqslant 1$ $(n < \min\{N^{(k)}, \bar{N}^{(k)}\})$

$$\lim_{k\to\infty} \left(P(B_n^{(k)}) - P(A_n^{(k)}) \right) = 0 \tag{2}$$

рівномірно стосовно $x_m \leqslant T$, $m = \overline{1,n}$, де $T > 0$ – будь-яке фіксоване число,

$$A_n^{(k)} = \left\{ t_1^{(k)} < x_1;\ t_m^{(k)} - t_{m-1}^{(k)} < x_m,\ m = \overline{2,n} \right\},$$
$$B_n^{(k)} = \left\{ \tau_1^{(k)} < x_1;\ \tau_m^{(k)} - \tau_{m-1}^{(k)} < x_m,\ m = \overline{2,n} \right\}.$$

Доведення. Розглянемо подію $C_n^{(k)} = \left\{ \min\limits_{j=\overline{1,k}} t_{3(j)} < nT \right\}$. Тоді $B_n^{(k)}\overline{C_n^{(k)}} \subset A_n^{(k)} \subset$ $\subset (B_n^{(k)} \cup C_n^{(k)})$. Справді, якщо є подія $B_n^{(k)}$, то

$$\tau_1^{(k)} < x_1 \leqslant T,\quad \tau_2^{(k)} < \tau_1^{(k)} + x_2 < x_1 + x_2 \leqslant 2T, \ldots, \tau_n^{(k)} < nT.$$

Оскільки $\overline{C_n^{(k)}} = \left\{ \min\limits_{j=\overline{1,k}} t_{3(j)} \geqslant nT \right\}$, то подія $B_n^{(k)}\overline{C_n^{(k)}}$ означає, що $t_m^{(k)} = \tau_m^{(k)}$, $m =$

$\overline{1,n}$, і, отже, є подія $A_n^{(k)}$, тобто $B_n^{(k)}\overline{C_n^{(k)}} \subset A_n^{(k)}$. Оскільки

$$A_n^{(k)} = A_n^{(k)}C_n^{(k)} \cup A_n^{(k)}\overline{C_n^{(k)}}, \quad A_n^{(k)}\overline{C_n^{(k)}} \subset B_n^{(k)}, \quad A_n^{(k)}C_n^{(k)} \subset C_n^{(k)},$$

то $A_n^{(k)} \subset (B_n^{(k)} \cup C_n^{(k)})$. Із співвідношень $B_n^{(k)}\overline{C_n^{(k)}} \subset A_n^{(k)}$, $A_n^{(k)} \subset (B_n^{(k)} \cup C_n^{(k)})$ випливає відповідно, що $P(B_n^{(k)}) - P(A_n^{(k)}) \leqslant P(C_n^{(k)})$ і $P(B_n^{(k)}) - P(A_n^{(k)}) \geqslant -P(C_n^{(k)})$, тобто $|P(B_n^{(k)}) - P(A_n^{(k)})| \leqslant P(C_n^{(k)})$. З іншого боку, на основі формули (1)

$$P(C_n^{(k)}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} P\{t_{3(j)} < nT\} = \sum_{j=1}^{k} F_{3(j)}(nT) \longrightarrow 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Тому $P(B_n^{(k)}) - P(A_n^{(k)}) \longrightarrow 0$ при $k \to \infty$ рівномірно в області $\{x_m \leqslant T,\ m = \overline{1,n}\}$. Лему доведено.

Для сумарного потоку $\{\tau_n^{(k)}\}$, який є об'єднанням перших і других подій потоків $\{t_{n(j)}\}$ $(j = \overline{1,k})$, введемо позначення

$$\begin{gathered}
p_j^{(k)} = P\{\tau_1^{(k)} = t_{1(j)}\},\ j = \overline{1,k}; \quad p_{j_1j_2}^{(k)} = P\{\tau_1^{(k)} = t_{1(j_1)},\ \tau_2^{(k)} = t_{1(j_2)}\},\\
p_{j_1j_1}^{(k)} = P\{\tau_m^{(k)} = t_{m(j_1)},\ m = 1,2\}; \quad p_{j_1j_2j_3}^{(k)} = P\{\tau_m^{(k)} = t_{1(j_m)},\ m = 1,2,3\},\\
p_{j_1j_2j_1}^{(k)} = P\{\tau_m^{(k)} = t_{1(j_m)},\ m = 1,2;\ \tau_3^{(k)} = t_{2(j_1)}\},\\
p_{j_1j_2j_2}^{(k)} = P\{\tau_m^{(k)} = t_{1(j_m)},\ m = 1,2;\ \tau_3^{(k)} = t_{2(j_2)}\},\\
p_{j_1j_1j_2}^{(k)} = P\{\tau_m^{(k)} = t_{m(j_1)},\ m = 1,2;\ \tau_3^{(k)} = t_{1(j_2)}\},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}^{(k)} = P\{\tau_m^{(k)} = t_{1(j_m)},\ m = \overline{1,n-1}\},\ \text{де } j_m = \overline{1,k},\ m = \overline{1,n-1}.
\end{gathered}$$

Теорема. *Нехай для будь-якого фіксованого $x > 0$ виконується умова (1) і умови*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{j=\overline{1,k}} F_{1(j)}(x) = 0; \tag{3}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} F_{1(j)}(x) = \lambda x, \tag{4}$$

де $\lambda > 0$ – фіксований параметр, а також для будь-яких α, β $(0 \leqslant \alpha < \beta)$

послідовність умов

$$
\begin{gathered}
\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} p_j^{(k)} e^{-\Delta F_{2(j)}(\alpha,\beta)} = \varphi_2(\beta-\alpha), \\
\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{k} p_{j_1 j_1}^{(k)} + \sum_{j_1,j_2=1}^{k} p_{j_1 j_2}^{(k)} e^{-\sum\limits_{m=1}^{2} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} \right) = \varphi_3(\beta-\alpha), \\
\lim_{k\to\infty} \Bigg(\sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{k} p_{j_1 j_2 j_3}^{(k)} e^{-\sum\limits_{m=1}^{3} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} + \sum_{j_1,j_2=1}^{k} \big(p_{j_1 j_2 j_2}^{(k)} e^{-\Delta F_{2(j_1)}(\alpha,\beta)} + \\
+ (p_{j_1 j_2 j_1}^{(k)} + p_{j_1 j_1 j_2}^{(k)}) e^{-\Delta F_{2(j_2)}(\alpha,\beta)} \big) \Bigg) = \varphi_4(\beta-\alpha), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
\tag{5}
$$

$$
\begin{gathered}
\lim_{k\to\infty} \Bigg(\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}=1}^{k} p_{j_1\cdots j_{n-1}}^{(k)} e^{-\sum\limits_{m=1}^{n-1} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} + \\
+ \sum_{j_1,\ldots,j_{n-2}=1}^{k} \Big(p_{j_1\cdots j_{n-2} j_{n-2}}^{(k)} e^{-\sum\limits_{m=1}^{n-3} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} + (p_{j_1\cdots j_{n-2} j_{n-3}}^{(k)} + \\
+ p_{j_1\cdots j_{n-3} j_{n-3} j_{n-2}}^{(k)}) e^{-\sum\limits_{m=1 (m\neq n-3)}^{n-2} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} + \cdots + (p_{j_1\cdots j_{n-2} j_1}^{(k)} + p_{j_1\cdots j_{n-3} j_1 j_{n-2}}^{(k)} + \\
+ \cdots + p_{j_1 j_1 j_2\cdots j_{n-2}}^{(k)}) e^{-\sum\limits_{m=2}^{n-2} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} \Big) + \cdots + \sum_{j_1,j_2\cdots,j_{\frac{n}{2}}=1}^{k} \Big((p_{j_1\cdots j_{\frac{n}{2}} j_2 j_3\cdots j_{\frac{n}{2}}}^{(k)} + \\
+ \cdots + p_{j_1 j_2 j_2 j_3 j_3\cdots j_{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}}}^{(k)}) e^{-\Delta F_{2(j_1)}(\alpha,\beta)} + \cdots + (p_{j_1\cdots j_{\frac{n}{2}} j_1\cdots j_{\frac{n}{2}-1}}^{(k)} + \\
+ \cdots + p_{j_1 j_1 j_2 j_2\cdots j_{\frac{n}{2}-1} j_{\frac{n}{2}-1} j_{\frac{n}{2}}}^{(k)}) e^{-\Delta F_{2(j_{\frac{n}{2}})}(\alpha,\beta)} \Big) \Bigg) = \\
= \varphi_n(\beta-\alpha), \quad \textit{якщо } n \textit{ -- парне число;} \\
\lim_{k\to\infty} \Bigg(\sum_{j_1,\ldots,j_{n-1}=1}^{k} p_{j_1\cdots j_{n-1}}^{(k)} e^{-\sum\limits_{m=1}^{n-1} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} + \cdots + \\
+ \sum_{j_1,\ldots,j_{\frac{n+1}{2}}=1}^{k} \Big(p_{j_1\cdots j_{\frac{n+1}{2}-1} j_{\frac{n+1}{2}} j_{\frac{n+1}{2}}}^{(k)} e^{-\sum\limits_{m=1}^{\frac{n+1}{2}-1} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} + (p_{j_1\cdots j_{\frac{n+1}{2}} j_{\frac{n+1}{2}-1}}^{(k)} + \\
+ p_{j_1\cdots j_{\frac{n+1}{2}-1} j_{\frac{n+1}{2}-1} j_{\frac{n+1}{2}}}^{(k)}) e^{-\sum\limits_{m=1 (m\neq \frac{n+1}{2}-1)}^{\frac{n+1}{2}} \Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)} + \cdots + (p_{j_1\cdots j_{\frac{n+1}{2}} j_1}^{(k)} +
\end{gathered}
$$

$$+p^{(k)}_{j_1j_1j_2j_3\dots j_{\frac{n+1}{2}}})e^{-\sum\limits_{m=2}^{\frac{n+1}{2}}\Delta F_{2(j_m)}(\alpha,\beta)}) + \sum_{j_1,\dots,j_{\frac{n-1}{2}}=1}^{k}(p^{(k)}_{j_1\dots j_{\frac{n-1}{2}}j_1\dots j_{\frac{n-1}{2}}}+$$

$$+p^{(k)}_{j_1j_1j_2j_2\dots j_{\frac{n-1}{2}}j_{\frac{n-1}{2}}})\Big) = \varphi_n(\beta-\alpha), \text{ якщо } n \text{ – непарне},$$

де $\Delta F_{2(j)}(\alpha,\beta) = F_{2(j)}(\beta) - F_{2(j)}(\alpha)$, $\varphi_m(x)$ $(m=\overline{2,n})$ *- деякі неперервні додатні функції, визначені* $\forall\ x \geqslant 0$, *причому* $\varphi_m(0) = 1$ $(m=\overline{2,n})$. *(Підсумовування в (5) проводиться так, що індекси* j_s *з різними* s *не можуть набувати однакових значень.) Тоді для кожного фіксованого* $n \geqslant 1$ *і для будь-яких* $x_m \geqslant 0$ $(m=\overline{1,n})$

$$\lim_{k\to\infty} P(A^{(k)}_n) = (1-e^{-\lambda x_1})\prod_{m=2}^{n}\big(1-\varphi_m(x_m)e^{-\lambda x_m}\big), \tag{6}$$

тобто послідовність випадкових потоків $\{t^{(k)}_n\}$ *при* $k\to\infty$ *збігається до потоку з обмеженою післядією* $\{t_n\}$, *в якому*

$$F_{0,1}(x) = 1-e^{-\lambda x}, \quad F_{m-1,m}(x) = 1-\varphi_m(x)e^{-\lambda x},\ m=\overline{2,n}.$$

Доведення. З (2) випливає, що замість (6) достатньо довести простіше співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} P(B^{(k)}_n) = (1-e^{-\lambda x_1})\prod_{m=2}^{n}\big(1-\varphi_m(x_m)e^{-\lambda x_m}\big). \tag{7}$$

Використовуючи теорему множення ймовірностей та формулу повної ймовірності, можна записати

$$\begin{aligned} P(B^{(k)}_n) &= P(\{\tau^{(k)}_1 < x_1\}\cap\{\tau^{(k)}_2-\tau^{(k)}_1 < x_2\}\cap\dots\cap\{\tau^{(k)}_n-\tau^{(k)}_{n-1} < x_n\}) = \\ &= P\{\tau^{(k)}_1 < x_1\}P\{\tau^{(k)}_2-\tau^{(k)}_1 < x_2/\tau^{(k)}_1 < x_1\}\times\dots\times \\ &\times P\{\tau^{(k)}_n-\tau^{(k)}_{n-1} < x_n/\tau^{(k)}_1 < x_1, \tau^{(k)}_m-\tau^{(k)}_{m-1} < x_m,\ m=\overline{2,n-1}\} = I^{(k)}_n, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$I^{(k)}_n = \int\limits_{u_1<x_1}\int\limits_{u_2<x_2}\cdots\int\limits_{u_n<x_n} dF^{(k)}_1(u_1)\,dF^{(k)}_2(u_2+u_1/u_1)\times$$

$$\times dF^{(k)}_3(u_3+u_2+u_1/u_1;\ u_2+u_1)\times\dots\times$$

$$\times dF^{(k)}_n(u_n+u_{n-1}+\dots+u_1/u_1;\ u_2+u_1;\dots;u_{n-1}+u_{n-2}+\dots+u_1);$$

$$F^{(k)}_1(u_1) = P\{\tau^{(k)}_1 < u_1\};$$

$$F^{(k)}_m(u_i+u_{m-1}+\dots+u_1/u_1;\ u_2+u_1;\dots;u_{m-1}+u_{m-2}+\dots+u_1) =$$

$$= P\{\tau^{(k)}_m < u_m+u_{m-1}+\dots+u_1/\tau^{(k)}_s = \sum_{l=1}^{s}u_l,\ s=\overline{1,m-1}\},\ m=\overline{2,n}.$$

Припустимо тепер, що нам вдалося довести співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} F_1^{(k)}(u_1) = 1 - e^{-\lambda u_1}; \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} F_m^{(k)}(u_m + u_{m-1} + \cdots + u_1/u_1;\, u_2 + u_1; \ldots ; u_{m-1} + u_{m-2} + \cdots + u_1) = \\ = 1 - \varphi_m(u_m)e^{-\lambda u_m};\ m = \overline{2,n};\end{aligned} \tag{10}$$

причому збіжність у (9) і (10) рівномірна стосовно $u_m \in [0,T]$ $(m = \overline{1,n})$, де $T > 0$ – будь-яке фіксоване число. Тоді в формулі (8) можна перейти до границі при $k \to \infty$. Справді, враховуючи, що $F_m^{(k)}(u_{m-1} + \cdots + u_1/u_1; \ldots ; u_{m-1} + \cdots + u_1) = 0$ $(m = \overline{2,n})$, одержимо

$$\begin{aligned} I_n^{(k)} = \int\limits_{u_1<x_1} \cdots \int\limits_{u_{n-1}<x_{n-1}} dF_1^{(k)}(u_1) \times \cdots \times \\ \times dF_{n-1}^{(k)}(u_{n-1} + \cdots + u_1/u_1; \ldots ; u_{n-2} + \cdots + u_1) \times \\ \times F_n^{(k)}(x_n + u_{n-1} + \cdots + u_1/u_1; \ldots ; u_{n-1} + \cdots + u_1) = \\ = \left(1 - \varphi_n(x_n)e^{-\lambda x_n} + \theta_n^{(k)}\right) I_{n-1}^{(k)}, \end{aligned}$$

де $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_n^{(k)} = 0$. Продовжуючи послідовно процес зменшення кратності інтегралів і перейшовши до границі при $k \to \infty$, остаточно одержимо рівність (7).

Отже, для завершення доведення теореми достатньо виявити правильність співвідношень (9) і (10).

Розглянемо послідовність k незалежних випробувань, успіхом в j-му з яких вважатимемо подію $S_j = \{\tau_{1(j)} < x\}$. Оскільки згідно з (3) і (4)

$$\lim_{k\to\infty} \max_{j=\overline{1,k}} P(S_j) = \lim_{k\to\infty} \max_{j=\overline{1,k}} F_{1(j)}(x) = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} P(S_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} F_{1(j)}(x) = \lambda x,$$

то згідно з граничною теоремою про закон рідких подій (узагальнення граничної теореми Пуассона) для ймовірності хоча б одного успіху в k випробуваннях виконується рівність

$$\lim_{k\to\infty} P\{\tau_1^{(k)} < x\} = \lim_{k\to\infty} F_1^{(k)}(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

що й доводить формулу (9).

Далі розглянемо доведення співвідношень (10) лише для випадків $m = 2, 3$, оскільки для $m = \overline{4,n}$ доведення проводиться аналогічно. Нехай відомо, що $\tau_1^{(k)} = u_1$, тобто з ймовірністю $p_{j_1}^{(k)}$ виконується рівність $\tau_1^{(k)} = t_{1(j_1)}$. За формулою повної ймовірності

$$F_2^{(k)}(u_2 + u_1/u_1) = \sum_{j_1=1}^{k} P\{\tau_2^{(k)} < u_2 + u_1/t_{1(j_1)} = u_1\} p_{j_1}^{(k)}. \tag{11}$$

Розглянемо події $S_{j,1} = \{u_1 \leqslant t_{1(j)} < u_2 + u_1\}$, $j = \overline{1,k}$; $j \neq j_1$; $S_{j,2} = \{u_1 \leqslant t_{2(j)} < u_2 + u_1\}$, $j = j_1$; виникнення однієї з яких вважатимемо успіхом у кожному з послідовності k незалежних випробувань. Оскільки

$$P(S_{j,1}) = F_{1(j)}(u_2 + u_1) - F_{1(j)}(u_1) \leqslant F_{1(j)}(u_2 + u_1),\ j = \overline{1,k};,\ j \neq j_1;$$
$$P(S_{j,2}) = F_{2(j)}(u_2 + u_1) - F_{2(j)}(u_1) \leqslant$$
$$\leqslant F_{2(j)}(u_2 + u_1) \leqslant F_{1(j)}(u_2 + u_1),\ j = j_1,$$

то згідно з (3)

$$\lim_{k\to\infty} \max_{j=\overline{1,k}} \max\{P(S_{j,1}),\, P(S_{j_1,2})\} = \lim_{k\to\infty} \max_{j=\overline{1,k}} P(S_{j,1}) = 0.$$

Враховуючи (4), одержимо

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{j=1\ (j\neq j_1)}^{k} P(S_{j,1}) + P(S_{j,2})\Big) = \lim_{k\to\infty}\Big(\sum_{j\neq j_1}\big(F_{1(j)}(u_2+u_1)-$$
$$-F_{1(j)}(u_1)\big) + F_{2(j_1)}(u_2+u_1) - F_{2(j_1)}(u_1)\Big) =$$
$$= \lambda(u_2+u_1) - \lambda u_1 + F_{2(j_1)}(u_2+u_1) - F_{2(j_1)}(u_1) = \lambda u_2 + \Delta F_{2(j_1)}(u_1, u_2+u_1).$$

Тому для ймовірності хоча б одного успіху виконується співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} P\{\tau_2^{(k)} < u_2 + u_1 / t_{1(j_1)} = u_1\} = 1 - e^{-(\lambda u_2 + \Delta F_{2(j_1)}(u_1, u_2+u_1))}$$

рівномірно стосовно $u_s \in [0, T]$, $s = 1, 2$. Оскільки збіжність, очевидно, рівномірна стосовно j_1 і $\sum_{j_1=1}^{k} p_{j_1}^{(k)} = 1$, то перехід до границі в (11) з врахуванням першої з умов (5) приводить до рівності (10) для $m = 2$

$$\lim_{k\to\infty} F_2^{(k)}(u_2 + u_1/u_1) = 1 - e^{-\lambda u_2} \lim_{k\to\infty} \sum_{j_1=1}^{k} e^{-\Delta F_{2(j_1)}(u_1, u_2+u_1)} p_{j_1}^{(k)} =$$
$$= 1 - \varphi_2(u_2) e^{-\lambda u_2}.$$

Для доведення рівності (10) при $m = 3$ приймемо $\tau_1^{(k)} = u_1$, $\tau_2^{(k)} = u_2 + u_1$. Це означає, що з ймовірністю $p_{j_1 j_2}^{(k)}$ виконуються рівності $\tau_1^{(k)} = t_{1(j_1)}$, $\tau_2^{(k)} = t_{1(j_2)}$ або з ймовірністю $p_{j_1 j_1}^{(k)}$ – рівності $\tau_1^{(k)} = t_{1(j_1)}$, $\tau_2^{(k)} = t_{2(j_1)}$. Тоді

$$F_3^{(k)}(u_3 + u_2 + u_1/u_1,\, u_2 + u_1) =$$
$$= \sum_{j_1, j_2=1}^{k} P\{\tau_3^{(k)} < u_3 + u_2 + u_1 / t_{1(j_1)} = u_1,\, t_{1(j_2)} = u_2 + u_1\} p_{j_1 j_2}^{(k)} + \tag{12}$$
$$+ \sum_{j_1=1}^{k} P\{\tau_3^{(k)} < u_3 + u_2 + u_1 / t_{1(j_1)} = u_1,\, t_{2(j_1)} = u_2 + u_1\} p_{j_1 j_1}^{(k)}.$$

Кожна з ймовірностей $P_{3,11}^{(k)} = P\{\tau_3^{(k)} < u_3 + u_2 + u_1 / t_{1(j_1)} = u_1,\, t_{1(j_2)} = u_2 + u_1\}$ та $P_{3,12}^{(k)} = P\{\tau_3^{(k)} < u_3 + u_2 + u_1 / t_{1(j_1)} = u_1,\, t_{2(j_1)} = u_2 + u_1\}$ дорівнює ймовірності хоча б одного успіху у відповідній серії незалежних випробувань. Для першої серії випробувань успіхом вважається виникнення однієї з k подій

$$\{u_2 + u_1 \leqslant t_{1(j)} < u_3 + u_2 + u_1\},\ j = \overline{1,k},\ j \neq j_1, j_2;$$
$$\{u_2 + u_1 \leqslant t_{2(j_m)} < u_3 + u_2 + u_1\},\ m = 1, 2,$$

а для другої серії – виникнення однієї з $(k-1)$ подій

$$\{u_2 + u_1 \leqslant t_{1(j)} < u_3 + u_2 + u_1\},\ j = \overline{1,k},\ j \neq j_1.$$

Далі, як і у випадку $m = 2$, можна показати, що

$$\lim_{k\to\infty} P_{3,11}^{(k)} = 1 - e^{-(\lambda u_3 + \sum\limits_{m=1}^{2} \Delta F_{2(j_m)}(u_2+u_1, u_3+u_2+u_1))};$$
$$\lim_{k\to\infty} P_{3,12}^{(k)} = 1 - e^{-\lambda u_3}.$$

Тепер перехід до границі у рівності (12) при $k \to \infty$ з врахуванням другої з умов (5) та рівності $\sum\limits_{j_1,j_2=1}^{k} p_{j_1 j_2}^{(k)} + \sum\limits_{j_1=1}^{k} p_{j_1 j_1}^{(k)} = 1$ приводить до співвідношення (10) при $m = 3$. Теорему доведено.

2. Рекурентні потоки зі скінченним і нескінченним запізненням. Якщо умови (5) виконуються для послідовності граничних функцій $\varphi_i(x) = e^{-\lambda x}$, $i \geqslant 2$, то одержимо граничний потік з обмеженою післядією, в якому

$$F_{0,1}(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad F_{i-1,i}(x) = 1 - e^{-2\lambda x}, \quad i \geqslant 2,$$

тобто рекурентний потік із запізненням і показниковими розподілами інтервалів між сусідніми подіями. Якщо ж для фіксованого цілого $m \geqslant 2$

$$\varphi_2(x) = e^{-\lambda x}, \quad \varphi_3(x) = e^{-2\lambda x}, \quad \varphi_4(x) = e^{-3\lambda x}, \ldots,$$
$$\varphi_{m-1}(x) = e^{-(m-2)\lambda x}, \quad \varphi_s(x) = e^{-(m-1)\lambda x},\ s \geqslant m,$$

то функції розподілу інтервалів часу між сусідніми подіями в граничному потоці матимуть вигляд

$$F_{0,1}(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad F_{1,2}(x) = 1 - e^{-2\lambda x}, \quad F_{2,3}(x) = 1 - e^{-3\lambda x}, \ldots,$$
$$F_{m-2,m-1}(x) = 1 - e^{-(m-1)\lambda x}, \quad F_{s-1,s}(x) = 1 - e^{-m\lambda x},\ s \geqslant m.$$

Такий потік називатимемо рекурентним з $(m-1)$-разовим запізненням. Якщо в граничному потоці $F_{i-1,i}(x) = 1 - e^{-i\lambda x}$ для всіх $i = 1, 2, 3, \ldots$, то такий потік природно назвати рекурентним з нескінченним запізненням $(m = \infty)$.

Позначимо через $P_k^{(m)}(\alpha, \beta)$ $(0 \leqslant \alpha < \beta,\ k \geqslant 0$ – ціле) ймовірність того, що на проміжку часу (α, β) настане k подій потоку з $(m-1)$-разовим запізненням і нехай $\Lambda_m(t)$ – математичне сподівання числа подій цього потоку на проміжку часу $(0, t)$ (ведуча функція потоку).

Підрахунки свідчать, що для рекурентного потоку зі скінченним запізненням $(2 \leqslant m < +\infty)$

$$P_k^{(m)}(0,t) = (1-e^{-\lambda t})^k e^{-\lambda t}, \quad k = \overline{0, m-1};$$

$$P_k^{(m)}(0,t) = m^{k-m+1} e^{-m\lambda t} \Big\{ \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{s-1} \frac{C_{m-1}^{m-s}}{(m-s)^{k-m+1}} \times$$

$$\times \sum_{r=k-m+1}^{\infty} \frac{((m-s)\lambda t)^r}{r!} + (-1)^{m-1} \frac{(\lambda t)^{k-m+1}}{(k-m+1)!} \Big\}, \quad k = m, m+1, \ldots;$$

$$\Lambda_m(t) = m\lambda t + \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{m-s} (m-s) \Big(\frac{m}{m-s+1} \Big)^2 C_{m-1}^s \big(1 - e^{-(m-s+1)\lambda t}\big) +$$

$$+ e^{\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) \big((m-1)(1-e^{-\lambda t})^m - m(1-e^{-\lambda t})^{m-1} + 1 \big),$$

$$P_0^{(m)}(\alpha,\beta) = \frac{e^{-\lambda\beta} + (1 - e^{-\lambda(\beta-\alpha)})(1-e^{-\lambda\alpha})^m e^{-m\lambda(\beta-\alpha)}}{1 - e^{-\lambda(\beta-\alpha)} + e^{-\lambda\beta}},$$

$$P_1^{(m)}(\alpha,\beta) = m\lambda(\beta-\alpha) e^{-m\lambda(\beta-\alpha)} (1-e^{-\lambda\alpha})^{m-1} + \frac{e^{-\lambda\beta}(1-e^{-\lambda(\beta-\alpha)})}{\big(1 - e^{-\lambda(\beta-\alpha)} + e^{-\lambda\beta}\big)^2} \times$$

$$\times \big(1 - m(1-e^{-\lambda\alpha})^{m-1} e^{-(m-1)\lambda(\beta-\alpha)} + (m-1)(1-e^{-\lambda\alpha})^m e^{-m\lambda(\beta-\alpha)} \big),$$

зокрема

$$P_k^{(2)}(0,t) = 2^{k-1} \Big(1 - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t} \Big) e^{-\lambda t}, \quad k = 2, 3, \ldots;$$

$$\Lambda_2(t) = 2\lambda t + e^{-\lambda t} - 1, \quad \Lambda_3(t) = 3\lambda t + 3e^{-\lambda t} - \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} - \frac{5}{2},$$

$$\Lambda_4(t) = 4\lambda t + 6e^{-\lambda t} - 2e^{-2\lambda t} + \frac{1}{3} e^{-3\lambda t} - \frac{13}{3}.$$

Для потоку з нескінченним запізненням відповідні ймовірнісні характеристики мають вигляд

$$P_k^{(\infty)}(0,t) = (1-e^{-\lambda t})^k e^{-\lambda t}, \ k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\Lambda_\infty(t) = e^{\lambda t} - 1; \quad P_k^{(\infty)}(\alpha,\beta) = \frac{\big(\Lambda_\infty(\beta) - \Lambda_\infty(\alpha)\big)^k}{\big(\Lambda_\infty(\beta) - \Lambda_\infty(\alpha) + 1\big)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\big(e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\alpha}\big)^k}{\big(e^{\lambda\beta} - e^{\lambda\alpha} + 1\big)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Оскільки

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_0^{(m)}(t, t+\Delta t) - P_1^{(m)}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - P_0^{(\infty)}(t, t+\Delta t) - P_1^{(\infty)}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = 0,$$

то розглянуті рекурентні потоки з запізненням ординарні з параметрами потоків, які дорівнюють

$$\lambda_m(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1^{(m)}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = \lambda e^{\lambda t}(1 - (1 - e^{-\lambda t})^m),$$
$$\lambda_\infty(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_1^{(\infty)}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = \lambda e^{\lambda t}.$$

1. *Хинчин А. Я.* Математические методы теории массового обслуживания// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1955. – Т. 49. – С. 3-122.
2. *Ососков Г. А.* Одна предельная теорема для потоков однородных событий// Теория вероятностей и ее применения. – 1956. – Т. 1. – Вып. 2. – С. 274-282.
3. *Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания. – М., 1982.
4. *Григелионис Б.* О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому// Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – Т. 8. – Вып. 2. – С. 189-194.
5. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М., 1969.
6. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – М., 2001.

ABOUT THE CONVERGENCE OF A SUM OF INDEPENDENT FLOWS OF HOMOGENEOUS EVENTS TO A NONSTACIONARY FLOW WITH BOUNDED PERSISTENCE

Yuriy Zhernovyi

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Conditions of convergence of a sum of independent flows of homogeneous random events to a nonstationary flow with bounded persistence and exponential time distribution to the appearance of the first event are obtained. Probability characteristics of recurrent flows with finite and infinite delay, wich are special cases of obtained limit flows class, are calculated.

Key words: flow of random events, summary flow, limit flow, flow with bounded persistence, recurrent flow with delay.

Стаття надійшла до редколегії 03.04.2002

Прийнята до друку 02.10.2003