УДК 517.524

ПРО ЗРОСТАННЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ З НЕВІД'ЄМНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Оксана МУЛЯВА [1], **Петро ФІЛЕВИЧ** [2]

[1] *Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Стрийська, 3 Дрогобич, Львівська обл., Україна*

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Визначено необхідну та достатню умову на опуклу функцію Φ, за якої для довільного цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$, $s = \sigma + it$ такого, що $a_n \geqslant 0$ і послідовність (λ_n) є зростаючою до $+\infty$, виконується рівність

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln F(\sigma)}{\Phi(\sigma)} = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln \tilde{\mu}(\sigma)}{\Phi(\sigma)},$$

де $\tilde{\mu}(\sigma) = \sup\{e^{\sigma x} \sum_{\lambda_n x} a_n : x \geqslant 0\}$.

Ключові слова: цілий ряд Діріхле, максимальний член, центральний індекс, Φ-тип.

Нехай S_+ – клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \qquad s = \sigma + it \tag{1}$$

таких, що $a_n \geqslant 0$ для всіх цілих $n \geqslant 0$ і $a_n > 0$ для безлічі n, а послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ є зростаючою до $+\infty$ і $\lambda_0 = 0$.

Для ряду $F \in S_+$ вигляду (1) приймемо $T_k = \sum_{n \geqslant k} a_n$, $T(x) = \sum_{\lambda_n \geqslant x} a_n$ і $\tilde{\mu}(\sigma) = \sup\{T(x)e^{\sigma x} : x \geqslant 0\}$. Тоді [1]

$$F(\sigma) - F(0) = \sigma \int_0^{\infty} T(x) e^{\sigma x} dx, \tag{2}$$

$$\tilde{\mu}(\sigma) \leqslant F(\sigma) \leqslant F(0) + \frac{\sigma}{c}\tilde{\mu}(\sigma + c) \qquad (\forall c > 0). \tag{3}$$

Нехай L – клас неперервних, неспадних, необмежених зверху на $(-\infty; +\infty)$ функцій, а Ω – клас неперервно диференційовних, опуклих на $(-\infty; +\infty)$ функцій Φ таких, що $\sigma = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$. Зрозуміло, що $\Phi' \in L$, якщо $\Phi \in \Omega$, і $\ln F \in \Omega$, якщо $F \in S_+$.

Для функції $\Phi \in \Omega$ і ряду $F \in S_+$ величину

$$T_\Phi(F) = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln F(\sigma)}{\Phi(\sigma)}$$

назвемо (див. [2]) Φ-типом ряду F і приймемо

$$t_\Phi(F) = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \tilde{\mu}(\sigma)}{\Phi(\sigma)}.$$

Як бачимо, з (3) $T_\Phi(F) \geqslant t_\Phi(F)$. Розглянемо задачу про визначення умов виконання рівності $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$. Доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Для того щоб $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$ для кожного цілого ряду Діріхле $F \in S_+$, необхідно і достатньо, щоб $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$.*

Для доведення теореми нам потрібна така лема, в якій не передбачається загалом цілість ряду (1), а на послідовності (a_n) і $\lambda = (\lambda_n)$ відповідно комплексних і дійсних чисел не накладено жодних умов, за винятком зростання послідовності λ до $+\infty$.

Лема. *Нехай $B \in (-\infty; +\infty]$. Якщо для ряду Діріхле (1) існує зростаюча послідовність (n_k) невід'ємних цілих чисел така, що*

$$a_n = 0 \qquad (n < n_0); \qquad a_{n_k} \neq 0 \qquad (k \geqslant 0);$$

$$\varkappa_k := \frac{\ln|a_{n_k}| - \ln|a_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \uparrow B \qquad (k \to +\infty);$$

$$|a_n| \leqslant |a_{n_k}| e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)} \qquad (n \in (n_k; n_{k+1}),\ k \geqslant 0),$$

то максимальний член $\mu_F(\sigma) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$ та центральний індекс $\nu_F(\sigma) = \max\{n \geqslant 0 : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu_F(\sigma)\}$ цього ряду визначені для всіх $\sigma \in (-\infty; B)$ і 1) $\nu_F(\sigma) = n_0$, якщо $\sigma < \varkappa_0$; 2) $\nu_F(\sigma) = n_{k+1}$, якщо $\sigma \in [\varkappa_k; \varkappa_{k+1})$ і $k \geqslant 0$; 3) $\mu_F(\sigma) = |a_{n_0}|e^{\sigma\lambda_{n_0}}$, якщо $\sigma < \varkappa_0$; 4) $\mu_F(\sigma) = |a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}$, якщо $\sigma \in [\varkappa_k; \varkappa_{k+1})$ і $k \geqslant 0$.

Доведення. Зауважимо, що твердження 3 і 4 випливають з тверджень 1 і 2. Доведемо 1 і 2.

Нехай $\varkappa_{-1} \in (-\infty; \varkappa_0)$. Вважаємо, що $\sigma \in [\varkappa_k; \varkappa_{k+1})$ і $k \geqslant -1$.

Якщо $n \in (n_p; n_{p+1}]$ і $p \geqslant k+1$, то

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} \leqslant \frac{|a_{n_p}|e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p} - \lambda_n)}e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} = \frac{|a_{n_{p+1}}|e^{\varkappa_p\lambda_{n_{p+1}}}e^{-\varkappa_p\lambda_n}e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} =$$

$$= e^{\sigma(\lambda_n - \lambda_{n_{k+1}})} e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}} - \lambda_n)} \prod_{i=k+1}^{p} \frac{|a_{n_{i+1}}|}{|a_{n_i}|} =$$

$$= e^{\sigma(\lambda_n - \lambda_{n_{k+1}})} e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}} - \lambda_n)} \prod_{i=k+1}^{p} \frac{1}{e^{\varkappa_i(\lambda_{n_{i+1}} - \lambda_{n_i})}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\sigma(\lambda_n - \lambda_{n_{k+1}})} e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}} - \lambda_n)}}{e^{\varkappa_{k+1}(\lambda_{n_p} - \lambda_{n_{k+1}})} e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}} - \lambda_{n_p})}} \leqslant \frac{e^{\sigma(\lambda_n - \lambda_{n_{k+1}})}}{e^{\varkappa_{k+1}(\lambda_n - \lambda_{n_{k+1}})}} < 1,$$

тобто $\nu_F(\sigma) \leqslant n_{k+1}$, якщо $k \geqslant 0$, і $\nu_F(\sigma) = n_0$, якщо $\sigma < \varkappa_0$.

Якщо ж $n \in [n_p; n_{p+1})$, $p \leqslant k$ і $k \geqslant 0$, то

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} \leqslant \frac{|a_{n_p}|e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} = \frac{e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}\prod_{i=p}^{k}\frac{|a_{n_i}|}{|a_{n_{i+1}}|} =$$

$$= \frac{e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}\prod_{i=p}^{k}e^{\varkappa_i(\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i})} \leqslant \frac{e^{\varkappa_k(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}\prod_{i=p}^{k}e^{\varkappa_k(\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i})} =$$

$$= \frac{e^{\varkappa_k(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}} \leqslant 1,$$

тобто $\nu_F(\sigma) \geqslant n_{k+1}$. Отже, $\nu_F(\sigma) = n_{k+1}$, якщо $\sigma \in [\varkappa_k; \varkappa_{k+1})$ і $k \geqslant 0$. Лему доведено.

Доведення теореми. Достатність. Нехай $\ln\Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$. Доведемо, що $T_\Phi(F) \leqslant t_\Phi(F)$, звідки й випливатиме рівність $T_\Phi(F) = t_\Phi(F)$.

Оскільки $\Phi' \in L$, то для деякого σ_0 отримуємо $\Phi'(\sigma) > 0$, $\sigma \geqslant \sigma_0$. Зафіксуємо довільне $\sigma \geqslant \sigma_0$ і розглянемо функцію $\psi(x) = \Phi'(\sigma + x)$. Ця функція неспадна, неперервна і необмежена на інтервалі $(0; +\infty)$, а тому рівняння $\psi(x) = \frac{1}{x}$ має єдиний додатний розв'язок $x = x(\sigma)$. Тоді $\Phi'(\sigma + x(\sigma))x(\sigma) = 1$, $\sigma \geqslant \sigma_0$. Отож,

$$\Phi(\sigma + x(\sigma)) - \Phi(\sigma) = \int_\sigma^{\sigma+x(\sigma)} \Phi'(t)dt \leqslant \Phi'(\sigma + x(\sigma))x(\sigma) = 1,$$

тобто $\Phi(\sigma) \sim \Phi(\sigma + x(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$. Тому, врахувавши другу з нерівностей (3), отримуємо

$$T_\Phi(F) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln F(\sigma)}{\Phi(\sigma + x(\sigma))} \leqslant \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\sigma + \ln\tilde{\mu}(\sigma + x(\sigma)) - \ln x(\sigma)}{\Phi(\sigma + x(\sigma))} =$$

$$= \varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\tilde{\mu}(\sigma + x(\sigma)) + \ln\Phi'(\sigma + x(\sigma))}{\Phi(\sigma + x(\sigma))} \leqslant t_\Phi(F),$$

що й вимагалось. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $\varphi(\sigma) = \Phi'(\sigma)$ і умова $\ln\varphi(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$ не виконується, тобто існує число $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\varphi(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Розглянемо довільну зростаючу до $+\infty$ послідовність λ таку, що $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant c$ для всіх цілих $n \geqslant 0$, де c – додатна стала, і покажемо, що існує цілий ряд Діріхле $F \in S_+$ вигляду (1), для якого $T_\Phi(F) > t_\Phi(F)$.

Вважаємо (це не зменшує загальності), що φ – зростаюча функція і $\varphi(0) = 0$. Приймемо $n_0 = 0$ і нехай

$$n_{k+1} = \min\{n \geqslant n_k + 1 : \lambda_n \geqslant \lambda_{n_k} + \sqrt{\lambda_{n_k}}\}, \qquad \varkappa_k = \varphi^{-1}(\lambda_{n_{k+1}})$$

для кожного цілого $k \geqslant 0$. Зрозуміло, що послідовності (n_k), (λ_{n_k}), $(\varkappa_k)$ є зростаючими до $+\infty$ і

$$\lambda_{n_k} + \sqrt{\lambda_{n_k}} \leqslant \lambda_{n_{k+1}} \leqslant \lambda_{n_k} + \sqrt{\lambda_{n_k}} + c, \qquad k \geqslant 0. \tag{5}$$

Нехай $T_0 = T_{n_0} = 1$. Для всіх цілих $k \geqslant 0$ приймемо

$$T_{k+1} = \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{e^{\varkappa_j(\lambda_{n_{j+1}} - \lambda_{n_j})}} = \frac{T_k}{e^{\varkappa_k(\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})}}, \tag{6}$$

$$T_n = T_k e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)}, \qquad n \in (n_k; n_{k+1}), \tag{7}$$

і нехай $a_n = T_n - T_{n+1}$, $n \geqslant 0$. Розглянемо ряд (1) з так означеними коефіцієнтами a_n і покажемо, що $F \in S_+$ і $T_\Phi(F) > t_\Phi(F)$.

Насамперед зрозуміло, що $a_n \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, і якщо $n \in [n_k; n_{k+1})$ та

$$m = m(n) = \max\{p \geqslant 0 : 2\lambda_{n_p} \leqslant \lambda_n\},$$

то згідно з (6) і (7),

$$0 \leqslant T_n^{\frac{1}{\lambda_n}} = \left(\frac{1}{e^{\varkappa_0(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})} \ldots e^{\varkappa_{k-1}(\lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k-1}})} e^{\varkappa_k(\lambda_n - \lambda_{n_k})}}\right)^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{e^{\varkappa_m(\lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m})} \ldots e^{\varkappa_m(\lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k-1}})} e^{\varkappa_m(\lambda_n - \lambda_{n_k})}}\right)^{\frac{1}{\lambda_n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{e^{\varkappa_m(\lambda_n - \lambda_{n_m})}}\right)^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqslant \frac{1}{e^{\varkappa_m/2}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Умова $T_n^{1/\lambda_n} \to 0$, $n \to \infty$ є необхідною і достатньою [1] для того, щоб ряд Діріхле (1) був цілим. Отже, $F \in S_+$.

Далі зауважимо, що або $\tilde{\mu}(\sigma) = T_0 e^{\sigma\lambda_0}$, або

$$\tilde{\mu}(\sigma) = \sup\{T(x)e^{\sigma x} : x > 0\} = \sup_{n \geqslant 0} \sup\{T(x)e^{\sigma x} : \lambda_n < x \leqslant \lambda_{n+1}\} =$$

$$= \sup_{n \geqslant 0} T_{n+1} e^{\sigma\lambda_{n+1}} = \max_{n \geqslant 0} T_{n+1} e^{\sigma\lambda_{n+1}},$$

тобто $\tilde{\mu}(\sigma) = \mu_G(\sigma)$, де $\mu_G(\sigma)$ – максимальний член ряду Діріхле

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n e^{s\lambda_n}.$$

Згідно з лемою для всіх $\sigma \in [\varkappa_k; \varkappa_{k+1})$ і $k \geqslant 0$, використовуючи позначення $\nu(\sigma) = \nu_G(\sigma)$, отримуємо

$$\lambda_{\nu(\sigma)} = \lambda_{n_{k+1}} = \varphi(\varkappa_k) \leqslant \varphi(\sigma),$$

$$\lambda_{\nu(\sigma)} = \lambda_{n_{k+2}} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+2}}} = \varphi(\varkappa_{k+1}) \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+2}}} > \varphi(\sigma) \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+2}}}.$$

З (5) бачимо, що $\lambda_{n_{k+1}} \sim \lambda_{n_{k+2}}$, $k \to \infty$, тобто $\lambda_{\nu(\sigma)} \sim \varphi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Оскільки [3, с. 182],

$$\ln \mu_G(\sigma) - \ln \mu_G(\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(x)} dx,$$

то при $\sigma \to +\infty$

$$\ln \tilde{\mu}(\sigma) \sim \ln \mu_G(\sigma) \sim \int_0^{\sigma} \lambda_{\nu(x)} dx \sim \int_0^{\sigma} \varphi(x) dx \sim \Phi(\sigma),$$

тобто $t_{\Phi}(F) = 1$.

З іншого боку, ще раз використавши лему, отримуємо $\tilde{\mu}(\varkappa_k) = \mu_G(\varkappa_k) = T_n e^{\varkappa_k \lambda_n}$ для всіх $n \in [n_k; n_{k+1}]$, тому згідно з (2) і (5)

$$\begin{aligned} F(\varkappa_k) &\geqslant \int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} T(x) e^{\varkappa_k x} dx \geqslant (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}) \inf_{x \in (\lambda_{n_k}; \lambda_{n_{k+1}}]} T(x) e^{\varkappa_k x} \geqslant \\ &\geqslant \sqrt{\lambda_{n_k}} \min_{n \in [n_k; n_{k+1})} \inf_{x \in (\lambda_n; \lambda_{n+1}]} T(x) e^{\varkappa_k x} = \sqrt{\lambda_{n_k}} \min_{n \in [n_k; n_{k+1})} T_{n+1} e^{\varkappa_k \lambda_n} = \\ &= \sqrt{\lambda_{n_k}} \min_{n \in [n_k; n_{k+1})} T_n e^{\varkappa_k \lambda_n} e^{-\varkappa_k (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} \geqslant \sqrt{\lambda_{n_k}} \tilde{\mu}(\varkappa_k) e^{-\varkappa_k c}. \end{aligned} \tag{8}$$

Враховуючи що $\lambda_{n_k} \sim \lambda_{\nu(\sigma)} \sim \varphi(\sigma) \sim \lambda_{n_{k+1}}$, якщо $\sigma \in [\varkappa_k; \varkappa_{k+1})$ і $k \to \infty$, з (4) отримуємо

$$\varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\ln \lambda_{n_k}}{\ln \tilde{\mu}(\varkappa_k)} \geqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Оскільки $\varkappa_k = o(\Phi(\varkappa_k))$, $k \to \infty$, то з (8) і (9) бачимо, що $T_{\Phi}(F) \geqslant \frac{\varepsilon}{2} + 1 > t_{\Phi}(F)$. Теорему доведено.

1. *Шеремета М. М.* Про зростання цілого ряду Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – № 8. – С. 1149-1153.
2. *Мулява О. М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – № 11. – С. 1485-1494.
3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М., 1976.

ON THE GROWTH OF ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH NONNEGATIVE COEFFICIENTS

Oksana Muliava[1], Petro Filevych[2]

[1] *Ivan Franko State Pedagogic University of Drogobych, Stryis'ka Str., 3, Drogobych, Ukraine*
[2] *Ivan Franko National University of Lviv, Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine*

For a convex function Φ necessary and sufficient condition is established in order that

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln F(\sigma)}{\Phi(\sigma)}=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\tilde{\mu}(\sigma)}{\Phi(\sigma)},$$

for every entire Dirichlet series $F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{s\lambda_n}$, $s=\sigma+it$, such that $a_n\geqslant 0$ and the sequence (λ_n) is increasing to $+\infty$, where $\tilde{\mu}(\sigma)=\sup\{e^{\sigma x}\sum_{\lambda_n\geqslant x}a_n : x\geqslant 0\}$.

Key words: entire Dirichlet series, maximum term, central index, Φ-type.

Стаття надійшла до редколегії 23.04.2002
Прийнята до друку 02.10.2003