ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.67–79

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.67–79

УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Марія КОЛІНЬКО [1], Сергій ЛАВРЕНЮК [1], Петро ПУКАЧ [2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

[2] *Національний університет "Львівська політехніка", вул. Бандери, 12 79013 Львів, Україна*

Досліджено задачу без початкових умов для нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку в обмеженій за просторовими змінними і необмеженій за часовою змінною області. Розглянуте рівняння є певним узагальненням рівняння

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-2}u_t = f(x,t), \quad p > 2.$$

Одержано умови існування єдиного розв'язку задачі без обмежень на p і розмірність простору.

Ключові слова: гіперболічне рівняння другого порядку, задача без початкових умов.

Нехай $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, де $T < +\infty$, а Ω обмежена область в $\mathbf{R}^n$. Під задачею Фур'є для деякого еволюційного рівняння розуміють таку задачу: в області Q_T у певному сенсі виконується рівняння, на межі $S_T = \partial\Omega \times (-\infty, T)$ – деякі крайові умови, а замість початкових умов задають поведінку розв'язку, а в разі потреби і його похідних за часовою змінною при $t \to -\infty$. Вперше таку задачу для рівняння теплопровідності дослідив А. М. Тихонов [1]. У праці [2] для одного нелінійного параболічного рівняння вперше було виявлено такий ефект: коректність задачі не залежить від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Аналогічний результат для напівлінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку одержано в праці [3]. Інші класи коректності для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними і для напівлінійних гіперболічних рівнянь другого порядку побудовані в [4–8].

У цій праці досліджено задачу Фур'є для одного нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку, яке, зокрема, містить рівняння вимушених коливань в середовищі з опором [9, с. 234]. Отримано певні достатні умови існування та єдиності розв'язку в класі функцій, обмежених за часовою змінною.

Нехай Ω – обмежена в $\mathbf{R}^n$ область з кусково - гладкою межею $\partial\Omega$, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0$ в $\mathbf{R}^{n-1}$.

Нехай $T < +\infty$. Приймемо $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (-\infty, T)$, $S_i = (-\infty, T) \times \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Очевидно, $S_T = S_1 \cup S_2$.

Розглядаємо задачу

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + g(x, u_t) = f(x, t) \quad \text{в} \quad Q_T, \tag{1}$$

$$u\big|_{S_1} = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(\nu, x_j)\big|_{S_2} = 0, \tag{2}$$

де ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Припускатимемо, що для коефіцієнтів і вільного члена рівняння (1) виконуються такі умови:

(A): функції $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $\quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\quad i, j = 1, \dots, n$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geqslant a_0 |\eta|^2$, $a_0 = \text{const} > 0$, для довільного вектора $\eta \in \mathbf{R}^n$ і для майже всіх $x \in \Omega$;

(G): функція $g(x, \xi)$ вимірна за x і неперервна за ξ, причому для довільних ξ, $s \in \mathbf{R}$ і майже всіх $x \in \Omega$

$$|g(x, \xi)| \leqslant g_1|\xi|^{p-1}, \quad p > 2, \quad g_1 = \text{const} > 0,$$

$$(g(x, \xi) - g(x, s))(\xi - s) \geqslant g_0|\xi - s|^p, \quad g_0 = \text{const} > 0;$$

(F): $f \in L^{p'}(Q_T)$, $\quad 1/p + 1/p' = 1$, $\quad f \in C((-\infty, T]; L^{p'}(\Omega))$.

Зауважимо, що всюди в цій праці $\Omega_\tau = Q \cap \{t = \tau\}$, $Q_{s_1, s_2} = (s_1, s_2) \times \Omega$ для довільних скінченних $\tau, s_1, s_2 \leqslant T$.

Введемо тепер основні функціональні простори, які використано нижче, та норми в цих просторах

$$H^1_{0,1}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{S_1} = 0\}, \qquad \|u\|_{H^1_{0,1}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$H^1_{0,1}(Q_{\tau,T}) = \{u \in H^1(Q_{\tau,T}) : u|_{S^1_{\tau,T}} = 0\}$, де $S^1_{\tau,T} = \Gamma_1 \times (\tau, T)$, τ – довільне фіксоване число з $(-\infty, T)$, $H^1_{0,1,loc}(\overline{Q}_T) = \{u \in H^1_{0,1}(Q_{\tau,T}) \ \forall \tau \in (-\infty, T)\}$,

$$\|u\|_{H^1_{0,1}(Q_{\tau,T})} = \left(\int_{Q_{\tau,T}} \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dxdt\right)^{1/2},$$

$$L^r_{loc}(\overline{Q}_T) = \{u \in L^r(Q_{\tau,T}) \quad \forall \tau \in (-\infty, T)\}, \quad r \in (1, +\infty).$$

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) назвемо функцію

$$u \in C((-\infty,T];H^1_{0,1}(\Omega)) \cap L^\infty((-\infty,T);H^1_{0,1}(\Omega)),$$

$$u_t \in C((-\infty,T];L^2(\Omega)) \cap L^p(Q_T),$$

яка задовольняє інтегральну рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-u_tv_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + g(x,u_t)v - f(x,t)v\Big]dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{t_2}} u_tvdx - \int\limits_{\Omega_{t_1}} u_tvdx = 0 \tag{3}$$

для довільних $t_1,t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$ та для довільної функції v такої, що

$$v \in L^2_{loc}((-\infty,T];H^1_{0,1}(\Omega)) \cap L^p_{loc}((-\infty,T];L^p(\Omega)), \quad v_t \in L^2_{loc}((-\infty,T];L^2(\Omega)).$$

Зауваження 1. З означення випливає, що для узагальненого розв'язку u задачі (1), (2) виконується умова $\lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_{\Omega_t}|u_t|^2dx = 0$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**G**), (**F**). *Тоді існує узагальнений розв'язок u задачі (1), (2). Якщо, крім того, виконується умова*

$$\lim_{t\to-\infty}\int\limits_{\Omega_t}|\nabla_x u|^2dx = 0,$$

то узагальнений розв'язок задачі (1), (2) єдиний.

Доведення. 1. Існування. Нехай $\{\varphi_k(x)\}$ - база в $H^1_{0,1}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $t_0 < T$ - довільне фіксоване число. Тоді за методом Фаедо-Гальоркіна система функцій $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N C_k^N(t)\varphi_k(x)$, де $N = 1,2,...$, утворює послідовність "наближених" розв'язків задачі (1), (2) з нульовими початковими умовами при $t = t_0$ [9, с. 235], функції $C_k^N(t)$ визначають як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_\Omega \Big[u_{tt}^N\varphi_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^N(\varphi_k)_{x_j} + g(x,u_t^N)\varphi_k - f(x,t)\varphi_k\Big]dx = 0, \tag{4}$$

де $k = 1,...,N$ з такими початковими умовами:

$$C_k^N(t_0) = 0, \qquad C_{kt}^N(t_0) = 0. \tag{5}$$

Підсумуємо (4) за k від 1 до N, помноживши попередньо на $C_{k_t}^N(t)$, проінтегруємо від t_0 до τ, де $t_0 < \tau \leqslant T$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}^N u_{x_j t}^N + g(x, u_t^N) u_t^N - f(x,t) u_t^N\right] dxdt = 0. \tag{6}$$

Перетворимо та оцінимо інтеграли рівності (6). Матимемо

$$I_1 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} u_{tt}^N u_t^N dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^N|^2 dx.$$

Використовуючи **(A)**, одержимо

$$I_2 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}^N u_{x_j t}^N dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}^N u_{x_j}^N dx \geqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left|\nabla u^N\right|^2 dx.$$

Згідно з **(G)**

$$I_3 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} g(x, u_t^N) u_t^N dxdt \geqslant g_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left|u_t^N\right|^p dxdt.$$

Нарешті, з **(F)**

$$I_4 = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f(x,t) u_t^N dxdt \geqslant -C(\delta_0) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |f(x,t)|^{p'} dxdt - \frac{\delta_0}{p} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |u_t^N|^p dxdt,$$

де $\delta_0 > 0$ – довільне число, $C(\delta_0) > 0$.

Тоді з (6), врахувавши оцінки $I_1 - I_4$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u_t^N|^2 + a_0 \left|\nabla u^N\right|^2\right] dx + \left(2g_0 - \frac{2\delta_0}{p}\right) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |u_t^N|^p dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2C(\delta_0) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |f(x,t)|^{p'} dxdt. \tag{7}$$

Виберемо $\delta_0 = (pg_0)/2$. Тоді

$$\|u^N\|_{L^\infty((t_0,T);H_{0,1}^1(\Omega))} \leqslant C_1, \ \ \|u_t^N\|_{L^\infty((t_0,T);L^2(\Omega))} \leqslant C_1, \ \ \|u_t^N\|_{L^p(Q_{t_0,T})} \leqslant C_1, \tag{8}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від N. Крім того, з останньої оцінки (8), врахувавши умову **(G)**, маємо

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left|g(x, u_t^N)\right|^{p'} dxdt \leqslant g_1^{p'} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left|u_t^N\right|^p dxdt \leqslant C_2, \tag{9}$$

стала C_2 не залежить від N.

З оцінок (8), (9) отримаємо існування підпослідовності $\{u^k\} \subset \{u^N\}$ такої, що

$$u^k \to u \quad * - \text{слабко в } L^\infty((t_0,T); H^1_{0,1}(\Omega)),$$

$$u^k_t \to u_t \quad * - \text{слабко в } L^\infty((t_0,T); L^2(\Omega)),$$

$$u^k_t \to u_t \quad \text{слабко в } L^p(Q_{t_0,T}),$$

$$g(\cdot, u^k_t) \to z \quad \text{слабко в } L^{p'}(Q_{t_0,T})$$

при $k \to +\infty$.

Помножимо (4) на $C^N_{kt}(t+\delta)$, підсумуємо за k від 1 до N (δ – довільне додатне число). Маємо

$$\int\limits_\Omega \Big[u^N_{tt}(x,t)u^N_t(x,t+\delta) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u^N_{x_i}(x,t)u^N_{x_jt}(x,t+\delta) +$$

$$+ g(x,u^N_t(x,t))u^N_t(x,t+\delta) - f(x,t)u^N_t(x,t+\delta)\Big]dx = 0. \tag{10}$$

Віднімемо від (10) рівність (6) і приймемо, що $u^N(x,t+\delta) - u^N(x,t) = v^N(x,t)$. Тоді

$$\int\limits_\Omega \Big[u^N_{tt}(x,t)v^N_t(x,t) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u^N_{x_i}(x,t)v^N_{x_jt}(x,t) +$$

$$+ g(x,u^N_t(x,t))v^N_t(x,t) - f(x,t)v^N_t(x,t)\Big]dx = 0. \tag{11}$$

Аналогічно утворимо рівність

$$\int\limits_\Omega \Big[u^N_{tt}(x,t+\delta)v^N_t(x,t) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u^N_{x_i}(x,t+\delta)v^N_{x_jt}(x,t) +$$

$$+ g(x,u^N_t(x,t+\delta))v^N_t(x,t) - f(x,t+\delta)v^N_t(x,t)\Big]dx = 0. \tag{12}$$

Від (12) віднімемо рівність (11) та проінтегруємо отриманий результат від t_0 до τ, $t_0 < \tau < T$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[v^N_{tt}(x,t)v^N_t(x,t) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)v^N_{x_i}(x,t)v^N_{x_jt}(x,t) + (g(x,u^N_t(x,t+\delta)) -$$

$$- g(x,u^N_t(x,t)))v^N_t(x,t) - (f(x,t+\delta) - f(x,t))v^N_t(x,t)\Big]dxdt = 0. \tag{13}$$

Оцінимо інтеграли рівності (13). Враховуючи умови **(A)**, **(G)**, **(F)**, отримаємо

$$I_5 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} v_{tt}^N v_t^N dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v_t^N|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}} |v_t^N|^2 dx,$$

$$I_6 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) v_{x_i}^N v_{x_j t}^N dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) v_{x_i}^N v_{x_j}^N dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) v_{x_i}^N v_{x_j}^N dx,$$

$$I_7 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[g(x, u_t^N(x, t+\delta)) - g(x, u_t^N(x,t))\Big] v_t^N dxdt \geqslant$$

$$\geqslant g_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left|v_t^N\right|^p dxdt,$$

$$I_8 = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (f(x, t+\delta) - f(x,t)) v_t^N dxdt \leqslant \frac{\delta_0}{p} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left|v_t^N\right|^p dxdt +$$

$$+ C_3(\delta_0) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |f(x, t+\delta) - f(x,t)|^{p'} dxdt,$$

де $C_3(\delta_0) > 0$ – стала, яка залежить лише від δ_0.

Врахувавши оцінки інтегралів $I_5 - I_8$, одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|v_t^N|^2 + a_0 \left|\nabla v^N\right|^2\right] dx + \left(2g_0 - \frac{2\delta_0}{p}\right) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |v_t^N|^p dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2C_3(\delta_0) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |f(x, t+\delta) - f(x,t)|^{p'} dxdt + \int\limits_{\Omega_{t_0}} \left(|v_t^N|^2 + a_1 |\nabla v^N|^2\right) dx, \qquad (14)$$

де стала a_1 залежить від функцій a_{ij}.

Зауважимо, що

$$v^N(x, t_0) = u^N(x, t_0+\delta) - u^N(x, t_0) = u^N(x, t_0+\delta),$$

$$v_t^N(x, t_0) = u_t^N(x, t_0+\delta) - u_t^N(x, t_0) = u_t^N(x, t_0+\delta),$$

$$v_{x_i}^N(x, t_0) = u_{x_i}^N(x, t_0+\delta) - u_{x_i}^N(x, t_0) = u_{x_i}^N(x, t_0+\delta)$$

для довільного $i = 1, ..., n$, оскільки виконуються початкові умови (5).

Розглянувши (7) при $\tau = t_0 + \delta$, матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\big|u_t^N(x, t_0 + \delta)\big|^2 + a_0 \sum_{i=1}^{n} \big|u_{x_i}^N(x, t_0 + \delta)\big|^2 \Big] dx \leqslant 2C(\delta_0) \int\limits_{Q_{t_0, t_0+\delta}} |f(x,t)|^{p'}\, dxdt.$$

З останньої оцінки випливає (після вибору достатньо малого $\delta > 0$), що

$$\int\limits_{\Omega} \Big[|u_t^N(x, t_0 + \delta)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N(x, t_0 + \delta)|^2 \Big] dx \leqslant \varepsilon_0, \tag{15}$$

де $\varepsilon_0 > 0$ – довільне як завгодно мале число.

Отже, врахувавши (14), (15), одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega} \Big[|u_t^N(x, t + \delta) - u_t^N(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N(x, t + \delta) - u_{x_i}^N(x,t)|^2 \Big] dx \leqslant \varepsilon$$

для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ при достатньо малому $\delta > 0$. Тому за теоремою Асколі-Арцелла отримаємо, що послідовність u_t^N є одностайно неперервною в просторі $C([t_0; T]; L^2(\Omega))$, а послідовність u^N одностайно неперервна в просторі $C([t_0; T]; H^1_{0,1,w}(\Omega))$, де через $H^1_{0,1,w}(\Omega)$ позначено топологічний простір $H^1_{0,1}(\Omega)$ зі слабкою збіжністю.

Отже, можна вважати, що

$$\int\limits_{\Omega_t} u_t^k v dx \to \int\limits_{\Omega_t} u_t v dx, \qquad \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^k v_{x_i} dx \to \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i} dx \tag{16}$$

рівномірно на $[t_0, T]$ для довільної функції $v \in H^1_{0,1}(\Omega)$.

Використовуючи (4), аналогічно як в [9, с. 26], отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1, t_2}} \Big[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + z v_t - f v \Big] dxdt + \int\limits_{\Omega_{t_2}} u_t v dx - \int\limits_{\Omega_{t_1}} u_t v dx = 0$$

для довільної функції $v \in H^1(Q_{t_0,T}) \cap L^p(Q_{t_0 T}) \cap L^2((t_0, T); H^1_0(\Omega))$ і для довільних $t_1, t_2 \in [t_0, T]$, $t_1 < t_2$.

Крім того, з (5) та (16) випливають умови

$$u(x, t_0) = 0, \qquad u_t(x, t_0) = 0.$$

Подібно до того, як це зроблено в [9, с. 236-239], покажемо, що $z = g(x, u_t)$, тобто

$$g(x, u_t^k) \to g(x, u_t) \text{ слабко в } L^{p'}(Q_{t_0,T}).$$

З (6) випливає, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^k|^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^k u_{x_j}^k\Big]dx+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} g(x,u_t^k)u_t^k dxdt=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} fu_t^k dxdt \tag{17}$$

для довільного $\tau\in(t_0,T]$.

Використовуючи нульові початкові умови, аналогічно як в [9, с. 236], доводимо, що

$$\int\limits_{\Omega_T}\Big[|u_t|^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\Big]dx+2\int\limits_{Q_{t_0,T}}[zu_t-fu_t]dxdt=0. \tag{18}$$

Розглянемо тепер

$$0\leqslant I_k=\int\limits_{Q_{t_0,T}}(g(x,u_t^k)-g(x,v_t))(u_t^k-v_t)dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_{t_0,T}} g(x,u_t^k)u_t^k dxdt-\int\limits_{Q_{t_0,T}} g(x,u_t^k)v_t dxdt-\int\limits_{Q_{t_0,T}} g(x,v_t)(u_t^k-v_t)dxdt.$$

Згідно з (17)

$$I_k=\int\limits_{Q_{t_0,T}} fu_t^k dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T}\Big[|u_t^k|^2+$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}^k u_{x_j}^k\Big]dx-\int\limits_{Q_{t_0,T}} g(x,u_t^k)v_t dxdt-\int\limits_{Q_{t_0,T}} g(x,v_t)(u_t^k-v_t)dxdt.$$

Звідси

$$0\leqslant\limsup I_k\leqslant\int\limits_{Q_{t_0,T}} fu_t dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T}\Big[|u_t|^2+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\Big]dx-$$

$$-\int\limits_{Q_{t_0,T}} zv_t dxdt-\int\limits_{Q_{t_0,T}} g(x,v_t)(u_t-v_t)dxdt. \tag{19}$$

Додавши (18) та (19), матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}}(z-g(x,v_t))(u_t-v_t)dxdt\geqslant 0. \tag{20}$$

Приймемо, що $v_t=u_t-\lambda w$, $\lambda>0$, $w\in L^{p'}(Q_{t_0,T})$. Тоді з нерівності (20)

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}}(z-g(x,u_t-\lambda w))w dxdt\geqslant 0.$$

Спрямувавши $\lambda \to 0$ (це законно згідно з теоремою Лебега), маємо

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} (z - g(x, u_t))w\,dxdt \geqslant 0 \qquad \forall w \in L^{p'}(Q_{t_0,T}).$$

Отже, $z = g(x, u_t)$.

Отож, u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2) в $Q_{t_0,T}$.

Крім того, аналогічно як в [9, с. 236] одержимо, що для u правильна рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} [g(x, u_t) - f(x,t)]u_t\,dxdt = 0,$$

де t_1, t_2, $t_0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ довільні.

З оцінок (8) випливає, що для узагальненого розв'язку u задачі (1), (2) з початковими умовами

$$u\big|_{t=t_0} = 0, \qquad u_t\big|_{t=t_0} = 0 \tag{21}$$

правильні оцінки

$$\sup_{[t_0;T]} \int\limits_{\Omega_t} \left[|u_t|^2 + |\nabla_x u|^2\right]dx \leqslant M_1,$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} |u_t|^p\,dxdt \leqslant M_1,$$

де стала $M > 0$ не залежить від t_0.

Нехай t_0 набуває значення $t_0 = T - 1$, $t_0 = T - 2$, $\ldots$, $t_0 = T - k$, $\ldots$,

$$f_k(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_{T-k,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_T \backslash Q_{T-k,T}. \end{cases}$$

Використовуючи наведені вище міркування, отримаємо, що задача (1), (2), (21) з правою частиною f_k має розв'язок u^k.

Продовжимо u^k нулем на $Q_T \backslash Q_{T-k,T}$ і продовжений розв'язок знову позначимо u^k. Тоді послідовність $\{u^k\}$ визначена в Q_T і

$$\sup_{(-\infty,T]} \int\limits_{\Omega_t} \left[|u_t^k|^2 + |\nabla_x u^k|^2\right]dx + \int\limits_{Q_T} |u_t^k|^p dxdt \leqslant M_1, \tag{22}$$

стала M_1 не залежить від k. Крім того, u_t^k, $\nabla_x u^k \in C((-\infty;T];L^2(\Omega))$.

Розглянемо

$$\int\limits_{Q_{\tau_0,t_2}} \Big[-u_t^k v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^k v_{x_j} + g(x,u_t^k)v - f_k(x,t)v \Big] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{t_2}} u_t^k v dx - \int\limits_{\Omega_{\tau_0}} u_t^k v dx = 0,$$

$$\int\limits_{Q_{\tau_0,t_2}} \Big[-u_t^s v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^s v_{x_j} + g(x,u_t^s)v - f_s(x,t)v \Big] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{t_2}} u_t^s v dx - \int\limits_{\Omega_{\tau_0}} u_t^s v dx = 0,$$

де функція v така, як у (3), а $\tau_0 < t_2$. З двох останніх інтегральних рівностей отримаємо

$$\int\limits_{Q_{\tau_0,t_2}} \Big[-(u_t^k - u_t^s)v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(u_{x_i}^k - u_{x_i}^s)v_{x_j} +$$

$$+(g(x,u_t^k) - g(x,u_t^s))v - (f_k - f_s)v \Big] dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{t_2}} (u_t^k - u_t^s) v dx - \int\limits_{\Omega_{\tau_0}} (u_t^k - u_t^s) v dx = 0.$$

Нехай $k > s$, $u^k - u^s = w^{k,s}$, $|\tau_0| > T - k$. Доданки останньої рівності перетворимо так само, як $I_1 - I_4$. Тоді матимемо рівність

$$2 \int\limits_{Q_{\tau_0,t_2}} (g(x,u_t^k) - g(x,u_t^s)) w_t^{k,s} dxdt + \int\limits_{\Omega_{t_2}} \Big[|w_t^{k,s}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) w_{x_i}^{k,s} w_{x_j}^{k,s} \Big] dx =$$

$$= \int\limits_{Q_{T-k,T-s}} f(x,t) w_t^{k,s} dxdt. \tag{23}$$

Враховуючи умови **(A)**, **(G)**, **(F)**, з (23) одержуємо таке: для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число k_0, що для всіх $k, s > k_0$ і для довільних фіксованих t_1, t_2, $t_1 < t_2 \leqslant T$ правильні оцінки

$$\int\limits_{\Omega_t} (|w_t^{k,s}|^2 + |\nabla_x w^{k,s}|^2) dx < \varepsilon, \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |w_t^{k,s}|^p dxdt < \varepsilon,$$

тобто $\{u^k\}$ фундаментальна послідовність в $C([t_1;t_2];H^1_{0,1}(\Omega))$, а $\{u^k_t\}$ є фундаментальною послідовністю в $C([t_1,t_2];L^2(\Omega))$ і в $L^p(Q_{t_1,t_2})$ $\forall t_1,t_2 \in (-\infty;T]$, $t_1 < t_2$.

Отже, $u^k \to u$ і функція u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2) в сенсі інтегральної тотожності (3).

Крім того, оскільки всі функції u^k задовольняють оцінки (22), то

$$L^\infty((-\infty,T);H^1_{0,1}(\Omega)),\ \ u_t \in C((-\infty,T];L^2(\Omega)) \cap L^p(Q_T).$$

2. **Єдиність.** Нехай u^1, u^2 – два узагальнених розв'язки задачі (1), (2). Тоді для функції $w = u^1 - u^2$ правильна рівність

$$2\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (g(x,u_t^1) - g(x,u_t^2))w_t dxdt +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{t_2}} \Big[|w_t^2|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) w_{x_i} w_{x_j}\Big]dx - \int\limits_{\Omega_{t_1}} \Big[|w_t^2|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) w_{x_i} w_{x_j}\Big]dx = 0.$$

Звідси, враховуючи умови теореми і зауваження 1, одержуємо оцінку

$$2g_0 \int\limits_{Q_{t_2}} |w_t|^p dxdt + \int\limits_{\Omega_{t_2}} (|w_t|^2 + a_0|\nabla_x w|^2)dx \leqslant 0,$$

з якої випливає, що $w = 0$ майже всюди в Q_T.

Теорема доведена.

Зауваження 2. Теорема залишається правильною, якщо умову **(F)** замінити умовою

$$f \in L^\infty((-\infty,T];L^2(\Omega)), \quad |t|^{(1+\alpha)/2} f_t(x,t) \in L^2(Q_T), \quad \lim_{t\to-\infty} \int\limits_{\Omega_t} f^2(x,t)dx = 0,$$

де $\alpha > 0$ – достатньо мале число.

Зауваження 3. У працях [10-13] отримано умови коректності задачі без початкових умов для рівняння (1) за деяких обмежень на p і n, зокрема $2 < p \leqslant 2 + \dfrac{4}{n-1}$ і $n \leqslant 5$. Водночас умови на функцію f слабші, ніж у цих працях.

1. *Tychonoff A.* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur// Mat. Sbornik. – 1935. – Vol. 42. – N 2. – P. 199-216.

2. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара имени И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.
3. *Лавренюк Сергій, Оліскевич Маріанна.* Задача Фур'є для однієї нелінійної системи гіперболічних рівнянь з трьома незалежними змінними // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип. 60. – С. 80-91.
4. *Кирилич В. М., Мишкіс А. Д.* Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу // Доп. АН УРСР. Сер. А.– 1991. – N 5.– С. 8–10.
5. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Краевые задачи без начальных условий для линейной однородной системы уравнений гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28. – N 3. – С. 463–469.
6. *Lavrenyuk S. P., Zareba L.* Nonlocal problem for the nonlinear system of the first order without initial conditions // Математичні Студії. – 2000. – Т. 14. – N 2. – С. 150–158.
7. *Лавренюк С. П.* Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности// Нелинейные граничные задачи. – 1993. – N 5. – С. 53–58.
8. *Лавренюк С. П.* Задача для одного эволюционного уравнения в полуограниченном по времени цилиндре // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 11. – С. 1481–1486.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.
10. *Prouse G.* Soluzioni quasi-periodiche delle'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo non lineare. I // Rend. Accad. Naz. Lincei. – 1965. – Vol. 38. – P. 804-807.
11. *Prouse G.* Soluzioni quasi-periodiche delle'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo non lineare. II // Rend. Accad. Naz. Lincei. – 1965. – Vol. 39. – P. 11-18.
12. *Prouse G.* Soluzioni quasi-periodiche delle'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo non lineare. III // Rend. Accad. Naz. Lincei. – 1965. – Vol. 39. – P. 155-160.
13. *Prouse G.* Soluzioni quasi-periodiche delle'equazione non omogenea delle onde con termine dissipativo non lineare. IV // Rend. Accad. Naz. Lincei. – 1965. – Vol. 39. – P. 240-244.

FOURIER'S PROBLEM FOR NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATION OF THE SECOND ORDER

Mariya Kolin'ko[1], Serhiy Lavrenyuk[1], Petro Pukach[2]

[1]*Ivan Franko National University in Lviv,*
1 Universitetska Str. 79000 Lviv, Ukraine
[2]*Lviv Polytechnic National University,*
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

The problem without initial data for the second order nonlinear hyperbolic equation in the bounded by space variables and in the unbounded by time variables domain is investigated. Described equation generalizes the next one

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-2} u_t = f(x,t), \quad p > 2.$$

The conditions of existence of the unique solution of the problem without restrictions by p and by the space dimension are obtained.

Key words: hyperbolic equation of second order, the problem without initial data.

Стаття надійшла до редколегії 22.10.2003
Прийнята до друку 02.10.2003