ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.117–128

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.117–128

УДК 517.95

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ В ПРЯМОКУТНИКУ

Роман САГАЙДАК
*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Визначено умови існування та умови єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого коефіцієнта при старших похідних у двовимірному рівнянні параболічного типу. Припущено, що цей коефіцієнт залежить лише від часової змінної.
Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння.

У праці розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу старшого коефіцієнта в повному двовимірному рівнянні параболічного типу з класичними крайовими умовами другого роду. Аналогічну одновимірну задачу з нелокальною умовою перевизначення досліджено в [1]. Випадок рівняння без молодших членів, але з умовами перевизначення в інтегральній формі розглянуто в [2], а в [3] досліджено n-вимірну обернену задачу для однорідного рівняння теплопровідності з крайовою умовою першого роду та умовою перевизначення другого роду в зв'язній області $\Omega \subset R^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$.

1. В області $\Omega_T = \{(x,y,t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу визначення функцій $(a,u) \in C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}_T), a(t) > 0, t \in [0,T]$, які задовольняють рівняння

$$u_t = a(t)\Delta u + b_1(x,y,t)u_x + b_2(x,y,t)u_y + c(x,y,t)u + f(x,y,t),\ (x,y,t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in [0,h] \times [0,l], \quad (2)$$

крайові умови

$$u_x(0,y,t) = \mu_1(y,t),\ u_x(h,y,t) = \mu_2(y,t),\ (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \quad (3)$$

$$u_y(x,0,t) = \mu_3(x,t),\ u_y(x,l,t) = \mu_4(x,t),\ (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \quad (4)$$

та умову перевизначення

$$u(0,0,t) = \nu(t),\ t \in [0,T]. \quad (5)$$

Стосовно вихідних даних задачі припускатимемо виконання таких умов:

$(A1)\, \varphi \in C^2(\overline{D})$, де $D = (0,h) \times (0,l)$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,l] \times [0,T])$, $i = 1,2$, $\mu_i \in C^{2,1}([0,h] \times [0,T])$, $i = 3,4$, $\nu \in C^1[0,T]$, $f \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, b_i, $i = 1,2$, $c \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$;

$(A2)$ $\Delta\varphi(x,y) > 0$, $(x,y) \in \overline{D}$, $\nu'(t) - b_1(0,0,t)\mu_1(0,t) - b_2(0,0,t)\mu_3(0,t) - c(0,0,t)\nu(t) - f(0,0,t) > 0, t \in [0,T]$;

$(A3)$ $\varphi_x(0,y) = \mu_1(y,0), \varphi_x(h,y) = \mu_2(y,0), \varphi_y(x,0) = \mu_3(x,0), \varphi_y(x,l) = \mu_4(x,0)$, $\mu_{1y}(0,t) = \mu_{3x}(0,t), \mu_{2y}(0,t) = \mu_{3x}(h,t), \mu_{1y}(l,t) = \mu_{4x}(0,t), \mu_{2y}(l,t) = \mu_{4x}(h,t), \nu(0) = \varphi(0,0)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови $(A1)$ – $(A3)$. Тоді задача (1)-(5) має розв'язок при $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$, де T_0, $0 < T_0 \leqslant T$ визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Обернену задачу (1)–(5) зведемо до системи рівнянь стосовно невідомих функцій $a(t)$, $u(x,y,t)$ і похідних від функції $u(x,y,t)$ до другого порядку включно. Для цього тимчасово припустимо, що $a(t)$ відома.

Позначимо

$$G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau) = \frac{1}{4\pi(\alpha(t)-\alpha(\tau))} \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) + \right.$$

$$+(-1)^i \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\Bigg)\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^j \exp\left(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}\right)\right), \tag{6}$$

де $i, j = 1,2$, $\alpha(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau$.

Легко бачити, що $G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ є функцією Гріна для рівняння

$$u_t = a(t)\Delta u + f(x,y,t) \tag{7}$$

з крайовими умовами (3), (4).

Використовуючи функцію Гріна G_{22}, пряму задачу (1)-(4) зведемо до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,y,t) = \int\limits_0^l \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta -$$

$$-\int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a(\tau)\mu_3(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)a(\tau)\mu_4(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)u_\xi+b_2(\xi,\eta,\tau)u_\eta+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau.$$

Зауважимо, що функцію $u(x,y,t)$ можна зобразити так:

$$u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau, \qquad (8)$$

де $u_0(x,y,t)$ – розв'язок задачі (7), (2)-(4) і $v=u_x$, $w=u_y$. Продиференціювавши рівність (8) за x, одержимо рівняння

$$v(x,y,t)=u_{0x}(x,y,t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau. \qquad (9)$$

Щоб знайти похідну $u_{0x}(x,y,t)$ в (9), продиференціюємо рівняння (7), умови (2), (4) за x і зробимо заміну $u_x=z$ в задачі, яку отримаємо після диференціювання. Стосовно z матимемо задачу

$$z_t=a(t)\Delta z+f_x(x,y,t),\quad (x,y,t)\in\Omega_T,$$

$$z(x,y,0)=\varphi_x(x,y,0),\quad (x,y)\in\overline{D},$$

$$z(0,y,t)=\mu_1(y,t),\ z(h,y,t)=\mu_2(y,t)\quad (y.t)\in[0,l]\times[0,T],$$

$$z_y(x,0,t)=\mu_{3x}(x,t),\ z_y(x,l,t)=\mu_{4x}(x,t)\quad (x.t)\in[0,h]\times[0,T].$$

Записавши розв'язок цієї задачі за допомогою функції Гріна G_{12}, повернувшись до старих позначень та підставивши його в (9), знаходимо, що

$$v(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G_{12\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l G_{12\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\tau)\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau-\int_0^t\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)a(\tau)\mu_{3\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)a(\tau)\mu_{4\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau. \qquad (10)$$

Таким самим способом знаходимо співвідношення для $w(x,y,t)$

$$w(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$

$$-\int_0^t\int_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{21\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)a(\tau)\mu_3(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{21\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)a(\tau)\mu_4(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{22y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau. \qquad (11)$$

Продиференціюємо (10) за x. Проінтегрувавши одержану рівність частинами і ввівши позначення $u_{xx}=p, u_{yy}=q, u_{xy}=r$, отримаємо рівняння

$$p(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)(\mu_{1\tau}(\eta,\tau)-$$

$$-a(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau))d\eta d\tau + \int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)(\mu_{2\tau}(\eta,\tau) - a(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau))d\eta d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)a(\tau)\mu_{3\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau + \int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)a(\tau)\mu_{4\xi\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{12x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)((f_\xi(\xi,\eta,\tau) + b_{1\xi}(\xi,\eta,\tau) + c(\xi,\eta,\tau))v +$$

$$+b_1(\xi,\eta,\tau)p + b_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)w + b_2(\xi,\eta,\tau)r + c_\xi(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau. \qquad (12)$$

Таким самим способом знаходимо співвідношення для $q(x,y,t)$

$$q(x,y,t) = \int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\eta\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta -$$

$$-\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta.\tau)d\eta d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau))d\eta d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)(\mu_{3\tau}(\xi,\tau) - a(\tau)\mu_{3\xi\xi}(\xi,\tau))d\xi d\eta +$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)(\mu_{4\tau}(\xi,\tau) - a(\tau)\mu_{4\xi\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{21y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(f_\eta(\xi,\eta\tau) + b_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)v + b_1(\xi,\eta,\tau)r +$$

$$+(b_{2\eta}(\xi,\eta,\tau) + c(\xi,\eta,\tau))w + b_2(\xi,\eta,\tau)q + c_\eta(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau. \qquad (13)$$

Для знаходження мішаної похідної u_{xy} тимчасово припустимо, що коефіцієнти b_i, $i = 1,2$, c достатньо гладкі. Продиференціюємо рівняння (1) й умову (2) за x і за y, умову (3) за y, а умову (4) за x. Зробивши заміну $u_{xy} = r$, одержимо задачу

$$r_t = a(t)\Delta r + (b_{1x}(x,y,t) + b_{2y}(x,y,t) + c(x,y,t))r + b_1(x,y,t)r_x + b_2(x,y,t)r_y +$$

$$+b_{1y}(x,y,t)u_{xx} + b_{2x}(x,y,t)u_{yy} + (b_{1xy}(x,y,t) + c_y(x,y,t))u_x + (b_{2xy}(x,y,t) +$$

$$+c_x(x,y,t))u_y + c_{xy}(x,y,t)u + f_{xy}(x,y,t), \quad (x,y,t) \in \Omega_T,$$

$$r(x,y,0)=\varphi_{xy}(x,y,0),\quad (x,y)\in\overline{D},$$
$$r(0,y,t)=\mu_{1y}(y,t),\ r(h,y,t)=\mu_{2y}(y,t)\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],$$
$$r(x,0,t)=\mu_{3x}(x,t),\ r(x,l,t)=\mu_{4x}(x,t)\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T].$$

Записуючи розв'язок цієї задачі за допомогою функції Гріна та інтегруючи частинами, отримаємо

$$r(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\varphi_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)a(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau))d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)a(\tau)\mu_{3\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)a(\tau)\mu_{4\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big(c(\xi,\eta,\tau)r+c_\xi(\xi,\eta,\tau)w\big)d\xi d\eta d\tau-$$
$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h\Big(G_{11\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big(f_\eta(\xi,\eta,\tau)+b_1(\xi,\eta,\tau)r+b_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)v+$$
$$+c_\eta(\xi,\eta,\tau)u\big)+G_{11\eta}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\big(b_2(\xi,\eta,\tau)r+b_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)w\big)\Big)d\xi d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\Big(G_{11}(x,y,t,h,\eta,\tau)\big(f_\eta(h,\eta,\tau)+\mu_{2\eta}(\eta,\tau)b_1(h,\eta,\tau)+$$
$$+\mu_2(\eta,\tau)b_{1\eta}(h,\eta,\tau)+c_\eta(h,\eta,\tau)u(h,\eta,\tau)\big)-G_{11}(x,y,t,0,\eta,\tau)\big(f_\eta(0,\eta,\tau)+$$
$$+\mu_{1\eta}(\eta,\tau)b_1(0,\eta,\tau)+\mu_1(\eta,\tau)b_{1\eta}(0,\eta,\tau)+c_\eta(0,\eta,\tau)u(0,\eta,\tau)\big)\Big)d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h\Big(G_{11}(x,y,t,\xi,l,\tau)\big(\mu_{4\xi}(\xi,\tau)b_2(\xi,l,\tau)+\mu_4(\xi,\tau)b_{2\xi}(\xi,l,\tau)\big)-$$

$$-G_{11}(x,y,t,\xi,0,\tau)\big(\mu_{3\xi}(\xi,\tau)b_2(\xi,0,\tau)+\mu_3(\xi,\tau)b_{2\xi}(\xi,0,\tau)\big)\Big)d\xi d\tau. \qquad (14)$$

З (14) видно, що ніяких додаткових припущень на гладкість коефіцієнтів рівняння (1) не потрібно. Додаючи (12), (13), знаходимо, що

$$\Delta u=\int_0^l\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)\Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,0,\eta,\tau)\mu_{1\tau}(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^l G_{22}(x,y,t,h,\eta,\tau)\mu_{2\tau}(\eta,\tau)d\eta d\tau-\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,0,\tau)\mu_{3\tau}(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,l,\tau)\mu_{4\tau}(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{12x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(f_\xi(\xi,\eta,\tau)+$$
$$+b_{1\xi}(\xi,\eta,\tau)v+b_1(\xi,\eta,\tau)p+b_{2\xi}(\xi,\eta,\tau)w+b_2(\xi,\eta,\tau)r+c_\xi(\xi,\eta,\tau)u+$$
$$+c(\xi,\eta,\tau)v)d\xi d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{21y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)(f_\eta(\xi,\eta,\tau)+b_{1\eta}(\xi,\eta,\tau)v+$$
$$+b_1(\xi,\eta,\tau)r+b_{2\eta}(\xi,\eta,\tau)w+b_2(\xi,\eta,\tau)q+c_\eta(\xi,\eta,\tau)u+c(\xi,\eta,\tau)w)d\xi d\eta d\tau. \qquad (15)$$

Використаємо умову перевизначення (5). Прийнявши в (1) $x=0,y=0$, одержуємо

$$u_t(0,0,t)=a(t)\Delta u(0,0,t)+b_1(0,0,t)u_x(0,0,t)+b_2(0,0,t)u_y(0,0,t)+c(0,0,t)u(0,0,t)+$$
$$+f(0,0,t).$$

Продиференціювавши (5) за t, матимемо

$$u_t(0,0,t)=\nu'(t).$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівностей і враховуючи крайові умови (3), (4) та умову перевизначення (5), одержуємо

$$a(t)\Delta u(0,0,t)+b_1(0,0,t)\mu_1(0,t)+b_2(0,0,t)\mu_3(0,t)+c(0,0,t)\nu(t)+f(0,0,t)=$$
$$=\nu'(t),t\in[0,T]. \qquad (16)$$

З припущення $(A2)$ випливає, що перший доданок у (15) додатний, а всі інші дорівнюють нулю при $t=0$. Отже, існує таке T_1, $0<T_1\leqslant T$, що правильна нерівність

$$\Delta u(0,0,t)\geqslant\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^h G_{22}(0,0,t,\xi,\eta,0)\Delta\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta\geqslant\frac{1}{2}\min_{\overline{D}}\Delta\varphi(x,y)>0, \qquad (17)$$

$t\in[0,T_1]$. Враховуючи (17), з (16) одержуємо рівняння стосовно невідомої функції $a(t)$

$$a(t)=\frac{\nu'(t)-b_1(0,0,t)\mu_1(0,t)-b_2(0,0,t)\mu_3(0,t)-c(0,0,t)\nu(t)-f(0,0,t)}{\Delta u(0,0,t)}, \qquad (18)$$

$t \in [0, T_1]$.

Отже, задача (1)-(5) зведена до системи рівнянь (8), (10)-(14), (18) і розв'язок задачі (1)-(5) та функції $v = u_x(x,y,t), w = u_y(x,y,t), p = u_{xx}(x,y,t), q = u_{yy}(x,y,t), r = u_{xy}(x,y,t)$ задовольняють цю систему. З іншого боку, якщо $(a,u,v,w,p,q,r) \in C[0,T_1] \times (C(\overline{\Omega}_{T_1}))^6, a(t)>0, t \in [0,T_1]$ – розв'язок системи (8), (10)-(14), (18) то, використовуючи властивість єдиності розв'язку систем інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, легко довести, що $v(x,y,t) = u_x(x,y,t)$, $w(x,y,t) = u_y(x,y,t)$, $p(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t)$, $q(x,y,t) = u_{yy}(x,y,t)$, $r(x,y,t) = u_{xy}(x,y,t)$ і функція $u(x,y,t)$ є розв'язком рівняння

$$u(x,y,t) = u_0(x,y,t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)(b_1(\xi,\eta,\tau)u_\xi + b_2(\xi,\eta,\tau)u_\eta + c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau. \qquad (19)$$

На підставі властивостей об'ємних потенціалів [4, c.19] знаходимо, що $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_{T_1})$ і є розв'язком задачі (1)-(4). Виконання умови (5) випливає з рівняння (18). Отже, задача (1)-(5) та система рівнянь (8), (10)-(14), (18) еквівалентні.

Застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [5, c.616] до системи рівнянь (8), (10)-(14), (18). Передусім визначимо апріорні оцінки розв'язків цієї системи.

Використовуючи (17), з (18) на підставі рівності

$$\int_0^l \int_0^h G_{22}(x,y,t,\xi,\eta,0)d\xi d\eta = 1$$

знаходимо оцінку $a(t)$ зверху

$$a(t) \leqslant \frac{2 \max\limits_{t\in[0,T]} (\nu'(t) - b_1(0,0,t)\mu_1(0,t) - b_2(0,0,t)\mu_3(0,t) - c(0,0,t)\nu(t) - f(0,0,t))}{\min\limits_{(x,y)\in\overline{D}} \Delta\varphi(x,y)}.$$

Отож,

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad t \in [0, T_1]. \qquad (20)$$

Щоб оцінити $a(t)$ знизу, попередньо визначимо оцінки $|u(x,y,t)|$, $|v(x,y,t)|$, $|w(x,y,t)|$, $|p(x,y,t)|$, $|q(x,y,t)|$ та $|r(x,y,t)|$.

З (8) знаходимо, що

$$|u(x,y,t)| \leqslant C_1 + C_2 \int_0^t \big(U_1(\tau) + U_2(\tau) + U_3(\tau)\big)d\tau, \quad t \in [0, T_1], \qquad (21)$$

де $U_1(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x,y,t)|, \quad U_2(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |v(x,y,t)|, \quad U_3(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |w(x,y,t)|.$

Нерівність (21) можна подати у такому вигляді:

$$|u(x,y,t)| \leqslant C_1 + C_3 \int_0^t \frac{U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}d\tau, \quad t \in [0,T_1]. \tag{22}$$

Аналогічно з (10), (11) отримуємо

$$|v(x,y,t)| \leqslant C_4 + C_5 \int_0^t \frac{U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}d\tau, \quad t \in [0,T_1], \tag{23}$$

$$|w(x,y,t)| \leqslant C_6 + C_7 \int_0^t \frac{U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}d\tau, \quad t \in [0,T_1]. \tag{24}$$

З (12)-(14) знаходимо

$$|p(x,y,t)| \leqslant C_8 + C_9 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} +$$

$$+C_{10} \int_0^t \frac{U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)+U_4(\tau)+U_6(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}d\tau, \; t \in [0,T_1], \tag{25}$$

$$|q(x,y,t)| \leqslant C_{11} + C_{12} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} +$$

$$+C_{13} \int_0^t \frac{U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)+U_5(\tau)+U_6(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}d\tau, \; t \in [0,T_1], \tag{26}$$

$$|r(x,y,t)| \leqslant C_{14} + C_{15} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} +$$

$$+C_{16} \int_0^t \frac{U_1(\tau)+U_2(\tau)+U_3(\tau)+U_4(\tau)+U_5(\tau)+U_6(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}d\tau, \quad t \in [0,T_1], \tag{27}$$

де $U_4(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |p(x,y,t)|, \quad U_5(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |q(x,y,t)|, \quad U_6(t) = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |r(x,y,t)|.$

Додавши (22)-(27) та ввівши позначення $\sum\limits_{i=1}^{6} U_i(t) = W(t)$, одержуємо

$$W(t) \leqslant C_{17} + C_{18} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}} + C_{19} \int_0^t \frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}, \quad t \in [0,T_1]. \tag{28}$$

З рівняння (18) випливає, що

$$a(t) \geqslant \frac{C_{20}}{U_4(t)+U_6(t)} \geqslant \frac{C_{20}}{W(t)},$$

де $C_{20} > 0$ - відома константа. Тоді $1 \leqslant \frac{a(t)W(t)}{C_{20}}$ і (28) набуде вигляду

$$W(t) \leqslant C_{17} + C_{21} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)(W(\tau)+\frac{1}{2})^2 d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}.$$

Застосовуючи спосіб викладений в [6], отримуємо оцінку

$$W(t) \leqslant M < \infty, \quad t \in [0, T_2],$$

де $T_2, 0 < T_2 \leqslant T_1$ – відома стала, що визначається константами C_{17}, C_{21} та A_1. З попередньої нерівності випливає, що

$$|u(x,y,t)| \leqslant M < \infty, |v(x,y,t)| \leqslant M < \infty, |w(x,y,t)| \leqslant M < \infty, |p(x,y,t)| \leqslant M < \infty,$$
$$|q(x,y,t)| \leqslant M < \infty, |r(x,y,t)| \leqslant M < \infty, (x,y,t) \in \overline{\Omega}_{T_2}. \tag{29}$$

За допомогою нерівностей (29) знаходимо

$$a(t) \geqslant A_0 > 0, \quad t \in [0, T_2]. \tag{30}$$

Використовуючи оцінки (20), (29), (30), з нерівності (17) легко визначити довжину проміжку $[0, T_1]$. Позначимо $T_0 = \min\{T_1, T_2\}$. Якщо є оцінки (20), (29), (30), то перевірку виконання умов теореми Шаудера проводимо аналогічно до [2]. Теорему доведено.

2. Розглянемо попередню задачу в класі функцій, неперервних за Гельдером. В області Ω_T дослідимо існування роз'язку оберненої задачі знаходження пари функцій $(a, u) \in H^{\gamma/2}[0,T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_T), 0 < \gamma < 1$, $a(t) > 0, t \in [0,T]$, що задовольняють умови (1)-(5).

Теорема 2. *Нехай, крім умов* $(A2), (A3)$, *виконується умова*

$(A1')$ $\varphi \in C^{2+\gamma}(\overline{D})$, $\mu_i \in C^{2+\gamma,\frac{1+\gamma}{2}}([0,l] \times [0,T])$, $i = 1,2$, $\mu_i \in C^{2+\gamma,\frac{1+\gamma}{2}}([0,h] \times [0,T])$, $i = 3,4$, $\nu \in C^{1+\gamma/2}[0,T]$, $f \in C^{2+\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$, b_i, $i = 1,2$, $c \in C^{1+\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$.

Тоді задача (1)-(5) має розв'язок у класі $H^{\gamma/2}[0,T_0] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0})$, *де* $T_0, 0 < T_0 \leqslant T$ *визначається вихідними даними задачі.*

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1, лише потрібно перевірити, що розв'язок системи (8), (10)-(14), (18) належить до класу функцій, неперервних за Гельдером. А саме, що $(a,u,v,w,p,q,r) \in H^{\gamma/2}[0,T_0] \times (H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0}))^6$.

Легко бачити, що для ядер $K_i(t,\tau)$ інтегральних рівнянь (8), (10)- (14) правильна нерівність

$$|K_i(t,\tau)| \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Тому згідно з теоремою 4 [5, с.422] отримуємо, що $(u, v, w, p, q, r) \in (H^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_{T_0}))^6$. Тоді з рівняння (18) випливає, що $a \in H^{\gamma/2}[0, T_0]$.

3. Перейдемо до питання єдиності розв'язку задачі (1)-(5).

Теорема 3. *Нехай виконується умова*

(A_4) b_i, $i = 1, 2$, $c \in C^{\gamma,\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$, $\nu'(t) - b_1(0,0,t)\mu_1(0,t) - b_2(0,0,t)\mu_3(0,t) - c(0,0,t)\nu(t) - f(0,0,t) \neq 0$, $\quad t \in [0, T]$.

Тоді розв'язок задачі (1)-(5) єдиний у класі $H^{\gamma/2}[0, T] \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки цієї задачі $(a_i, u_i), i = 1, 2$. Введемо такі позначення: $A(t) = a_1(t) - a_2(t), U(x, y, t) = u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t)$. Тоді пара функцій (A,U) задовольняє умови

$$U_t = a_1(t)\Delta U + A(t)\Delta u_2 + b_1(x, y, t)U_x + b_2(x, y, t)U_y + c(x, y, t)U, \quad (x, y, t) \in \Omega_T, \quad (31)$$

$$U|_{t=0} = U_x|_{x=0} = U_x|_{x=h} = U_y|_{y=0} = U_y|_{y=l} = 0, \quad (x, y, t) \in \overline{\Omega}_T \quad (32)$$

$$U(0, 0, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (33)$$

Використовуючи функцію Гріна G^*_{22} задачі (31), (32), її розв'язок зобразимо у вигляді

$$U(x, y, t) = \int_0^t \int_0^l \int_0^h G^*_{22}(x, y, t, \xi, \eta, \tau)A(\tau)\Delta u_2(\xi, \eta, \tau)d\xi d\eta d\tau. \quad (34)$$

Приймемо в (31) $x = 0, y = 0$. Тоді

$$-A(t)\Delta u_2(0, 0, t) = a_1(t)\Delta U(0, 0, t).$$

Використовуючи зображення розв'язку (34), матимемо

$$-A(t)\Delta u_2(0, 0, t) = a_1(t) \int_0^t A(\tau)d\tau \int_0^l \int_0^h \Delta G^*_{22}(0, 0, t, \xi, \eta, \tau)\Delta u_2(\xi, \eta, \tau)d\xi d\eta. \quad (35)$$

Оскільки функції $(a_2(t), u_2(x, y, t))$ є розв'язком задачі (1)-(5), то з умови теореми випливає, що $\Delta u_2(0, 0, t) \neq 0$. Отже, (35) – однорідне рівняння Вольтерра другого роду з інтегровним ядром і внаслідок єдиності його розв'язку $A(t) \equiv 0$, $t \in [0.T]$. Оскільки розв'язок прямої задачі єдиний, то робимо висновок, що $U(x, y, t) \equiv 0$, $(x, y, t) \in \Omega_T$. Теорему доведено.

---

1. *Березницька І. Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44. – N 1. – С. 54-62.

2. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнта температуропровідності прямокутної пластини// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 96-103.

3. *Cannon J., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation// Journal of mathematical analysis and application. – 1991. – Vol. 160. – P. 572-582.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.*, Функциональный анализ. – М., 1977.
6. *Иванчов Н. И., Пабыривска Н. В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. – 2002. – Т. 43. – N 1. – С. 406-413.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

ON INVERSE PROBLEM FOR TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION IN RECTANGLE

Roman Sagaydak

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

We establishe existence and uniqueness conditions for solution of inverse problem which consists of finding of unknown coefficient at the second-order derivatives in two-dimensional parabolic equation. This coefficient depends only on the time.

Key words: inverse problem, parabolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 25.05.2003
Прийнята до друку 02.10.2003