ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.103–108

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.103–108

УДК 517.524

ПРО ІНТЕГРОВНІСТЬ ОДНІЄЇ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТА ЇЇ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ РЕДУКЦІЙ

Ярема ПРИКАРПАТСЬКИЙ [1], **Мирослава КОПИЧ** [2]

[1] *Інститут математики НАН України,*
вул. Терещенківська, 3 01601 Київ, Україна
[1] *Гірничо-металургійна академія,*
алея Міцкевича, 30 30-059 Краків, Польща
[2] *Національний університет "Львівська політехніка",*
вул. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

Досліджено властивості інтегровності однієї гідродинамічної системи. Знайдено інваріантні нелокальні поліноміальні функціонали на многовиді розв'язків у точній формі. Обчислено алгебричні гамільтоніани для відповідних інваріантних векторних полів. Проаналізовано скінченновимірну редукцію системи на нелокальний підмноговид.

Ключові слова: гідродинамічні системи, редукції, нелокальні підмноговиди, інтегровність.

1. Розглянемо загальний вигляд гідродинамічних одновимірних потоків

$$d(u,h)^{\top}/dt = -\vartheta \operatorname{grad} H[u,h], \tag{1.1}$$

де $(u,h) \in M \subset H^{\infty}(\mathbf{R};\mathbf{R}^2)$, $t \in \mathbf{R}$ – еволюційний параметр, $\vartheta := \operatorname{antidiag}(\partial/\partial x, \partial/\partial x)$ – імплектичний оператор на функціональному многовиді M і $H \in D(M)$ – функція Гамільтона. Потоки (1.1) для спеціальних функцій Гамільтона мають багато застосувань, як показано в [1,2].

Розглянемо одновимірну динамічну систему гідродинамічних рівнянь

$$\left.\begin{array}{rcl} u_t & = & h_{xxx} - u_x u \\ h_t & = & -(uh)_x \end{array}\right\} = K[u,v], \tag{1.2}$$

де $(u,h) \in M \to H^{\infty}(\mathbf{R};\mathbf{R}^2)$, $t \in \mathbf{R}$ – еволюційний параметр.

Динамічна система (1.2) володіє локальними консервативними законами

$$H_1 = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} u dx, \quad \tilde{H}_1 = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} h dx, \quad H_2 = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} uh dx, \quad H_3 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} (h_x^2 + u^2 h) dx,$$

які комутують стосовно канонічної дужки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$, визначеної імплектичним оператором $\vartheta := \mathrm{antidiag}(\partial/\partial x, \partial/\partial x)$, де

$$\{F,G\}_\vartheta = (\mathrm{grad}F, \vartheta \mathrm{grad}G) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_0+2\pi} < \mathrm{grad}F, \vartheta \mathrm{grad}G > dx$$

для будь-яких $F,G \in D(M)$, з функцією Гамільтона $H = H_3$, що генерує потік (1.2)

$$(u_t, h_t)^T = -\vartheta \mathrm{grad}H_3[u,h] = K[u,v].$$

Для динамічної системи (1.2) можна записати [2] скалярне зображення типу Лакса

$$l_t = [p(l), l].$$

Тут

$$\begin{array}{rcl} l & = & h^{-1}\partial + u, \\ p(l) & = & -u\partial - hh_{xx} + h_x^2/2 \end{array} \tag{1.3}$$

Схема скінченновимірної редукції системи (1.2) на підмноговид M_2, визначений множиною критичних точок

$$M_2 = \{(u,h) \in M : \mathrm{grad}\mathcal{L}_3[u,h] = 0\} \tag{1.4}$$

функціонала $\mathcal{L}_3 \in D(M)$

$$\mathcal{L}_3 = \int\limits_{x_0}^{x_0+2\pi} \mathcal{L}_3[u,h]dx = c_1(H_1 + \tilde{H}_1) + c_2H_2 + c_3H_3,$$

де $\mathrm{grad}\mathcal{L}_3[u] := \delta\mathcal{L}_3(u, u^{(1)}, ...u^{(N+1)})/\delta u$ варіаційна похідна Ейлера

$$\delta(\cdot)/\delta u = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(d/dx)^k\partial(\cdot)/\partial u^{(k)},$$

описана в [3]. Теорія скінченновимірних редукцій на інваріантні локальні функціональні підмноговиди може бути узагальнена на випадок, коли система (1.2) володіє нелокальними консервативними законами, як наприклад, власні значення відповідної спектральної задачі типу Лакса. Розширена функція Лагранжа $\mathcal{L}_\lambda$, яка містить ці власні значення, буде вже нелокальним функціоналом на нескінченновимірному функціональному многовиді M, залежним від відповідних нелокальних функціоналів. Тому природно розглядати так звану задачу нелокальної редукції [4] системи (1.2) на відповідні критичні точки нелокального функціонала Лагранжа $\mathcal{L}_\lambda$. Для того щоб ефективно розв'язати цю задачу, можна застосувати метод розширення фазового простору. Тобто, вихідний фазовий простір M розширюють новими фазовими просторовими змінними, що містять згадані вище власні функції і їх приєднані. Отримуємо новий "нелокальний" фазовий простір M_λ, стосовно якого функціонал Лагранжа $\mathcal{L}_\lambda$ буде вже локальним функціоналом на M_λ. Отже, можемо використати безпосередньо схему редукцій Лагранжа, описану для нашого випадку без суттєвих змін, тому властивості інтегровності вихідної системи (1.2) можна досліджувати на відповідних скінченновимірних підмноговидах детальніше.

2. Нелокальна редукція. Розглянемо нелокальне розширення фазового простору за допомогою нових змінних $(f,g) \in W_2^1$ разом з їх приєднаними $(f^*,g^*) \in W_2^1$ і сформулюємо вихідну спектральну задачу для операторів l і $p(l)$ (1.3)

$$ly = -\lambda y, \qquad y_t = p(l)y,$$

і приєднану спектральну задачу для спряжених операторів l^* і $p^*(l)$

$$l^*y^* = -\lambda y^*, \qquad y_t^* = p^*(l)y^*,$$

де

$$l^* = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h} + u, \qquad p^*(l) = \frac{\partial}{\partial x}u - h_{xx}h + \frac{h_x^2}{2}$$

за умови, що

$$\frac{dY}{dx} = L[u,h;\lambda]Y, \qquad \frac{dY}{dt} = P(L)Y, \tag{2.1}$$

$$Y = \begin{pmatrix} f & g \\ f^* & g^* \end{pmatrix}, \qquad L[u,h;\lambda] = \begin{pmatrix} -(u+\lambda)h & 0 \\ 0 & \frac{h_x}{h} + (u+\lambda)h \end{pmatrix},$$

$$P(L) = \begin{pmatrix} -u\partial - (h_{xx}h - \frac{h_x^2}{2}) & 0 \\ 0 & -u_x - u\partial + h_{xx}h - \frac{h_x^2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(\lambda+u)uh - (h_{2x}h - \frac{h_x^2}{2}) & 0 \\ 0 & -(\lambda+u)uh - \frac{1}{h}(uh)_x + h_{2x}h - \frac{h_x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Нехай $\sigma_r(L) = \{\lambda_j \in \mathbf{R} : j = \overline{1,N}\}$ дійсна частина спектра $\sigma(L)$ періодичної задачі (2.1) з множиною 2π-періодичних функцій $(f_j,g_j) \in W_2^1$, $j = \overline{1,N}$, де $N \in \mathbf{Z}_+$ – фіксоване. Тоді правильні рівняння

$$\frac{dY_j}{dx} = L[u,h;\lambda_j]Y_j, \qquad \frac{dY_j}{dt} = P(L)|_{\lambda=\lambda_j}Y_j,$$

де

$$Y_j = \begin{pmatrix} f_j & g_j \\ f_j^* & g_j^* \end{pmatrix}, \ Y_j(x+2\pi;\lambda_j) = Y_j(x;\lambda_j), \ \sup_{x\in\mathbf{R}} ||Y_j(x;\lambda_j)|| < \infty$$

для усіх $x \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1,N}$. Враховуючи, що функціонал $\mathrm{tr}S(x;\lambda) = \Delta(\lambda)$, де $S(x;\lambda)$ – матриця монодромії для оператора $L(u,h;\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, є породжуючим функціоналом для законів збереження динамічної системи (2.1), можна явно знайти нормуючі коефіцієнти

$$\xi(\lambda_j) = \mathrm{tr}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} S(x;\lambda)\frac{d}{d\lambda}L(u,h;\lambda)|_{\lambda=\lambda_j}dx, \ j = \overline{1,N}$$

для власних значень як нелокальних законів збереження. Використаємо той факт, що матрицю $S(x;\lambda)$ можна зобразити як $S(x;\lambda) = YC(\lambda)Y^{-1}$, де $C(\lambda)$ деяка стала матриця, а $Y = \begin{pmatrix} f & g \\ f^* & g^* \end{pmatrix}$ фундаментальний розв'язок (2.1). Приймаючи, наприклад, $C(\lambda) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ можна отримати

$$\xi(\lambda_j) = \mathrm{tr} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} S(x;\lambda) \frac{d}{d\lambda} L(u,h;\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \frac{2h}{f_j g_j^* - f^* j g_j} (f_j g_j^* + f_j^* g_j) dx = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \frac{2h}{detY} (f_j g_j^* + f_j^* g_j) dx.$$

Використовуючи $(\det Y)_x = \mathrm{tr} L(u,h;\lambda) detY$, знаходимо $\det Y|_{\lambda=\lambda_j} = hK_j^2(t)$ для деяких функцій $K_j(t), j = \overline{1,N}$, $t \in \mathbf{R}$. Тоді одержимо

$$\xi(\lambda_j) = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \frac{2}{K_j^2(t)} (f_j g_j^* + f_j^* g_j) dx \equiv 2 \int_{x_0}^{x_0+2\pi} (\tilde{f}_j \tilde{g}_j^* + \tilde{f}_j^* \tilde{g}_j) dx,$$

де

$$\tilde{f}_j = f_j / K_j, \quad \tilde{g}_j = g_j / K_j, \quad \tilde{f}_j^* = f_j^* / K_j, \quad \tilde{g}_j^* = g_j^* / K_j. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.1) залишаються інваріантними стосовно перетворення (2.2) на деякому підмноговиді розв'язків $M_c \subset M$. Тоді рівняння Лакса (2.1) можна переписати як

$$\frac{d\tilde{Y}_j}{dx} = L(\lambda_j) \tilde{Y}_j, \quad \frac{d\tilde{Y}_j}{dt} = P(L)|_{\lambda=\lambda_j} \tilde{Y}_j, \tag{2.3}$$

де $\tilde{Y}_j = \begin{pmatrix} \tilde{f}_j & \tilde{g}_j \\ \tilde{f}_j^* & \tilde{g}_j^* \end{pmatrix}$. Знайдемо в явній формі нелокальні функціонали $\lambda_j \in D(M)$, $j = \overline{1,N}$. Оскільки нормуючі коефіцієнти $\xi(\lambda_j)$, $j = \overline{1,N}$ інваріантні функціонали на многовиді M динамічної системи (1.2), то їх можна пронормувати одиницею. З цього факту і (2.3) отримуємо, що

$$\lambda_j = -\int_{x_0}^{x_0+2\pi} [(\tilde{f}_j \tilde{g}_j^* + \tilde{f}_j^* \tilde{g}_j) + h^{-1} (\tilde{f}_{jx} \tilde{g}_j^* + \tilde{f}_j^* \tilde{g}_{jx})] dx,$$

$j = \overline{1,N}$ відповідні нелокальні поліноміальні функціонали на M_c.

Розглянемо скінченновимірну редукцію системи (1.2) на нелокальний підмноговид $\bar{M}_{N,c}$, визначений виразом типу (1.4) для функції Лагранжа

$$\mathcal{L}_{\lambda,c} = c_1 \int_{x_0}^{x_0+2\pi} u dx + c_1' \int_{x_0}^{x_0+2\pi} h dx + c_2 \int_{x_0}^{x_0+2\pi} uh dx +$$

$$+ \frac{c_3}{2} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} (h_x^2 + u^2 h) dx - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j + \sum_{j=1}^{N} s_j \left(\xi(\lambda)|_{\lambda=\lambda_j} - 1 \right),$$

де $s_j \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1,N}$ відповідні множники Лагранжа. Оскільки підмноговид $\bar{M}_{N,c}$ строго нелокальний, то для його аналізу використаємо метод розширення базового фазового простору M_c до простору $\bar{M}_{N,c}^{ext}$ множиною змінних $\left\{\tilde{f}_j, \tilde{f}_j^*, \tilde{g}_j, \tilde{g}_j^* : j = \overline{1,N}\right\}$ як додатковими координатами на $\bar{M}_{N,c}^{ext}$. Враховуючи (1.4), локальний інваріантний скінченновимірний підмноговид визначимо як

$$\bar{M}_{N,c}^{ext} = \{(u, h; \tilde{f}_j, \tilde{f}_j^*, \tilde{g}_j, \tilde{g}_j^*) \in M_c^{ext} : j = \overline{1,N}, \operatorname{grad}\mathcal{L}_{\lambda,c}[u] = 0\},$$

іншими словами на $\bar{M}_{N,c}^{ext}$ правильні рівності

$$\begin{aligned}
&\delta\mathcal{L}_{\lambda,c}/\delta u = c_1 + c_2 h + c_3 uh + \sum_{j=1}^{N}(\tilde{f}_j\tilde{g}_j^* + \tilde{f}_j^*\tilde{g}_j) = 0,\\
&\delta\mathcal{L}_{\lambda,c}/\delta h = c_1' + c_2 u + c_3\frac{u^2}{2} - c_3 h_{xx} - \sum_{j=1}^{N} h^{-2}(\tilde{f}_{jx}\tilde{g}_j^* + \tilde{f}_j^*\tilde{g}_{jx}) = 0,\\
&\delta\mathcal{L}_{\lambda,c}/\delta f_j = u\tilde{g}_j^* + 2s_j\tilde{g}_j^* - (h^{-1}\tilde{g}_j^*)_x = 0,\\
&\delta\mathcal{L}_{\lambda,c}/\delta f_j^* = u\tilde{g}_j + 2s_j\tilde{g}_j + (h^{-1}\tilde{g}_{jx}) = 0,\\
&\delta\mathcal{L}_{\lambda,c}/\delta g_j = u\tilde{f}_j^* + 2s_j\tilde{f}_j^* - (h^{-1}\tilde{f}_j^*)_x = 0,\\
&\delta\mathcal{L}_{\lambda,c}/\delta g_j^* = u\tilde{f}_j + 2s_j\tilde{f}_j + h^{-1}\tilde{f}_{jx} = 0,
\end{aligned}$$

звідки знаходимо $2s_j = \lambda_j$, $j = \overline{1,N}$. Обчислимо алгебричні гамільтоніани $h^{(x)}$ і $h^{(t)}$ для векторних полів d/dx і d/dt на $\bar{M}_{N,c}^{ext}$

$$h^{(x)} = -c_1 u - c_1' h - c_2 uh - \frac{c_3}{2}u^2 h + \frac{c_3}{2}h_x^2 - \sum_{j=1}^{N}(u + \lambda_j)(\tilde{f}_j\tilde{g}_j^* + \tilde{f}_j^*\tilde{g}_j), \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
h^{(t)} = {} & -c_1 h_{xx} + c_1' uh + \frac{c_1}{2}u^2 - c_2 hh_{xx} + \frac{c_2}{2}h_x^2 - c_3 uhh_{xx} - c_2 u^2 h - \frac{c_3}{2}u^3 h -\\
& - \sum_{j=1}^{N}(u^2 + \lambda_j u + \frac{h_x^2}{2h})(\tilde{f}_j\tilde{g}_j^* + \tilde{f}_j^*\tilde{g}_j).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Симплектична структура на підмноговиді $\bar{M}_{N,c}^{ext}$ у канонічних змінних $(q, p) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^{2N} \times \mathbf{R}^{2N}$ набуває стандартного вигляду

$$\omega^{(2)} = dp_1 \wedge dq_1 + \sum_{j=1}^{N} dp_{2j} \wedge dq_{2j} + \sum_{j=1}^{N} dp_{3j} \wedge dq_{3j},$$

де

$$q_1 = h, \quad p_1 = c_2 h_x, \quad q_{2j} = \tilde{f}_j, \quad p_{2j} = \tilde{g}_j^*/h, \quad q_{3j} = \tilde{g}_j, \quad p_{3j} = \tilde{f}_j^*/h. \tag{2.6}$$

Отже, можна переписати функції Гамільтона у цих змінних $h^{(t)}$ і $h^{(x)}$ для векторних полів d/dx і d/dt, визначених (2.4-2.5), і виписати відповідні рівняння Гамільтона в нових канонічних координатах (2.6) з метою вивчення їхніх аналітичних властивостей та інтегровності за Ліувіллем-Арнольдом на скінченновимірному підмноговиді $\bar{M}^{ext}_{N,c}$.

---

1. *Prykarpatsky A., Blackmore D., Bogoliubov N.* Hamiltonian Structure of Benney type Hydrodynamic and Boltzmann-Vlasov equations on an axis and Applications to Manufacturing Science//Open systems and Information Dynamics. – 1999. – Vol. 6. – N 2. – P. 335-373.
2. *Prykarpatsky A., Brzychczy S., Samoylenko V.* Reduction method in conservative dynamical systems// Ukr. Math. Journal – 2000. – T.52. – N 3. – C. 720-725.
3. *Prykarpatsky Y. A., Prytula M. M., Revenko V. P.* About a scalar Lax type representation for one class of hydrodynamic systems in one dimension// Proceedings of NAS of Ukraine. – 2001. – N 8. – C. 72-75.(in English).
4. *Prykarpatsky A., Mykytiuk I.* Algebraic integrability of nonlinear Dynamical systems on Manifolds: classical and quantum aspects. – Kluwer. – 1998.

ON INTEGRABILITY OF SOME HYDRODYNAMIC SYSTEM AND ITS FINITE DIMENSIONAL REDUCTIONS

Yarema Prykarpatsky[1], Myroslava Kopych[2]

[1]*Institute of Mathematics of NAS,*
Tereshchenkivska str., 3, 01601 Kyiv, Ukraine
[1]*University of Mining and Metallurgy,*
al.Mickiewicza 30, 30-059 Krakow, Poland
[2]*Lviv Polytechnic National University,*
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

Integrability of one hydrodynamical system is investigated. Nonlocal invariant polynomial functionals on the solutions submanifold are found in exact form. Algebraic Hamiltonians for the corresponding vector fields are calculated. System's finite dimensional reduction on the nonlocal submanifold is described.

Key words: hydrodynamical systems, reductions, nonlocal submanifolds, integrability.

Стаття надійшла до редколегії 21.12.2002
Прийнята до друку 02.10.2003