ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.80–84

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.80–84

УДК 512.4

НАПІВПРОСТІ СКРУТИ В КАТЕГОРІЯХ МОДУЛІВ І ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ КІЛЕЦЬ

Юрій МАТУРІН
Інститут прикладних проблем математики і механіки
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул.Наукова, 3б 79060 Львів, Україна

Описано певні класи кілець за допомогою напівпростих скрутів. Розглянуто питання про те, коли періодичні класи певних напівпростих скрутів містять усі прямі добутки простих лівих модулів, що належать до них.

Ключові слова: кільце, модуль, напівпростий скрут.

Нехай R – асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Модулі розглядаємо лише унітарні.

Розглянемо таке формулювання: які умови потрібно накласти на кільце R, щоб для кожної напівпростої теорії скрутів, що задовольняє певну умову, в категорії $R-\mathrm{Mod}$ її радикальний клас містив би всі прямі добутки простих лівих R-модулів з цього класу?

Відповідь дає теорема 1, яку сформулюємо далі. Ця теорема поширює результати теореми 1 праці [1] на ширший клас кілець. Це справді так, оскільки для довільного комутативного кільця і скінченної множини Ω'_l виконується умова (12) теореми 1 цієї праці на підставі китайської теореми про лишки, хоча і не всі комутативні кільця напівлокальні, а для них теорема 1 [1] не виконується. Теорема 1 [1] узагальнювала результати пропозиції 15.17 книги [4] на ширший клас, що охоплює клас напівлокальних кілець за допомогою радикальних фільтрів і скрутів, а ці засоби, що належать до теорії радикалів і скрутів, не використовували у пропозиції 15.17 книги [4].

Для скорочення записів l-радикальним (r-радикальним) фільтром кільця R називатимемо радикальний фільтр лівих (правих) ідеалів кільця R.

Якщо $\mathcal{E}$ – $l(r)$ – радикальний фільтр кільця R, то через $r_{\mathcal{E}}$ позначатимемо відповідний скрут в $R-\mathrm{Mod}$ ($\mathrm{Mod}-R$).

Нехай Ω_l (Ω_r) – множина усіх класів ізоморфних простих лівих (правих) R-модулів, а Ω_1 – довільна її підмножина. Приймемо, що $\overline{\Omega}_1 = \cup\Omega_1$.

Нехай $S\Omega_1$ – Ω_1 – цоколь.

Якщо r – скрут в $R-\mathrm{Mod}$ ($\mathrm{Mod}-R$), то множину, яка складається з усіх таких максимальних лівих (правих) ідеалів $\mathfrak{M}$ кільця R, що $r(R/\mathfrak{M}) = R/\mathfrak{M}$, позначатимемо через $W(r)$. Нехай також $V(\Omega_1) := W(\overline{S\Omega_1})$ для всякої множини $\Omega_1 \subseteq \Omega_l$

($\Omega_1 \subseteq \Omega_r$). Позначимо $\cap V(\Omega_1)$ через $J_l(\Omega_1)$ ($J_r(\Omega_1)$). Нехай M – лівий (правий) R-модуль і $A \subseteq R$. Приймемо, що

$$r(M, A) = \{x \in M \mid ax = 0 \ (a \in A)\},$$

$$(l(M, A) = \{x \in M \mid xa = 0 \ (a \in A)\}).$$

Всі інші позначення є стандартними в літературі з теорії скрутів (див.[2]).

Зауважимо, що напівпрості скрути широко використовують для характеризації кілець (див.[2]–[3]).

Наприклад, якщо всі скрути напівпрості в $R - \mathrm{Mod}$, то R – напівартінове зліва (див.[3]).

Теорема 1. *Нехай R – кільце і $\Omega_l' \subseteq \Omega_l$. Тоді такі умови еквівалентні.*

(1) Всякий l-радикальний фільтр $\mathcal{E}$ кільця R такий, що

$$W(r_{\mathcal{E}}) \subseteq V(\Omega_l'),$$

містить всякий лівий ідеал з множини $\{\bigcap U \mid U \subseteq W(r_{\mathcal{E}})\}$.

(2) Для довільного скруту r в $R - \mathrm{Mod}$ такого, що

$$W(r) \subseteq V(\Omega_l'),$$

виконується умова

$$\prod_{\mathfrak{M} \in W(r)} R/\mathfrak{M} \in T(r).$$

(3) Для довільного скруту r в $R - \mathrm{Mod}$ такого, що

$$W(r) \subseteq V(\Omega_l'),$$

радикальний клас $T(r)$ містить всі прямі добутки простих лівих R-модулів, які належать до $T(r)$.

(4) Для всякої підмножини Ω_1 в Ω_l' радикальний клас $T(\overline{S\Omega_1})$ містить всі прямі добутки простих лівих R-модулів, які належать до $T(\overline{S\Omega_1})$.

(5) Для всякої підмножини Ω_1 в Ω_l' клас $T(S\Omega_1)$ замкнений стосовно прямих добутків.

(6) Для всякої підмножини Ω_1 в Ω_l' клас $T(S\Omega_1)$ містить всі прямі добутки простих лівих R-модулів, які належать до $T(S\Omega_1)$.

(7) Для всякої підмножини Ω_1 в Ω_l' і всякого лівого R-модуля M

$$S\Omega_1(M) = r\big(M, J_l(\Omega_1)\big).$$

(8) Для всякого лівого R-модуля M

$$S\Omega_l'(M) = r\big(M, J_l(\Omega_l')\big).$$

(9) Клас $T(S\Omega_l')$ замкнений стосовно прямих добутків.

(10) Клас $T(S\Omega_l')$ містить всі прямі добутки простих лівих R-модулів, які належать до $T(S\Omega_l')$.

(11) $R/J_l(\Omega_l')$ – артінове зліва кільце.

(12) $R/J_l(\Omega_l')$ – класично напівпросте кільце.

Доведення. Доводити теорему будемо за такою схемою:
(12)⇒(7)⇒(5)⇒(6) ⇒(4)⇒(3)⇒(2) ⇒(1)⇒(12),
(12)⇒(8)⇒(9)⇒(10) ⇒(12),
(12)⇒(11),
(11)⇒(12).

(12)⇒(7). Нехай виконується (12). Розглянемо довільну підмножину Ω_1 в Ω_l'. Зрозуміло, що $J_l(\Omega_1)$ анулює будь-який простий лівий R-модуль, що належить до $T(S\Omega_1)$. Отже, $S\Omega_1(M) \subseteq r\big(M, J_l(\Omega_1)\big)$ для всякого лівого R-модуля M. Але $J_l(\Omega_1)r\big(M, J_l(\Omega_1)\big) = 0$. Отже, можемо наділити $r\big(M, J_l(\Omega_1)\big)$ природним способом структурою лівого $R/J_l(\Omega_1)$-модуля. Оскільки $J_l(\Omega_l') \subseteq J_l(\Omega_1)$, то кільце $R/J_l(\Omega_1)$ є гомоморфним образом кільця $R/J_l(\Omega_l')$, яке класично напівпросте. Тому $R/J_l(\Omega_1)$ також класично напівпросте. Отже, $R/J_l(\Omega_1)$ скінченно породжений напівпростий лівий R-модуль. Звідси матимемо, що $R/J_l(\Omega_1)$ – скінченно копороджений лівий R-модуль. Оскільки $J_l(\Omega_1) = \mathrm{Rej}_R(\overline{\Omega}_1)$, то $R/J_l(\Omega_1)$ копороджується класом $\overline{\Omega}_1$. Але ж $R/J_l(\Omega_1)$ скінченно копороджений. Тому існує мономорфізм

$$0 \longrightarrow R/J_l(\Omega_1) \longrightarrow \prod_{f\in F} M_f,$$

де $\{M_f \mid f \in F\} \subseteq \overline{\Omega}_1$, а F – скінченна множина.

Звідси $R/J_l(\Omega_1) \in T(S\Omega_1)$. Оскільки $r\big(M, J_l(\Omega_1)\big)$ є $R/J_l(\Omega_1)$-модулем, то з $R/J_l(\Omega_1) \in T(S\Omega_1)$ випливає, що $r\big(M, J_l(\Omega_1)\big) \subseteq S\Omega_1(M)$. Отже, $S\Omega_1(M) = r\big(M, J_l(\Omega_1)\big)$.

(7)⇒(5). Нехай виконується (7) і $\Omega_1 \subseteq \Omega_l'$. Оскільки $J_l(\Omega_1)$ анулює будь-який лівий R-модуль, що належить до $T(S\Omega_1)$, то він анулює і будь-який прямий добуток R-модулів з $T(S\Omega_1)$. Враховуючи (7), матимемо, що клас $T(S\Omega_1)$ – замкнений стосовно прямих добутків.

(5)⇒(6). Очевидно.

(6)⇒(4). Це випливає з того, що $T(S\Omega_1) \subseteq T(\overline{S\Omega}_1)$.

(4)⇒(3). Нехай виконується (4). Розглянемо довільний скрут r в $R-\mathrm{Mod}$ такий, що $W(r) \subseteq V(\Omega_l')$.

Приймемо $\Omega_1 := \{\omega \mid \omega \in \Omega_l$, існує лівий R-модуль M, для якого $M \in \omega \cap T(r)\}$.

Тоді, очевидно, що $\Omega_1 \subseteq \Omega_l'$ і $T(\overline{S\Omega}_1) \subseteq T(r)$. Враховуючи тепер (4), одержуємо, що радикальний клас $T(r)$ містить будь-які прямі добутки простих лівих R-модулів, що належать до $T(r)$.

(3)⇒(2). Очевидно.

(2)⇒(1). Нехай виконується умова (2). Розглянемо довільний l-радикальний фільтр $\mathcal{E}$, для якого $W(r_\mathcal{E}) \subseteq V(\Omega_l')$. Визначимо канонічно гомоморфізм $\alpha\colon R \to \prod_{\mathfrak{M}\in W(r_\mathcal{E})} R/\mathfrak{M}$, тобто

$$\alpha\colon a \mapsto (\ldots, a + \mathfrak{M}, \ldots).$$

Оскільки $\operatorname{im}\alpha \subseteq \prod_{\mathfrak{M}\in W(r_{\mathcal{E}})} R/\mathfrak{M}$, то, використавши (2), одержимо, що $\operatorname{im}\alpha \in T(r)$. Врахувавши $R/\operatorname{Ker}\alpha \cong \operatorname{im}\alpha \in T(r)$, матимемо, що $\operatorname{Ker}\alpha \in \mathcal{E}$, тобто $\bigcap V(\Omega_l') \in \mathcal{E}$. Звідси, пригадавши означення l-радикального фільтра, одержуємо (1).

(1)⇒(12). Вважатимемо, що виконується умова (1). Нехай $\mathcal{E}_l'$ – l-радикальний фільтр, який відповідає скрутові $\overline{S\Omega_l'}$. З умови (1) матимемо, що $J_l(\Omega_l') \in \mathcal{E}_l'$, тобто $\overline{S\Omega_l'}(R/J_l(\Omega_l')) = R/J_l(\Omega_l')$. Оскільки $\overline{S\Omega_l'}$ – точний зліва напередрадикал, то $S\Omega_l'(R/J_l(\Omega_l'))$ – суттєвий підмодуль модуля $\overline{S\Omega_l'}(R/J_l(\Omega_l')) = R/J_l(\Omega_l')$ (див. [2], с. 142, наслідок 3.5).

Розглядатимемо кожен лівий $R/J_l(\Omega_l')$-модуль природно як R-модуль і кожний R-модуль, що анулюється $J_l(\Omega_l')$, природно як $R/J_l(\Omega_l')$-модуль. Розглянемо довільно лівий $R/J_l(\Omega_l')$-модуль M. Нехай тоді $t(M)$ – сума всіх простих лівих $R/J_l(\Omega_l')$-підмодулів у M, що належать класові $\overline{\Omega_l'}$ (використовуємо той факт, що кожний R-модуль з класу $\overline{\Omega_l'}$ анулюється ідеалом $J_l(\Omega_l')$ кільця R). Тоді t – напередрадикал у категорії $R/J_l(\Omega_l')-\mathrm{Mod}$. Отже, $t(R/J_l(\Omega_l'))$ – ідеал кільця $R/J_l(\Omega_l')$ (див. [3], с. 8, пропозиція 1.4). Тому $t(R/J_l(\Omega_l')) = U/J_l(\Omega_l')$, де U – ідеал в R, що містить $J_l(\Omega_l')$. Зрозуміло, що $t(K) = S\Omega_l'(K)$ для кожного лівого R-модуля K, який анулюється ідеалом $J_l(\Omega_l')$.

Отож, $S\Omega_l'(R/J_l(\Omega_l')) = U/J_l(\Omega_l')$. Тоді $U/J_l(\Omega_l')$ – суттєвий підмодуль лівого R-модуля $R/J_l(\Omega_l')$, де U – ідеал в R, що містить $J_l(\Omega_l')$. Покажемо, що $U = R$. Припустимо, що $U \neq R$. Тоді існує максимальний лівий ідеал $\mathfrak{M}$ кільця R, для якого $U \subseteq \mathfrak{M}$. Нехай $\omega \in \Omega_l$ такий, що $R/\mathfrak{M} \in \omega$. Зрозуміло, що $U \subseteq J_l(\{\omega\})$. Крім того, оскільки $J_l(\Omega_l') \in \mathcal{E}_l'$ і $J_l(\Omega_l') \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} \in \mathcal{E}_l'$. Отже, $\omega \in \Omega_l'$. Приймемо $\Omega_1 := \Omega_l' \setminus \{\omega\}$. Тоді $J_l(\Omega_l') = J_l(\Omega_1) \cap J_l(\{\omega\}) \supseteq J_l(\Omega_1) \cap U \supseteq J_l(\Omega_l')$. Таким чином, $J_l(\Omega_l') = J_l(\Omega_1) \cap U$. Оскільки $J_l(\Omega_1)/J_l(\Omega_l') \cap U/J_l(\Omega_l') = J_l(\Omega_l')/J_l(\Omega_l')$, то з огляду на суттєвість $U/J_l(\Omega_l')$ в $R/J_l(\Omega_l')$ матимемо, що $J_l(\Omega_1) = J_l(\Omega_l')$. Нехай $\mathcal{E}_1$ – l-радикальний фільтр, що відповідає скрутові $\overline{S\Omega_1}$. З умови (1) теореми в силу $W(\overline{S\Omega_1}) = V(\Omega_1) \subseteq V(\Omega_l')$ матимемо, що $J_l(\Omega_1) \in \mathcal{E}_1$. Оскільки $J_l(\Omega_1) = J_l(\Omega_l')$, то $J_l(\Omega_l') \in \mathcal{E}_1$. Але ж $J_l(\Omega_l') \subseteq \mathfrak{M}$. Тому з $J_l(\Omega_l') \in \mathcal{E}_1$ одержимо, що $\mathfrak{M} \in \mathcal{E}_1$. Це показує, що $\omega \in \Omega_1$, тобто $\omega \in \Omega_l' \setminus \{\omega\}$. Протиріччя. Ми довели, що $U = R$. Тоді $S\Omega_l'(R/J_l(\Omega_l')) = R/J_l(\Omega_l')$. Очевидно, що для довільного лівого R-модуля M: $S\Omega_l'(M) \subseteq S\Omega_l(M)$. Отже, $R/J_l(\Omega_l') = S\Omega_l'(R/J_l(\Omega_l')) \subseteq S\Omega_l(R/J_l(\Omega_l')) \subseteq R/J_l(\Omega_l')$, тобто $S\Omega_l(R/J_l(\Omega_l')) = R/J_l(\Omega_l')$. Це показує, що кільце $R/J_l(\Omega_l')$ класично напівпросте.

Далі, (12)⇒(8)⇒(9)⇒(10) доводиться майже однаково як і (12)⇒(7)⇒ (5)⇒ (6).

(10)⇒(12). Нехай виконується умова (10). Оскільки $\operatorname{Rej}_R(\overline{\Omega}_l') = J_l(\Omega_l')$, то $R/J_l(\Omega_l')$ копороджується класом $\overline{\Omega}_l'$, тобто існує мономорфізм

$$0 \longrightarrow R/J_l(\Omega_l') \longrightarrow \prod_A P_\alpha,$$

де $\{P_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \overline{\Omega}_l'$. На підставі умови (10) $\prod_A P_\alpha \in T(S\Omega_l')$. Тоді з нашого мономорфізму матимемо, що $R/J_l(\Omega_l') \in T(S\Omega_l')$ (див.[4], с.117, пропозиція 9.4). Це і доводить, що $R/J_l(\Omega_l')$ – класично напівпросте кільце.

(12)$\Rightarrow$(11). Очевидно.

(11)$\Rightarrow$(12). Зрозуміло, що $J\big(R/J_l(\Omega_l')\big) = 0$. Враховуючи умову (11), бачимо, що з (11) випливає (12).

Теорема доведена.

Наслідок. *Нехай R – кільце. Тоді такі умови еквівалентні:*

(1) *R – досконале справа кільце;*

(2) *${}_RR$ – напівартіновий модуль і для всякого напівпростого скруту r в $R-$*Mod *радикальний клас $T(r)$ містить усі прямі добутки простих лівих R-модулів, що належать до $T(r)$;*

(3) *${}_RR$ – напівартіновий модуль і для всякого скруту r в $R-$* Mod *радикальний клас $T(r)$ містить усі прямі добутки простих правих R-модулів, що належать до $T(r)$.*

1. *Maturin Yu.* On semisimple torsions // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат. – 2000. – N 1. – С. 42-46.
2. *Stenström Bo.* Rings of quotients. – Berlin, 1975.
3. *Кашу А. И.* Радикалы и кручения в модулях. – Кишинёв, 1983.
4. *Anderson F. W., Fuller K. R.* Rings and categories of modules. – Berlin, 1973.

SEMISIMPLE TORSIONS IN MODULE CATEGORIES AND CHARACTERIZATION OF RINGS

Yuriy Maturin

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
3B Naukova Str. 79060 Lviv, Ukraine

The aim of this note is to give a characterization of certain rings in terms of some semisimple torsions.

The question, when torsion classes of certain semisimple torsions contain all direct products of simple left modules belonging to them, is considered.

Key words: ring,module,semisimple torsion.

Стаття надійшла до редколегії 26.03.2003
Прийнята до друку 02.10.2003