ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
*Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.85–88*

VISNYK LVIV UNIV.
*Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.85–88*

УДК 517.53

# ПРО НУЛІ ЧАСТКОВИХ СУМ ТЕЙЛОРОВОГО РОЗВИНЕННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОРЯДКУ

**Люба МИКИТЮК**
*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Для цілої функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ з нулем $a$ кратності $m$ нехай $(z_n)$ – збіжна до $a$ послідовність нулів часткових сум $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$. У термінах логарифмічних порядку і типу описано швидкість прямування $|z_n - a|$ до 0.

*Ключові слова:* ціла функція, логарифмічний порядок.

Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

- ціла трансцендентна функція, яка має нуль кратності $m \in \mathbb{N}$ у точці $a \neq 0$, $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, а $(z_n)$ – така послідовність, що $S_n(z_n) = 0$ і $z_n \to a$ $(n \to \infty)$. Зауважимо, що з теореми Руше випливає існування такої послідовності.

Для цілих функцій скінченного ненульового порядку швидкість прямування $|z_n - a|$ до 0 вивчено в [1]. Ми дослідимо поводження $|z_n - a|$ у термінах логарифмічного порядку та типу.

Нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1). Логарифмічним порядком $\rho_l$ і типом $\tau_l$ функції $f$ називаються величини

$$\rho_l = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}, \quad \tau_l = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln M_f(r)}{(\ln r)^{\rho_l}}.$$

Оскільки $f$ – трансцендентна функція, то $\rho_l \geqslant 1$. Вважатимемо, що $1 < \rho_l < +\infty$. Добре відомо (див., наприклад, [2], с. 40), що

$$\rho_l = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln\ln r} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|a_n|}\right)} + 1 \tag{2}$$

і

$$\tau_l = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \mu_f(r)}{(\ln r)^{\rho_l}} = (\rho_l - 1)^{\rho_l - 1}\rho_l^{\rho_l} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\rho_l} \left(\ln \frac{1}{|a_n|}\right)^{1-\rho_l}. \qquad (3)$$

Нам буде потрібна також така лема.

**Лема.** *Нехай функція $f$ задана рядом (1) має логарифмічний порядок $\rho_l$ і тип $\tau_l$, $(c_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$ – обмежені послідовності комплексних чисел, $1 \leqslant k \leqslant m$, а*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (b_n = a_n + c_n^{(1)} a_{n+1} + \ldots + c_n^{(m)} a_{n+m}).$$

*Тоді $g$ – ціла функція і має логарифмічний порядок $\rho_l$ і логарифмічний тип $\tau_l$.*

*Доведення.* Оскільки $|c_n^{(k)}| \leqslant K < +\infty$ для всіх $n \geqslant 1$ і $1 \leqslant k \leqslant m$, а $|a_k| r^k \leqslant \mu_f(r)$ для всіх $k \geqslant 0$ і $r > 0$, то для $r > 1$ маємо

$$\begin{aligned} &|c_n^{(1)} a_{n+1} + \ldots + c_n^{(m)} a_{n+m}| \leqslant K(|a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+m}|) \leqslant \\ &\leqslant K\left(\frac{\mu_f(r)}{r^{n+1}} + \ldots + \frac{\mu_f(r)}{r^{n+m}}\right) \leqslant \frac{K\mu_f(r)}{r^{n+1}} \frac{1}{1 - 1/r} = \frac{K\mu_f(r)}{r^n(r-1)}, \end{aligned}$$

так що

$$|a_n| - \frac{K\mu_f(r)}{r^n(r-1)} \leqslant |b_n| \leqslant |a_n| + \frac{K\mu_f(r)}{r^n(r-1)}$$

і

$$|a_n| r^n - \frac{K\mu_f(r)}{r-1} \leqslant |b_n| r^n \leqslant |a_n| r^n + \frac{K\mu_f(r)}{r-1}.$$

Звідси випливає, що

$$\mu_f(r)\left(1 - \frac{K}{r-1}\right) \leqslant \mu_g(r) \leqslant \mu_f(r)\left(1 + \frac{K}{r-1}\right),$$

тобто $\ln \mu_g(r) = \ln \mu_f(r) + o(1)$, $r \to \infty$ і згідно з (2) і (3) функція $g$ має логарифмічний порядок $\rho_l$ і логарифмічний тип $\tau_l$.

Метод доведення теореми відрізняється від застосованого в [1].

**Теорема.** *Якщо $f$ – ціла трансцендентна функція, яка має в точці $a \in \mathbb{C}$ нуль кратності $m \in \mathbb{N}$ і має логарифмічний порядок $\rho_l \in (1; +\infty)$ і тип $\tau_l$, то*

$$\rho_l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|z_n - a|}\right)} + 1 \qquad (4)$$

*і*

$$\tau_l = (\rho_l - 1)^{\rho_l - 1} \rho_l^{\rho_l} m^{1-\rho_l} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\rho_l} \left(\ln \frac{1}{|z_n - a|}\right)^{1-\rho_l}. \qquad (5)$$

*Доведення.* Оскільки $f$ має нуль $a$ кратності $m$, то $f(z) = (z-a)^m\varphi(z)$, де $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ – ціла трансцендентна функція логарифмічного порядку $\rho_l$ та типу $\tau_l$ і $\varphi(a) \neq 0$. Неважко перевірити, що

$$\begin{aligned} S_n(z) =&(z-a)^m \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k - \\ &- \alpha_n z^{n+m} - \alpha_{n-1} z^{n+m-1} - \ldots - \alpha_{n-m+1} z^{n+1} + \\ &+ \alpha_n C_m^1 a z^{n+m-1} + \alpha_{n-1} C_m^1 a z^{n+m-2} + \ldots + \alpha_{n-m+2} C_m^1 a z^{n+1} + \ldots + \\ &+ (-1)^m C_m^{m-1} \alpha_n z^{n+1} a^{m-1} = (z-a)^m \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k - \alpha_{n-m+1} z^{n+1} + \\ &+ \alpha_{n-m+2}(C_m^1 a z^{n+1} - z^{n+2}) + \ldots + \\ &+ \alpha_n((-1)^m C_m^{m-1} z^{n+1} a^{m-1} + \ldots + C_m^1 a z^{n+m-1} - z^{n+m}). \end{aligned}$$

Оскільки $S_n(z_n) = 0$, то звідси отримуємо

$$\begin{aligned} (z_n - a)^m \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z_n^k = z_n^{n+1}(&\alpha_{n-m+1} + (-C_m^1 a + z_n)\alpha_{n-m+2} + \\ &+ ((-1)^{m+1} C_m^{m-1} a^{m-1} + \ldots + (-1) C_m^1 a z_n^{m-2} + z_n^{m-1})\alpha_n), \end{aligned}$$

тобто

$$(z_{n+m-1} - a)^m \sum_{k=0}^{n+m-1} \alpha_k z_{n+m-1}^k = z_{n+m-1}^{n+m} b_n, \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} b_n =&\alpha_n + (-C_m^1 a + z_{n+m-1})\alpha_{n+1} + \ldots + \\ &+ ((-1)^{m+1} C_m^{m-1} a^{m-1} + \ldots + (-1) C_m^1 a z_{n+m-1}^{m-2} + z_{n+m-1}^{m-1})\alpha_{n+m-1}. \end{aligned}$$

За лемою ціла функція з коефіцієнтами $b_n$ має логарифмічний порядок $\rho_l$ і тип $\tau_l$, тобто згідно з (2) і (3)

$$\rho_l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|b_n|}\right)} + 1 \tag{7}$$

і

$$\tau_l = (\rho_l - 1)^{\rho_l - 1} \rho_l^{\rho_l} \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\rho_l} \left(\ln\frac{1}{|b_n|}\right)^{1-\rho_l}. \tag{8}$$

З (6) одержуємо

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|b_n|} = \frac{m}{n}\ln\frac{1}{|z_{n+m-1} - a|} + \frac{n+m}{n}\ln|z_{n+m-1}| - \frac{1}{n}\ln\left|\sum_{k=0}^{n+m-1} \alpha_k z_{n+m-1}^k\right|.$$

Оскільки $z_n \to a$ і $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z_n^k \to \varphi(a) \neq 0$ при $n \to \infty$, то отримуємо

$$\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|b_n|} = \frac{m}{n} \ln \frac{1}{|z_{n+m-1} - a|} + \ln |a| + o(1), \quad n \to \infty.$$

Підставляючи цей вираз у (7) і (8) і враховуючи, що $\frac{1}{n} \ln \frac{1}{|b_n|} \to +\infty$, $(n \to \infty)$, одержуємо відповідно рівності (4) і (5).

---

1. *Нечюшките Э., Стрелиц Ш.* О скорости стремления к пределу нулей частичных сумм ряда Тейлора целой функции // Литовск. матем. сб. – 1961. – Т. 1-2. – С. 181-185.
2. *Шеремета М. М., Мулява О. М.* Ряди Діріхле: Текст лекцій. Львів, 2001.

## ON ZEROS OF TAYLOR DEVELOPMENT PARTIAL SUMS OF ENTIRE FUNCTION OF FINITE LOGARITHMIC ORDER

**Lyuba Mykytyuk**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

For an entire function $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ with a zero $a$ of multiplicity $m$ let $(z_n)$be a sequence of zeros of partial sums $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ tending to $a$. Rate of tending $|z_n - a|$ to 0 is described in terms of logarithmic order and type

*Key words:* entire function, logarithmic order and type.

Стаття надійшла до редколегії 09.10.2002
Прийнята до друку 02.10.2003