ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.129–133

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.129–133

УДК 539.3

ПРО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЕРШОЇ ТА ДРУГОЇ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛУ

Володимир СТАНКЕВИЧ
Національний університет "Львівська політехніка", вул. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

Отримано розв'язки тривимірної динамічної задачі теорії пружності для півпростору при заданих на його поверхні усталених в часі навантажень і переміщень. Розв'язки вибрано у вигляді комбінації потенціалів Гельмгольца з невідомими густинами, які характеризують переміщення точок поверхні тіла. Задовольнивши граничні умови, вихідна задача зведена до розв'язування системи двовимірних інтегро-диференціальних рівнянь першого і другого роду типу потенціалу Гельмгольца для визначення невідомих густин. Одержано інтегральні зображення зазначених функцій, за допомогою яких отримано вирази для переміщень і напружень у півпросторі.

Ключові слова: пружний півпростір, усталені коливання, перша та друга граничні задачі, потенціал Гельмгольца.

У працях [1-3] розглянуто деякі часткові випадки дії динамічних навантажень на поверхні пружного півпростору. Методом інтегральних перетворень Фур'є і Ханкеля одержано розв'язки відповідних плоских і осесиметричних задач теорії пружності. Ми методом потенціалу отримали загальні розв'язки граничних задач про дію на поверхні півпростору усталених у часі силових і кінематичних факторів. Зазначені задачі розв'язано у тривимірному формулюванні.

Розглянемо суцільний пружний ізотропний півпростір. Виберемо на його границі S декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, щоб півпростору відповідала область $x_3 \leqslant 0$. Поверхня тіла перебуває під дією усталених у часі t з частотою ω навантажень $\vec{N}(x,t) = \vec{N}(x)\exp(i\omega t)$ або переміщень $\vec{U}(x,t) = \vec{U}(x)\exp(i\omega t)$, де $\vec{N}(x), \vec{U}(x)$ — амплітудні значення відповідних величин, $i = \sqrt{-1}$. Задача про визначення напружено-деформівного стану півпростору зводиться до розв'язування диференціального рівняння стосовно амплітудних значень компонент вектора переміщень $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$

$$\omega_2^{-2}\Delta_3\vec{u} + \left(\omega_1^{-2} - \omega_2^{-2}\right) grad\ div\,\vec{u} - \vec{u} = 0 \tag{1}$$

з граничними умовами

$$u_j(x)|_{x\in S} = U_j\,(x_1, x_2)\,, \quad j = \overline{1,3} \tag{2}$$

або

$$\sigma_{j3}(x)|_{x\in S} = N_j\left(x_1, x_2\right), \quad j = \overline{1,3}. \tag{3}$$

Тут u_j, σ_{j3} – компоненти відповідно вектора переміщень і тензора напружень; Δ_3 – тривимірний оператор Лапласа; ν –коефіцієнт Пуассона; $\omega_j = \omega\,/c_j$, $j = \overline{1,2}$, де c_1, c_2 – швидкості поширення у тілі поздовжньої та поперечної пружних хвиль.

Задача (1), (2) – перша гранична задача динамічної теорії пружності для півпростору, задача (1),(3) – друга гранична задача. Додатково вимагаємо, щоб розв'язки зазначених задач задовольняли умови випромінювання на безмежності. Надалі розв'язки граничних задач позначатимемо відповідно індексами I і II.

Розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді [4]

$$u_j(x) = \frac{\nu}{1-\nu}\;\frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial P_j^{(2)}}{\partial x_3} + \frac{2}{\omega_2^2}\;\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3}\;\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m \frac{\partial P_k^{(m)}}{\partial x_k} +$$

$$\delta_{j3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial P_k^{(2)}}{\partial x_k}, \tag{4}$$

де $P_k^{(m)}(x) = \int\int\limits_S \alpha_k(\xi)\Phi_m(x,\xi)\,dS_\xi$ – потенціали Гельмгольца;

$$\Phi_m(x,\xi) = \frac{exp\,(i\omega_m|x-\xi|)}{|x-\xi|}, \quad m = 1, 2, \quad k = \overline{1,3};$$

$|x-\xi|$ – відстань між точками $x\,(x_1, x_2, x_3)$ і $\xi\,(\xi_1, \xi_2, 0)$: δ – символ Кронекера; невідомі густини $\alpha_j(x)$, $j = \overline{1,3}$ характеризують переміщення точок границі півпростору.

Використовуючи властивості потенціалів та задовольнивши граничні умови (2), отримуємо систему двовимірних інтегро-диференціальних рівнянь другого роду типу потенціалу Гельмгольца стосовно невідомих функцій $\alpha_j(x)$

$$2\pi\alpha_j(x) + \delta_{j3}\frac{2}{\omega_2^2}\;\sum_{m=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_m}\int\int\limits_S \alpha_m(\xi)\left[\Omega_1\Phi_1(x,\xi) - \Omega_3\Phi_2(x,\xi)\right]\,dS_\xi +$$

$$(1-\delta_{j3})\,\frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\int\limits_S \alpha_3(\xi)\left[\Omega_3\Phi_1(x,\xi) - \Omega_2\Phi_2(x,\xi)\right]\,dS_\xi =$$

$$= U_j(x), \quad x\in S, \quad j = \overline{1,3}, \tag{5}$$

де

$$\Omega_j = \Delta_2 + \omega_j^2, \;\; j = 1, 2, \quad \Omega_3 = \Delta_2 + \frac{\omega_2^2}{2}, \quad \Omega_4 = \Omega_3 + \frac{\omega_2^2}{4};$$

$$\Delta_2 = \partial^2\,/\partial x_1^2 + \partial^2\,/\partial x_2^2\,.$$

Визначивши за допомогою (4) зі співвідношень Гука напруження та задовольнивши граничні умови (3), одержано систему двовимірних інтегро-диференціальних рівнянь першого роду типу потенціалу Гельмгольца стосовно невідомих густин $\alpha_j(x)$ [4]

$$\Delta_2 \int\int_S \alpha_j(\xi)\left[\delta_{j3}\Omega_2\Phi_2(x,\xi) + (1-\delta_{j3})\,\Omega_1\Phi_1(x,\xi)\right] dS_\xi -$$

$$\Omega_3^2 \int\int_S \alpha_j(\xi)\left[\delta_{j3}\Phi_1(x,\xi) + (1-\delta_{j3})\,\Phi_2(x,\xi)\right] dS_\xi - (1-\delta_{j3})\times$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{3-j}} \sum_{m=1}^{2} \int\int_S \alpha_m(\xi)\frac{\partial}{\partial x_{3-m}}\left[\Omega_1\Phi_1(x,\xi) - \Omega_4\Phi_2(x,\xi)\right] dS_\xi =$$

$$= \frac{\omega_2^2}{4G}N_j(x), \quad x \in S, \quad j = \overline{1,3}, \tag{6}$$

де G – модуль зсуву.

Рівняння (5) і (6) є інтегро-диференціальними рівняннями типу згортки, задані на безмежній області S. Застосувавши до них двовимірне перетворення Фур'є за змінними x_1 та x_2, отримано систему алгебричних рівнянь стосовно Фур'є-трансформат $\tilde{\alpha}_j$. Використавши методику [5], запишемо в остаточному вигляді шукані функції $\alpha_j(x)$ у вигляді таких інтегральних зображень:

$$\alpha_j^{\left\{ {I \atop II} \right\}}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2\left\{ {1 \atop G} \right\}} \int\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} \frac{\rho}{R_L\left\{ {R_5 \atop R_2} \right\}} \sum_{i=1}^{3} A_{ij}^{\left\{ {I \atop II} \right\}} \times$$

$$J_0\left(\rho|\xi-\eta|\right)\left\{ {U_i(\eta) \atop N_i(\eta)} \right\} d\rho\, dS_\eta, \quad j = \overline{1,3}, \tag{7}$$

де $J_0(z)$ – функція Бесселя нульового порядку;

$$A_{ii}^{\left\{ {I \atop II} \right\}} = c^{\left\{ {I \atop II} \right\}} + b_1^{\left\{ {I \atop II} \right\}}\frac{\partial^2}{\partial\eta_i^2}, \quad A_{12}^{\left\{ {I \atop II} \right\}} = A_{21}^{\left\{ {I \atop II} \right\}} = b_1^{\left\{ {I \atop II} \right\}}\frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2};$$

$$A_{i3}^{\left\{ {I \atop II} \right\}} = b_2^{\left\{ {I \atop II} \right\}}\frac{\partial}{\partial\eta_i}, \quad A_{3i}^{\left\{ {I \atop II} \right\}} = b_3^{\left\{ {I \atop II} \right\}}\frac{\partial}{\partial\eta_i}, \; i = \overline{1,2}, \quad A_{33}^{\left\{ {I \atop II} \right\}} = b_4^{\left\{ {I \atop II} \right\}};$$

$$c^I = R_L\,R_5, \; b_1^I = -R_4^2, \; b_2^I = \frac{\omega_2^2}{2}R_2R_4, \; b_3^I = -\frac{\omega_2^2}{2}R_1R_4;$$

$$c^{II} = R_L, \; b_1^{II} = R_6, \; b_2^{II} = b_3^{II} = 0, \; b_4^I = -\omega_2^2 b_4^{II} = \frac{\omega_2^4}{4}R_1R_2;$$

$$R_j = \sqrt{\rho^2 - \omega_j^2}, \; j = 1,2, \quad R_3 = \rho^2 - \omega_2^2/2, \quad R_4 = R_1R_2 - R_3;$$

$$R_5 = R_4 - \omega_2^2/2, \quad R_6 = -R_4 - \omega_2^2/4, \quad R_L = R_3^2 - \rho^2R_1R_2$$

– функція Релея.

Підставивши вирази (7) у співвідношення (4) та використавши методику обчислення безмежних інтегралів [6],отримуємо розв'язки вихідних граничних задач у такому вигляді:

$$u_j^I(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S\int \int\limits_0^\infty \frac{\rho}{R_3} \Lambda(x_3) \left\{ \sum_{p=1}^{2} U_p(\eta) \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\delta_{3j} R_1 + (1-\delta_{3j}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] + \right.$$

$$\left. U_3(\eta) \left[\delta_{3j} \rho^2 + (1-\delta_{3j}) R_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \right\} J_0(\rho |\tilde{x} - \eta|)\, d\rho dS_\eta +$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_3} \int\limits_S\int U_j(\eta) \left[\delta_{3j} \Phi_1(x,\eta) + (1-\delta_{3j}) \Phi_2(x,\eta) \right] dS_\eta, \quad j = \overline{1,3}, \tag{8}$$

$$u_j^{II}(x) = \frac{1}{4\pi G} \int\limits_S\int \int\limits_0^\infty \frac{\rho}{R_L} \left\{ exp(-|x_3| R_1)\, T(\eta, x) \left[\delta_{3j} R_1 + (1-\delta_{3j}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \right.$$

$$\frac{exp(-|x_3| R_2)}{R_2} \left\langle \delta_{3j} R_3 T(\eta, x) + (1-\delta_{j3}) \left[N_3(\eta) R_1 R_2^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \sum_{p=1}^{2} N_p(\eta) (R_3 - 2R_1R_2) \frac{\partial}{\partial x_p} \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \right\} J_0(\rho |\tilde{x} - \eta|)\, d\rho dS_\eta +$$

$$\frac{1}{4\pi G} \int\limits_S\int N_j(\eta) (2-\delta_{3j}) \Phi_2(x,\eta)\, dS_\eta, \quad j = \overline{1,3}. \tag{9}$$

Тут $\Lambda(x_3) = \sum\limits_{i=1}^{2} (-1)^{i+1}\, exp(-|x_3| R_i)$;

$$T(\eta, x) = \sum_{p=1}^{2} N_p(\eta) R_2 \frac{\partial}{\partial x_p} + N_3(\eta) R_3; \quad |\tilde{x} - \eta| = \sqrt{\sum_{p=1}^{2} (x_p - \eta_p)^2}.$$

Вирази для напружень одержимо підстановкою (8), (9) у співвідношення Гука. Зокрема,

$$\sigma_{j3}^{II} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S\int \int\limits_0^\infty \frac{\rho}{R_L} \Lambda(x_3)\, T(\eta, x) \left[\delta_{3j} R_3 + (1-\delta_{3j}) R_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \times$$

$$J_0(\rho |\tilde{x} - \eta|)\, d\rho dS_\eta + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_3} \int\int_S N_j(\eta) \Phi_2(x,\eta)\, dS_\eta, \quad j = \overline{1,3}.$$

Використавши властивості потенціалів Гельмгольца, неважко переконатися, що отримані розв'язки тотожно задовольняють рівняння (1) і граничні умови (2),(3).

Робота підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень Міністерства освіти та науки України (проект N 01.07/00133)

1. *Гутин Л.Я.* К теории установившихся колебаний упругого полупространства // Журн. техн. физики. – 1951. – Т. 21. – Вып. 8. – С. 892-906
2. *Сеймов В. М.* Динамические контактные задачи. – К., 1976.
3. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К., 1981.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциала в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К., 1989.
5. *Михаськив В. В., Станкевич В. З., Хай М. В.* Граничные интегральные уравнения трехмерных задач об установившихся колебаниях полупространства с плоскими трещинами // Изв. АН России. Механика твердого тела. – 1993. – N 6. – С. 44-53.
6. *Станкевич В. З.* Обчислення деяких двовимірних інтегралів, характерних для динамічних задач теорії тріщин в півбезмежному тілі // Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 39. – С. 56-61.

ON SOLUTION OF THE FIRST AND SECOND BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF DYNAMIC ELASTICITY THEORY FOR A HALF-SPACE BY POTENTIAL METHOD

Volodymyr Stankevych

Lviv Polytechnic National University,
Bandery Str., 12, 79013 Lviv, Ukraine

The solutions to 3-D dynamic problem of elasticity theory for a half-space at given time-stationary loads and displacement on its surface are obtained. The solutions are chosen in the form of Helmholtz potentials. On satisfying problem is reduced to solution of a system of 2-D integro-differential equations of the first and second kind in order to define the unknown potential densities. Using the integral density presentations, the expressions are obtained for the displacements and stresses in a half-space.

Key words: elastic half-space,time-stationary oscillation, the first and second boundary problem, Helmholtz potentials.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.2002
Прийнята до друку 02.10.2003