ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.48–59

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.48–59

УДК 517.95

ОДНОЧАСНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ДВОХ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ У СТАРШОМУ КОЕФІЦІЄНТІ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Микола ІВАНЧОВ, Неля ПАБИРІВСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

За допомогою теореми Шаудера з'ясовано умови існування розв'язку оберненої задачі визначення старшого коефіцієнта у вигляді лінійної за просторовою змінною функції з двома невідомими параметрами, які залежать від часу. Окремо визначено умови єдиності розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: обернена задача, старший коефіцієнт, теорема Шаудера, параболічне рівняння, умови існування та єдиності розв'язку.

Аналізуючи наявні результати в обернених задачах для параболічних рівнянь з невідомими старшими коефіцієнтами, можна зазначити, що питання повного визначення старшого коефіцієнта, тобто коефіцієнта, що залежить від усіх незалежних змінних, залишається відкритим. Певне вирішення цієї проблеми запропонували в [1]. Старший коефіцієнт шукали у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежала від просторової змінної, інша – від часу, причому залежність від x була відома. В праці [2] розглянуто можливість визначення обидвох множників у старшому коефіцієнті $a_0(x)$ і $a_1(t)$.

Мета нашої праці – вивчити обернену задачу визначення старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні, який має вигляд лінійної за змінною x функції з двома невідомими параметрами, які залежать від часу, коли одна з умов перевизначення інтегральна. Випадок класичних умов перевизначення досліджено в [3].

В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = (a(t)x + b(t))u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомими коефіцієнтами $a(t)$ і $b(t)$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h, \tag{2}$$

крайовими умовами та умовами перевизначення

$$u_x(0,t) = \nu_1(t), \quad u_x(h,t) = \nu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad \int\limits_0^h u(x,t)dx=\mu_2(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4}$$

Під розв'язком задачі (1)–(4) розуміємо трійку функцій $(a(t), b(t), u(x,t))$ з класу $H^{\gamma/2}[0,T]\times H^{\gamma/2}[0,T]\times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_T), 0<\gamma<1$, $b(t)>0$, $a(t)h+b(t)>0$, $t\in[0,T]$, які задовольняють рівняння (1) та умови (2)–(4).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\varphi\in H^{2+\gamma}[0,h]$, ν_i, $\mu_i\in H^{1+\gamma/2}[0,T]$, $i=1,2$, $f\in H^{1+\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_T)$;

2) $\mu_1'(t)-f(0,t)>0, \mu_2'(t)-\int\limits_0^h f(x,t)dx>0, \nu_2(t)-\nu_1(t)\geqslant 0, t\in[0,T], \varphi''(x)>0, x\in[0,h]$;

3) $\mu_1(0)=\varphi(0), \mu_2(0)=\int\limits_0^h\varphi(x)dx, \nu_1(0)=\varphi'(0), \nu_2(0)=\varphi'(h)$.

Тоді існує розв'язок задачі (1)–(4) при $x\in[0,h], t\in[0,t_0]$, *де число* $t_0, 0<t_0\leqslant T$ *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Припускаючи, що $\big(a(t), b(t), u(x,t)\big)$ – розв'язок задачі (1)–(4), приймаючи в рівнянні (1) $x=0$ і враховуючи першу умову з (4), прийдемо до співвідношення

$$\mu_1'(t)=b(t)u_{xx}(0,t)+f(0,t). \tag{5}$$

Використовуючи другу умову з (4), проінтегруємо рівняння (1) за x у межах від 0 до h

$$\mu_2'(t)=a(t)(h\nu_2(t)+u(0,t)-u(h,t))+b(t)(\nu_2(t)-\nu_1(t))+\int\limits_0^h f(x,t)dx. \tag{6}$$

Для знаходження розв'язку задачі (1)-(3) подамо рівняння (1) у вигляді

$$u_t=(a(t)y+b(t))u_{xx}+(x-y)a(t)u_{xx}+f(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{7}$$

де y – довільна фіксована точка з проміжку $[0,h]$.

Функція Гріна другої крайової задачі для рівняння теплопровідності $u_t=(a(t)y+b(t))u_{xx}$ має вигляд

$$G_2^y(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Q(y,t,\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)}\right)\right), \tag{8}$$

де

$$Q(y,t,\tau)=y\int\limits_\tau^t a(\sigma)d\sigma+\int\limits_\tau^t b(\sigma)d\sigma=y(\alpha(t)-\alpha(\tau))+\beta(t)-\beta(\tau),$$

$$\alpha(t) = \int_0^t a(\sigma)d\sigma, \quad \beta(t) = \int_0^t b(\sigma)d\sigma.$$

Використовуючи функцію Гріна (8), задачу (7), (2), (3) зведемо до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h (\xi - y)a(\tau)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_2^y(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{9}$$

де

$$u_0(x,t) = \int_0^h \varphi(\xi)G_2^y(x,t,\xi,0)d\xi + \int_0^t \int_0^h f(\xi,\tau)G_2^y(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau -$$
$$- \int_0^t \nu_1(\tau)(a(\tau)y + b(\tau))G_2^y(x,t,0,\tau)d\tau + \int_0^t \nu_2(\tau)(a(\tau)y + b(\tau)) \times$$
$$\times G_2^y(x,t,h,\tau)d\tau. \tag{10}$$

Продиференціюємо (9) двічі за x

$$u_{xx}(x,t) = u_{0xx}(x,t) + \int_0^t \int_0^h (\xi - x)a(\tau)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_{2xx}^y(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{11}$$

де похідна $u_{0xx}(x,t)$ має вигляд [6]

$$u_{0xx}(x,t) = \int_0^h \varphi''(\xi)G_2^x(x,t,\xi,0)d\xi + \int_0^t \int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}^x(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau -$$
$$- \int_0^t \nu_1'(\tau)G_2^x(x,t,0,\tau)d\tau + \int_0^t \nu_2'(\tau)G_2^x(x,t,h,\tau)d\tau. \tag{12}$$

Позначимо $u_{xx}(x,t) \equiv w(x,t)$. Прийнявши в (9) та (11) $y = x$, зведемо задачу (1)-(3) знаходження функції $u(x,t)$ до розв'язання такої системи рівнянь стосовно $u(x,t)$ та $w(x,t)$:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^h (\xi - y)a(\tau)w(\xi,\tau)G_2^x(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{13}$$

$$w(x,t) = u_{0xx}(x,t) + \int_0^t \int_0^h (\xi - x)a(\tau)w(\xi,\tau)G_{2xx}^y(x,t,\xi,\tau)|_{y=x}d\xi d\tau. \tag{14}$$

Покажемо, що при виконанні умов теореми функції $a(t)$ та $b(t)$ додатні на деякому проміжку $[0, t_1]$, а рівності (6), (5) зводяться до вигляду

$$a(t) = \frac{\mu_2'(t) - \int\limits_0^h f(x,t)dx + b(t)(\nu_2(t) - \nu_1(t))}{h\nu_2(t) + u(0,t) - u(h,t)}, \tag{15}$$

$$b(t) = \frac{\mu_1'(t) - f(0,t)}{w(0,t)}. \tag{16}$$

З умови 2 теореми 1 випливає додатність першого доданка правої частини рівності (12). Тоді існує таке t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^h \varphi''(\xi)G_2^x(x,t,\xi,0)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}^x(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t \nu_1'(\tau)G_2^x(x,t,0,\tau)d\tau + \int\limits_0^t \nu_2'(\tau)G_2^x(x,t,h,\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h (\xi - x)a(\tau)u_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_{2xx}^y(x,t,\xi,\tau)|_{y=x}d\xi d\tau \geqslant 0, \quad t \in [0,t_1], \quad x \in [0,h].$$

Звідси

$$w(x,t) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^h \varphi''(\xi)G_2^x(x,t,\xi,0)d\xi \geqslant \frac{1}{2}\min_{[0,h]}\varphi''(x) = C_1 > 0, t \in [0,t_1], x \in [0,h]. \tag{17}$$

Розглянемо знаменник у рівнянні (15). Зауваживши, що

$$h\nu_2(t) + u(0,t) - u(h,t) = \int\limits_0^h xu_{xx}(x,t)dx, \tag{18}$$

використовуючи оцінку (17), отримаємо

$$h\nu_2(t) + u(0,t) - u(h,t) \geqslant C_1\frac{h^2}{2} > 0, \quad t \in [0,t_1]. \tag{19}$$

З (17), (19) випливає, що знаменники в рівняннях (15), (16) відмінні від нуля при $t \in [0,t_1]$, а отже, співвідношення (6), (5) еквівалентні (15), (16). Додатність чисельників у рівняннях (15), (16) випливає з умови 2 теореми 1.

До системи рівнянь (13)–(16) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку визначимо апріорні оцінки розв'язків цієї системи. Зі співвідношень (15), (16), (17), (19) легко бачити, що

$$b(t) \leqslant B_1, \quad a(t) \leqslant A_1, \quad t \in [0,t_1], \tag{20}$$

де

$$B_1 = \frac{\max\limits_{[0,T]}({\mu_1}'(t) - f(0,t))}{C_1},$$

$$A_1 = \frac{2\max\limits_{[0,T]}(\mu_2'(t) - \int\limits_0^h f(x,t)dx) + 2B_1 \max\limits_{[0,T]}(\nu_2(t) - \nu_1(t))}{C_1 h^2}.$$

Для оцінки розв'язків системи (13)–(16) знизу спочатку оцінимо функцію $w(x,t)$ зверху. Використовуючи явний вигляд функції Гріна, з (12) аналогічно до [6] отримаємо

$$u_{0xx}(x,t) \leqslant C_2 + C_3 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}}. \tag{21}$$

З (8) знайдемо другу похідну за x функції Гріна

$$G^y_{2xx}(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}Q^{3/2}(y,t,\tau)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{(x-\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)} \right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)} \right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{(x+\xi+2nh)^2}{4Q(y,t,\tau)} \right) \right). \tag{22}$$

Позначаючи

$$U(t) = \max_{x\in[0,h]} |w(x,t)| \tag{23}$$

і враховуючи (20), (22) та нерівності

$$|x-\xi| \leqslant |x-\xi+2nh|, \quad |x-\xi| \leqslant |x+\xi+2nh|, \quad n \in Z,$$

оцінимо інтеграл

$$I = \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^h (x-\xi)a(\tau)w(\xi,\tau)G^y_{2xx}(x,t,\xi,\tau)|_{y=x} d\xi d\tau \right| \leqslant \frac{A_1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{U(\tau)d\tau}{Q^{3/2}(x,t,\tau)} \times$$
$$\times \int\limits_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4Q(x,t,\tau)} \right) \left(\frac{|x-\xi+2nh|}{2} + \frac{|x-\xi+2nh|^3}{4Q(x,t,\tau)} \right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4Q(x,t,\tau)} \right) \left(\frac{|x+\xi+2nh|}{2} + \frac{|x+\xi+2nh|^3}{4Q(x,t,\tau)} \right) \right) d\xi.$$

Розбиваючи цей інтеграл на суму двох інтегралів і роблячи відповідно заміни змінних $\sigma = \frac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{Q(x,t,\tau)}}$ та $\sigma = \frac{x+\xi+2nh}{2\sqrt{Q(x,t,\tau)}}$, одержимо

$$I \leqslant \frac{2A_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{U(\tau)}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{x+(2n-1)h}{2\sqrt{Q(x,t,\tau)}}}^{\frac{x+(2n+1)h}{2\sqrt{Q(x,t,\tau)}}} \exp(-\sigma^2)\left(\frac{|\sigma|}{2}+|\sigma|^3\right) d\sigma d\tau =$$

$$= \frac{2A_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{U(\tau)}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\sigma^2)\left(\frac{|\sigma|}{2}+|\sigma|^3\right) d\sigma d\tau \leqslant C_4 \int\limits_0^t \frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{Q(x,t,\tau)}}. \quad (24)$$

Використовуючи позначення (23) і (21), (22) та (24), з (14) матимемо

$$U(t) \leqslant C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{q(t,\tau)}} + C_7 \int\limits_0^t \frac{U(\tau)d\tau}{\sqrt{q(t,\tau)}}, \quad (25)$$

де $q(t,\tau) = \min\limits_{x\in[0,h]} Q(x,t,\tau)$. Оскільки функція $Q(x,t,\tau)$ лінійно залежить від x, то $q(t,\tau) = \min\{Q(0,t,\tau), Q(h,t,\tau)\}$. Припустимо, що

$$q(t,\tau) = Q(0,t,\tau) = \beta(t) - \beta(\tau). \quad (26)$$

З рівняння (16) отримаємо

$$1 = \frac{b(t)w(0,t)}{\mu_1'(t) - f(0,t)} \leqslant \frac{b(t)U(t)}{\min\limits_{[0,T]}(\mu_1'(t) - f(0,t))} = \frac{b(t)U(t)}{C_8}. \quad (27)$$

Тоді з (25) маємо

$$U(t) \leqslant C_5 + \frac{C_6}{C_8} \int\limits_0^t \frac{b(\tau)U(\tau)}{\sqrt{\beta(t)-\beta(\tau)}} d\tau + \frac{C_7}{C_8} \int\limits_0^t \frac{b(\tau)U^2(\tau)}{\sqrt{\beta(t)-\beta(\tau)}} d\tau$$

або

$$U(t) + \frac{1}{2} \leqslant C_5 + \frac{1}{2} + C_9 \int\limits_0^t \frac{b(\tau)(U(\tau)+1/2)^2}{\sqrt{\beta(t)-\beta(\tau)}} d\tau. \quad (28)$$

Нерівність, аналогічна до нерівності (28), досліджена в [7], звідки приходимо до оцінки

$$U(t) \leqslant C_{10}, \quad t \in [0, t_2], \quad (29)$$

де $t_2, 0 < t_2 \leqslant T$ визначається вихідними даними задачі.

Наявність (29) дає змогу з (16) та (15), врахувавши (18), одержати оцінки

$$b(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]}(\mu_1'(t) - f(0,t))}{C_{10}} \equiv B_0 > 0, \quad (30)$$

$$a(t) \geqslant \frac{2\min\limits_{[0,T]}(\mu_2'(t) - \int\limits_0^h f(x,t)dx) + 2B_0 \min\limits_{[0,T]}(\nu_2(t) - \nu_1(t))}{C_{10}h^2} \equiv A_0 > 0, t \in [0, t_0], (31)$$

де $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$.

Тоді з (13) легко визначити оцінку

$$|u(x,t)| < C_{11}, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{32}$$

Розглянемо множину $N = \{(a(t), b(t), u(x,t), w(x,t)) \in C[0,t_0] \times C[0,t_0] \times C(\overline{Q}_{t_0}) \times C(\overline{Q}_{t_0}) : A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1,\ B_0 \leqslant b(t) \leqslant B_1,\ |u(x,t)| \leqslant C_{11},\ |w(x,t)| \leqslant C_{10}\}$. Запишемо систему (13)–(16) у такому вигляді:

$$a(t) = P_1(a,b,u,w)(t), \quad b(t) = P_2(a,b,w)(t),$$
$$u(x,t) = P_3(a,b,w)(x,t), \quad w(x,t) = P_4(a,b,w)(x,t).$$

З оцінок (20), (29)–(32) випливає, що оператор $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ переводить множину N в себе і що N задовольняє умови теореми Шаудера. Покажемо, що оператор P цілком неперервний на N. Згідно з теоремою Арцела задамо довільне $\varepsilon > 0$ і визначимо існування такого $\delta > 0$, що

$$|P_i(t_2) - P_i(t_1)| < \varepsilon, \quad i = 1,2, \quad |P_j(x_2,t_2) - P_j(x_1,t_1)| < \varepsilon, \quad j = 3,4,$$
$$\forall (a(t), b(t), u(x,t), w(x,t)) \in N, \tag{33}$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta, |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in \overline{Q}_{t_0}$ – довільні точки. Оцінювання частини виразів, які входять у (33), виконуємо аналогічно до [8]. Проведемо оцінювання виразів, що містять другу похідну від функції Гріна. Зокрема, оцінимо вираз

$$K_0 = \Big| \int_0^{t_2} \int_0^h a(\tau)\xi w(\xi,\tau) G^x_{2xx}(0,t_2,\xi,\tau) d\xi d\tau -$$
$$- \int_0^{t_1} \int_0^h a(\tau)\xi w(\xi,\tau) G^x_{2xx}(0,t_1,\xi,\tau) d\xi d\tau \Big|.$$

Оцінювання цього виразу виконуємо двома прийомами.

Передусім визначимо існування такого $t_{01} > 0$, що при $0 \leqslant t \leqslant t_{01}$ правильна оцінка

$$J = \Big| \int_0^{t} \int_0^h a(\tau)\xi w(\xi,\tau) G^x_{2xx}(0,t,\xi,\tau) d\xi d\tau \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

незалежно від $a(t), b(t)$ та $w(x,t)$ з N. Використовуючи оцінки (20), (24), (29), (30), матимемо

$$J \leqslant C_{12}\sqrt{t}.$$

Вибираючи t_{01} настільки малим, щоб $C_{12}\sqrt{t_{01}} < \frac{\varepsilon}{2}$, отримаємо $K_0 < \varepsilon$ при $t_i \in [0, t_{01}], i = 1,2$. Якщо ж $t_i > t_{01}, i = 1,2$, і $t_2 > t_1$, то K_0 подамо у вигляді

$$K_0 = \Bigg| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\xi - 2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_2,\tau)} - \frac{1}{Q^{3/2}(0,t_2,\tau)} \right) a(\tau)\xi \times$$

$$\times w(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4Q(0,t_2,\tau)}\right)d\xi d\tau+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a(\tau)\xi\times$$

$$\times w(\xi,\tau)\left(\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_2,\tau)}-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_2,\tau)}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4(Q(0,t_2,\tau))}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_1,\tau)}-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_1,\tau))}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4Q(0,t_1,\tau)}\right)\right)d\xi d\tau\Bigg|. \tag{34}$$

Завдяки оцінкам (20), (29) з (34) маємо

$$K_1=\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^{h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a(\tau)\xi w(\xi,\tau)\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_2,\tau))}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_2,\tau)}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4Q(0,t_2,\tau))}\right)d\xi d\tau\right|\leqslant\frac{AC_{10}}{2\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_0^{h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\xi-2nh|\left|\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_2,\tau)}-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_2,\tau)}\right|\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4Q(0,t_2,\tau)}\right)d\xi d\tau.$$

Зробимо заміну $\sigma=\frac{\xi-2nh}{2\sqrt{Q(0,t_2,\tau)}}$. Тоді

$$K_1\leqslant\frac{2AC_{10}}{B_0\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\sqrt{t_2-\tau}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\frac{2nh}{2\sqrt{B_1(t_2-\tau)}}}^{\frac{(2n+1)h}{2\sqrt{B_0(t_2-\tau)}}}\exp(-\sigma^2)\left(\frac{|\sigma|}{2}+|\sigma|^3\right)d\sigma.$$

Оскільки останній ряд оцінюється збіжним інтегралом, а отже, обмежений деякою константою, то отримуємо

$$K_1\leqslant C_{13}\sqrt{t_2-t_1}\leqslant C_{13}\sqrt{\delta}=\varepsilon/4, \tag{35}$$

якщо $\delta=\varepsilon^2(16C_{13}^2)^{-1}$.

Використовуючи (20), (29), оцінимо з (34) інтеграл

$$K_2=\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a(\tau)\xi u(\xi,\tau)\left(\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_2,\tau)}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_2,\tau)}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4(Q(0,t_2,\tau))}\right)-\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_1,\tau)}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_1,\tau)}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4Q(0,t_1,\tau)}\right)\right)d\xi d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant AC_{10}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{t_1}\left|\int\limits_0^h\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi\left(\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_2,\tau)}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_2,\tau)}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4(Q(0,t_2,\tau))}\right)-\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2Q^{5/2}(0,t_1,\tau)}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{Q^{3/2}(0,t_1,\tau)}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4Q(0,t_1,\tau)}\right)\right)\right|d\xi d\tau.$$

В останньому співвідношенні зробимо заміну змінних $\sigma = Q(0,t_1,\tau)$, враховуючи, що $Q(0,t,\tau) = \beta(t) - \beta(\tau)$ та

$$Q(0,t_2,\tau) = \beta(t_2) - \beta(\tau) = \beta(t_2) - \beta(t_1) + \beta(t_1) - \beta(\tau) = Q(0,t_2,t_1) + \sigma.$$

У результаті отримаємо

$$K_2 \leqslant \frac{AC_{10}}{B_0\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{B_1t_1}d\sigma\int\limits_0^h\xi\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2(Q(0,t_2,t_1)+\sigma)^{5/2}}-\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(Q(0,t_2,t_1)+\sigma)^{3/2}}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4(Q(0,t_2,t_1)+\sigma)}\right)-\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{2\sigma^{5/2}}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{\sigma^{3/2}}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4\sigma}\right)\right)\right|d\xi.$$

За міркуваннями, які проводили оцінюючи інтеграл J на проміжку $[0,t_{01}]$, визначаємо існування досить малого $t_{02}, 0 < t_{02} \leqslant t_0$ такого, що $K_2 \leqslant \varepsilon/3$ при $0 < B_1t_1 \leqslant t_{02}$. При $B_1t_1 \geqslant t_{02}$ інтеграл в останньому співвідношенні розіб'ємо на суму інтегралів: один – у межах від 0 до t_{02}, інший – від t_{02} до t_1. За вибором t_{02} перший інтеграл K_3 менший $\varepsilon/3$, а другий інтеграл K_4 подамо у вигляді

$$K_4 = \frac{AC_{10}}{B_0\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_{02}}^{B_1t_1}d\sigma\left|\int\limits_0^h\xi d\xi\int\limits_\sigma^{Q(0,t_2,t_1)+\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\frac{(\xi-2nh)^2}{z^{5/2}}-\frac{1}{z^{3/2}}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4z}\right)\right)dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{AC_{10}}{B_0\sqrt{\pi}}\int\limits_{t_{02}}^{B_1t_1}d\sigma\int\limits_0^h\xi d\xi\int\limits_\sigma^{Q(0,t_2,t_1)+\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{3}{2z^{5/2}}-\frac{11(\xi-2nh)^2}{4z^{7/2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\xi-2nh)^4}{4z^{9/2}}\right)\exp\left(-\frac{(\xi-2nh)^2}{4z}\right)\right|dz. \tag{36}$$

У зв'язку з тим, що в (36) $z \geqslant t_{02} > 0$, підінтегральна функція в (36) є обмеженою, тому в результаті отримуємо

$$K_2 < \varepsilon/3 + C_{14}|t_2 - t_1|,$$

що разом з (35) дає оцінку $K_0 < \varepsilon$, якщо тільки $|t_2 - t_1| < \delta$ з деяким δ, що не залежить від $a(t), b(t)$ та $w(x,t)$.

Аналогічний підхід використовуємо при оцінюванні решти виразів з (33). Визначаємо, що оператори $P_i, i = 1, 2$ цілком неперервні. За міркуваннями, які проводили вище та в праці [8], доводимо, що оператори P_3, P_4 також цілком неперервні. Тоді розв'язок системи (13)–(16) існує. З умов теореми випливає, що $a(t), b(t) \in H^{\gamma/2}[0, t_0], w(x,t) \in H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$. Тоді $u(x,t) \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q}_{t_0})$, і ми отримуємо роз'язок задачі (1)-(4), що визначений при $t \in [0, t_0]$, де число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, визначається вихідними даними задачі. Теорему доведено.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(4).

Теорема 2. *Припустимо,що виконуються умови*

$$\mu_1'(t) - f(0,t) > 0, \quad \mu_2'(t) - \int_0^h f(x,t)dx > 0, \quad \nu_2(t) - \nu_1(t) \geqslant 0, \quad t \in [0,T]. \tag{37}$$

Тоді розв'язок задачі (1)-(4) єдиний при $x \in [0,h], t \in [0,T]$.

Доведення. Нехай $\big(a_i(t), b_i(t), u_i(x,t)\big), i = 1, 2,$ – два розв'язки задачі (1)-(4). Для їхньої різниці $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t), \quad l(t) = a_1(t) - a_2(t), \quad m(t) = b_1(t) - b_2(t)$ отримуємо задачу

$$v_t = (a_1(t)x + b_1(t))v_{xx} + (l(t)x + m(t))u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{38}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{39}$$

$$v_x(0,t) = v_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{40}$$

$$v(0,t) = 0, \quad \int_0^h v(x,t)dx = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{41}$$

Позначаючи через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (38)–(40), подамо ії розв'язок у вигляді

$$v(x,t) = \int_0^t \int_0^h \big(l(\tau)\xi + m(\tau))u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\big)G(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Приймаючи в рівнянні (38) $x = 0$ і враховуючи першу умову з (41) , прийдемо до співвідношення

$$m(t)u_{2xx}(0,t) = -b_1(t)\int_0^t d\tau \int_0^h \big(l(\tau)\xi + m(\tau))u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\big)G_{xx}(0,t,\xi,\tau)d\xi. \tag{42}$$

Використовуючи (40) та другу умову з (41), проінтегруємо рівняння (38) за x у межах від 0 до h

$$l(t)(hu_{2x}(h,t)+u_2(0,t)-u_2(h,t))+m(t)(u_{2x}(h,t)-u_{2x}(0,t))=$$
$$=a_1(t)\int_0^t\int_0^h\big(l(\tau)\xi+m(\tau))u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\big)G(h,t,\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{43}$$

Враховуючи умови теореми 2, а також те, що $u_2(x,t)$ є розв'язком задачі (1)–(4), знаходимо

$$u_{2xx}(0,t)(hu_{2x}(h,t)+u_2(0,t)-u_2(h,t))=\frac{1}{a_2(t)b_2(t)}\big(\mu_1'(t)-f(0,t)\big)\times$$
$$\times\big(\mu_2'(t)-\int_0^h f(x,t)dx+b_2(t)(\nu_2(t)-\nu_1(t))\big)\neq 0,\quad t\in[0,T].$$

Отже, визначник системи (42), (43) відмінний від нуля, тому систему рівнянь (42), (43) можна звести до системи однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду

$$l(t)=\int_0^t\big(R_{11}(t,\tau)l(\tau)+R_{12}(t,\tau)m(\tau)\big)d\tau,$$
$$m(t)=\int_0^t\big(R_{21}(t,\tau)l(\tau)+R_{22}(t,\tau)m(\tau)\big)d\tau,\quad t\in[0,T], \tag{44}$$

з ядрами $R_{ij}(t,\tau)$, $\quad i,j=1,2$, що мають інтегровні особливості [4]. Отже, розв'язок $(l(t),m(t))$ системи (44) тривіальний. Теорема доведена.

---

1. *Jones B. F.* Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations// Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – Vol. 16. – P. 33-44.
2. *Іванчов М. І.* Обернена задача одночасного визначення двох коефіцієнтів параболічного рівняння// Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52. – N 3. – С. 329-336.
3. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння// Вісник нац. ун-ту. "Львівська політехніка" Прикл. мат. – 2000. – Вип. 407. – С. 211-215.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М., 1977.
5. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142-149.
6. *Пабирівська Н. В.* Визначення двох невідомих коефіцієнтів в обернених задачах для параболічного рівняння// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 108-117.

7. *Иванчов Н. И.,Пабыривска Н. В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении// Сиб. мат. журн. – 2002. – Т. 43. – N 2. – С. 406-413.

8. *Иванчов Н. И.* Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении// Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39. – N 3. – С. 539-550.

SIMULTANEOUS DETERMINATION OF TWO PARAMETERS IN A MAJOR COEFFICIENT OF PARABOLIC EQUATION

Mykola Ivanchov, Nelya Pabyrivska

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The application of Shauder fixed-point theorem permitted to establish existence conditions of the solution for inverse problem for parabolic equation of indentification of major coefficient at the form of linear function on a space variable with two unknown parameters depending on the time variable. Indepedenly of a question of existence we establish the uniqueness conditions for solution of this problem.

Key words: inverse problem, major coefficient, Shauder fixed-point theorem, parabolic equation, conditions of existence and uniqueness for solution.

Стаття надійшла до редколегії 01.11.2002
Прийнята до друку 02.10.2003