ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.134-143

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.134-143

УДК 517.956

ПРО ФОРМУЛЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Оксана ЧМИР

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено теореми про рівнозначність двох формулювань узагальненої першої крайової задачі для рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = F_0(x,t,u)$ і рівнозначність цієї задачі деякому інтегральному рівнянню в класі функцій з особливостями на параболічній межі.

Ключові слова: крайова задача, півлінійне рівняння, узагальнена функція, узагальнена крайова задача.

У багатьох працях досліджують умови існування необмежених розв'язків півлінійних параболічних та еліптичних рівнянь (бібліографія є, наприклад, в [1]), зокрема в статтях [2, 3] розглядають крайові задачі, розв'язки яких необмежені на межі області, в [4] досліджують умови, коли регулярний всередині області розв'язок рівняння $\Delta u = u^q$ може набувати узагальнених крайових значень. Ми розглянемо першу крайову задачу для півлінійного параболічного рівняння у формулюваннях, подібних до формулювань узагальнених крайових задач [5, 6] для лінійних параболічних рівнянь та узагальнених крайових задач для півлінійних еліптичних рівнянь [7].

Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею S класу $\mathbb{C}^\infty$, $Q_0 = \Omega_0 \times (0,T]$, $Q_1 = S \times (0,T]$; $D(\overline{Q}_0), D(\overline{Q}_1)$ – простори нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}_0$ та $\overline{Q}_1$ відповідно, $D^0(\overline{Q}_i) = \{\varphi \in D(\overline{Q}_i):\ D_t^k\varphi\,|_{t=T} = 0,\ k = 0,1,\ldots,\ldots\}$, $D_0(\overline{Q}_i) = \{\varphi \in D(\overline{Q}_i):\ D_t^k\varphi\,|_{t=0} = 0,\ k = 0,1,\ldots\}$, $D_0^0(Q_i) = D_0(Q_i) \cap D^0(Q_i)$, $i = 0,1$, $D_0(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}_0):\ \varphi\,|_S = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,|_S = 0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S. Штрихами позначатимемо простори лінійних неперервних функціоналів на відповідних функціональних просторах, а через $(\varphi, F)_i$ – значення узагальненої функції $F \in D_0^{0\prime}(\overline{Q}_i)\,(D^{0\prime}(\overline{Q}_i))$ на основній функції $\varphi \in D_0^0(\overline{Q}_i)\,(D^0(\overline{Q}_i))$, $i = 0,1,2$ $(D_0^0(\overline{Q}_2) = D_0(\overline{\Omega}_0))$.

Нехай $L(x,t,D)u = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$ – параболічний диференціальний вираз другого порядку.

Інтегральна формула Гріна має вигляд

$$\int_{Q_0} Lu \cdot v\,dxdt = \int_{Q_0} u \cdot L^* v\,dxdt + \int_{Q_1}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dSdt+$$

$$+\int_{\Omega_0}\left[u(x,T)v(x,T) - u(x,0)v(x,0)\right] dx, \quad u,v \in D(\overline{Q}_0),$$

де $L^* v = -\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta^* v\right)$.

Розглянемо задачу

$$(Lu)(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = F_0(x,t,u(x,t)),\ (x,t) \in Q_0, \tag{1}$$

$$u\,|_{Q_1} = F_1(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_1, \tag{2}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0. \tag{3}$$

Тут F_0 – неперервна функція в $Q_0 \times (-\infty,+\infty)$, $F_1 \in D_0^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $F_2 \in D_0'(\overline{\Omega}_0)$.

Нехай $Q_{1\varepsilon\varepsilon_1} = S_\varepsilon \times (\varepsilon_1, T]$, S_ε – паралельна до S поверхня, розміщена всередині Ω_0 на відстані ε від S, $(x_\varepsilon, t) \in Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}$, якщо $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $t \in (\varepsilon_1, T]$, $(x,t) \in Q_1$. Для $\varphi \in D(\overline{Q}_1)$ визначаємо $\varphi(x_\varepsilon, t) = \varphi(x,t)$, якщо $(x_\varepsilon, t) \in Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$.

Означення 1. *Скажемо, що регулярна всередині області Q_0 функція $u(x,t)$ набуває на Q_1 узагальнених крайових значень $F_1 \in D_0^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, якщо*

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi(x_\varepsilon,t)u(x_\varepsilon,t)\,dSdt = (\varphi, F_1)_1,\ \varphi \in D_0^0(\overline{Q}_1) \tag{4}$$

і набуває узагальнених початкових значень $F_2 \in D_0'(\overline{\Omega}_0)$, якщо

$$\lim_{\varepsilon,t \to 0} \int_{\Omega_{0\varepsilon}} \varphi(x)u(x,t)\,dx = (\varphi, F_2)_2,\ \varphi \in D_0(\overline{\Omega}_0). \tag{5}$$

Зауважимо, що на підставі леми [8, с. 70] крайові значення в (4) і початкові значення в (5) не залежать від продовження всередину області до функції з $D_0^0(Q_{1\varepsilon\varepsilon_1})$.

Нехай $\varrho(x,t)((x,t) \in Q_0)$ – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка дорівнює нулю на параболічній межі $\overline{Q}_1 \cup \Omega_0$ циліндра Q_0, а біля $\overline{Q}_1 \cup \Omega_0$ має порядок відстані від точки (x,t) до цієї межі.

У [5] доведено, що регулярний всередині Q_0 розв'язок u рівняння $Lu = 0$ тоді і лише тоді набуває на Q_1 узагальнених крайових значень $F_1 \in D_0^{0\prime}(\overline{Q}_1)$ та узагальнених початкових значень $F_2 \in D_0'(\overline{\Omega}_0)$, коли існує натуральне число k, при якому $\int_{Q_0} \varrho^k(x,t)|u(x,t)|\,dxdt < +\infty$, u та $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ одночасно набувають узагальнених крайових значень.

Введемо нормовані функціональні простори

$\mathcal{M}_k(Q_0) = \{u : ||u||_k = \int_{Q_0} \varrho^k(x,t)|u(x,t)|\,dxdt < +\infty\}$, $k \geqslant 0$,

$X_k(\overline{Q}_0) = \{\psi \in D^0(\overline{Q}_0) : \psi\,|_{\overline{Q}_1} = 0, L^*\psi(x,t) = O(\varrho^k(x,t)), (x,t) \to (x_0,t_0) \in \overline{Q}_1 \cup \Omega_0\}$.

Подібно до лінійних крайових задач [5, 6] розглядається узагальнена крайова задача (1)-(3) в таких формулюваннях.

Формулювання 1. *Нехай F_0-неперервна функція в $Q_0 \times (-\infty, +\infty)$, $F_1 \in D_0^{0\prime}(\overline{Q}_1), F_2 \in D_0'(\overline{\Omega}_0)$. Знайти розв'язок $u \in \mathcal{M}_k(Q_0) \cap \mathbb{C}^{2,1}(Q_0)$ рівняння (1) всередині області Q_0, який набуває узагальнених крайових значень F_1 та узагальнених початкових значень F_2.*

Формулювання 2. *Нехай F_0 – неперервна функція в $Q_0 \times (-\infty, +\infty)$, $F_1 \in D_0^{0\prime}(\overline{Q}_1), F_2 \in D_0'(\overline{\Omega}_0)$. Розв'язком задачі* (1) – (3) *називається така функція $u \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, що*

$$\int\limits_{Q_0} L^*\psi \cdot u\,dxdt = \int\limits_{Q_0} F_0(x,t,u(x,t)) \cdot \psi(x,t)\,dxdt + \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial \nu}, F_1(x,t))_1 + \right.$$

$$\left. +(\psi(x,0), F_2(x)\right)_2, \ \psi \in X_k(\overline{Q}_0). \tag{6}$$

З формулювання 2 випливає необхідна умова розв'язності задачі (1)-(3)

$$\int\limits_{Q_0} \psi(x,t) \cdot F_0(x,t,u(x,t))\,dxdt < +\infty, \ \psi \in X_k(\overline{Q}_0), \ u \in \mathcal{M}_k(Q_0). \tag{7}$$

Подібно до лінійного випадку [5] доводимо еквівалентність задачі (1)-(3) в обох формулюваннях.

Теорема 1. *Нехай $F_1 \in D_0^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $F_2 \in D_0'(\overline{\Omega}_0)$, F_0-неперервна в $Q_0 \times (-\infty, +\infty)$. Якщо узагальнена функція $u \in \mathcal{M}_k(Q_0) \cap \mathbb{C}^{2,1}(Q_0)$ задовольняє (6) і для неї виконується умова (7), то вона є розв'язком задачі (1)-(3) в формулюванні 1, і навпаки, розв'язок u задачі (1)-(3) в формулюванні 1 для якого виконується умова (7), задовольняє тотожність (6) для довільної $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$.*

Доведення. Нехай $u \in \mathcal{M}_k(Q_0) \cap \mathbb{C}^{2,1}(Q_0)$ і задовольняє тотожність (6) для довільної $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$. Тоді при $\psi \in D(Q_0)$ з (6) маємо $\int\limits_{Q_0} L^*\psi \cdot u\,dxdt = \int\limits_{Q_0} F_0 \cdot \psi\,dxdt$, тобто $\int\limits_{Q_0} \psi(Lu - F_0)\,dxdt = 0$, а звідси за довільністю ψ, неперервністю $Lu - F_0$, за лемою Дюбуа-Реймона маємо $Lu - F_0 \equiv 0$ в Q_0. Отже, u є класичним розв'язком рівняння (1) в області Q_0. Ліву частину (6) при довільній $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$ записуємо у вигляді

$$\int\limits_{Q_0} L^*\psi \cdot u\,dxdt = \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{\varepsilon_1}^{T} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} L^*\psi \cdot u\,dxdt$$

і перетворюємо останній вираз за формулою Гріна в $\Omega_{0\varepsilon} \times (\varepsilon_1, T) = Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}$. Враховуючи (6), матимемо

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \left(\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \cdot u\,dSdt - \int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} \psi \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dSdt + \int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}} \psi(x,\varepsilon_1) \times \right.$$

$$\times u(x,\varepsilon_1)\,dx + \int\limits_{Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}} Lu\cdot\psi\,dxdt\Bigg) = \left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}, F_1(x,t)\right)_1 + \left(\psi(x,0), F_2(x)\right)_2 +$$

$$+\int\limits_{Q_0} F_0(x,t,u(x,t))\cdot\psi(x,t)\,dxdt \qquad \forall\psi\in X_k(\overline{Q_0}). \tag{8}$$

Покриємо $\overline{Q}_1\cup\Omega_0$ відкритими множинами $U_j\in\mathbb{R}^{n+1}$ $(j=\overline{1,N})$, які називатимемо крайовими координатними околами.

Нехай φ_1 – довільна функція з $D_0^0(\overline{Q_1})$. За лемою [9] для довільного цілого невід'ємного числа k існує така $\psi\in X_k(\overline{Q}_0)$, що $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{\partial\psi(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}=\varphi_1(x,t)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\psi(x_\varepsilon,t)=0$, $t\in(0,T]$. Такою є , наприклад, функція $\psi(x,t)=\Psi_\varepsilon(x,t)$, яка в кожному крайовому координатному околі U_j має вигляд $\Psi_\varepsilon^{(j)}(\xi'^{(j)},\xi_n^{(j)},t)=\sum\limits_{i=0}^{k+1}(\xi_n^{(j)}-\varepsilon)^i\varphi_i^{(j)}(\xi'^{(j)},t)$, де $\varphi_0=0$, φ_1 така довільна нескінчено диференційовна функція в $U_j\cap Q_1$, що $D_t^p\varphi_1(\xi',t)|_{t=0,t=T}=0$ при $p=0,1,..,...,$ $\varphi_i(\xi,t)$ при $i=\overline{2,k+1}$ визначаються лемою [9] і $\varphi_i\in D_0^0(\overline{Q}_1)$, $i=\overline{2,k+1}$. Зокрема, $\Psi_\varepsilon|_{\xi_n=\varepsilon}=\varphi_0(\xi',t)=0$, $\frac{\partial\Psi_\varepsilon}{\partial\xi_n}|_{\xi_n=\varepsilon}=\varphi_1(\xi',t)$. Оскільки $u\in\mathcal{M}_k(Q_0)$, то існує $\int\limits_{Q_0}L^*\psi\cdot u\,dxdt=\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to0}\int\limits_{Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}}L^*\psi\cdot u\,dxdt$. Тоді з (8) та (7) випливає існування

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to0}\Bigg(\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}\frac{\partial\psi(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}u(x_\varepsilon,t)\,dSdt-\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}\psi(x_\varepsilon,t)\cdot\frac{\partial u(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\,dSdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}}\psi(x,\varepsilon_1)u(x,\varepsilon_1)\,dx\Bigg). \tag{9}$$

Вибираючи φ_1 такою, що $\varphi_1\,|_{t=\varepsilon_1}=0$, одержуємо, що $\frac{\partial\psi(x,\varepsilon_1)}{\partial\nu}=0, x\in\Omega_0$.За лемою [8,с. 70] границя (9) дорівнює

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}\left(\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial\psi(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\right)\cdot u(x_\varepsilon,t)\,dSdt-\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}(\lim_{\varepsilon\to0}\psi(x_\varepsilon,t))\times$$

$$\times\frac{\partial u(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\,dSdt+\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to0}\int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}}(\lim_{\varepsilon_1\to0}\psi(x,\varepsilon_1))u(x,\varepsilon_1)\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}\varphi_1(x_\varepsilon,t)\cdot u(x_\varepsilon,t)\,dSdt.$$

Оскільки $Lu=F_0$ в Q_0, то з (8) одержимо існування

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}\varphi_1(x_\varepsilon,t)\cdot u(x_\varepsilon,t)\,dSdt=(\varphi_1,F_1)_1+(0,F_2)_2=(\varphi_1,F_1)_1$$

для довільної $\varphi_1 \in D_0^0(\overline{Q}_1)$, а отже, u задовольняє (4). Так само вибираючи $\psi \in X_k(Q_0)$ такою, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial\psi(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu} = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \psi(x_\varepsilon,t) = \varphi_0(x,t)$, отримаємо існування границі $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} \varphi_0(x_\varepsilon,t)\cdot\frac{\partial u(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\,dSdt < +\infty$ для довільної $\varphi_0 \in D_0^0(\overline{Q}_1)$.

Аналогічно, для довільної $\varphi \in D_0(\overline{\Omega}_0)$ за лемою [9] існує така $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)\cap D_0(\overline{\Omega}_0)$, що $\lim\limits_{t\to 0+} \psi(x,t) = \varphi(x)$, можна вибирати $\psi|_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} = \frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} = 0$. Такою є, наприклад, функція $\psi(x,t) = \sum\limits_{i=0}^{k} t^i\cdot\psi_i(x)$, де $\psi_0 = \varphi(x) \in D_0(\overline{\Omega}_0)$. Тоді з (8) і аналогічних міркувань одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}} \psi(x,\varepsilon_1)\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx,$$

яке за лемою [8,с. 70] дорівнює

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}} (\lim_{\varepsilon_1\to 0} \psi(x,\varepsilon_1))\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx = \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}} \varphi(x)\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx$$

З (8) одержимо також, що

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}} \varphi(x)\cdot u(x,\varepsilon_1)\,dx = (0,F_1)_1 + (\varphi,F_2)_2 = (\varphi,F_2)_2,$$

тобто u задовольняє (5).

Нехай тепер $u \in \mathcal{M}_k(Q_0)\cap\mathbb{C}^{2,1}(Q_0)$ і є розв'язком задачі (1)-(3) в формулюванні 1. Запишемо формулу Гріна для області $Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}$ і функцій u та $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$

$$\int\limits_{Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}} u\cdot L^*\psi\,dxdt = \int\limits_{Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}} \psi(x,t)\cdot F_0(x,t,u(x,t))\,dxdt - \int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} \psi(x_\varepsilon,t)\times$$

$$\times\frac{\partial u(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\,dSdt + \int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} u(x_\varepsilon,t)\cdot\frac{\partial\psi(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\,dSdt -$$

$$- \int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}} (u(x,T)\cdot\psi(x,T) - u(x,\varepsilon_1)\cdot\psi(x,\varepsilon_1))\,dx \tag{10}$$

Для $u \in M_k(Q_0)$ існує $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}} L^*\psi\cdot u\,dxdt = \int\limits_{Q_0} L^*\psi\cdot u\,dxdt$, з умови (7) випливає існування $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{0_{\varepsilon\varepsilon_1}}} \psi(x,t)\cdot F_0(x,t,u(x,t))\,dxdt = \int\limits_{Q_0} \psi\cdot F_0\,dxdt$.

За умовою (4) існує

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} u(x_\varepsilon,t)\cdot\frac{\partial\psi(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\,dSdt=\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}} u(x_\varepsilon,t)\times$$

$$\times\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial\psi(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\right)dSdt=\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu},F_1(x,t)\right)_1,$$

а за умовою (5) існує

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{\Omega_{0_\varepsilon}} u(x,\varepsilon_1)\cdot\psi(x,\varepsilon_1)dx=(\psi(x,0),F_2(x))_2.$$

Тоді з (10) одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}\frac{\partial u(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\cdot\psi(x_\varepsilon,t)dSdt=\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{Q_{1_{\varepsilon\varepsilon_1}}}\frac{\partial u(x_\varepsilon,t)}{\partial\nu}\times$$

$$\times\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\psi(x_\varepsilon,t)\right)dSdt=0.$$

Перейшовши в (10) до границі при $\varepsilon,\varepsilon_1\to 0$, отримаємо (6). Це означає, що u є розв'язком задачі (1) – (3) в формулюванні 2. Теорема 1 доведена.

Позначимо через $G(x,t,y,\tau)$ розв'язок задачі

$$L^*(y,\tau,D)v(y,\tau)=\delta(x-y,t-\tau),\ (y,\tau)\in Q_0,$$

$$v\mid_{(y,\tau)\in Q_1}=0,$$

$$v(y,T)=0$$

для довільної $(x,t)\in Q_0$, тобто нормальну функцію Гріна задачі (1)-(3). Існування її та низку властивостей одержуємо з [10, 11].

Оператори

$(\hat G_0\varphi)(y,\tau)=\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(x,t)\cdot G(x,t,y,\tau)\,dx,$

$(\hat G_1\varphi)(y,\tau)=\int\limits_\tau^T dt\int\limits_{\Omega_0}\frac{\partial G(x,t,y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot\varphi(x,t)\,dx,$

$(\hat G_2\varphi)(y)=\int\limits_0^T dt\int\limits_{\Omega_0}\varphi(x,t)\cdot G(x,t,y,0)\,dx$

є спряженими операторами Гріна першої крайової задачі. З властивостей цих операторів, визначених у [10], випливає, що

$\hat G_i:\ D(\overline{Q}_0)\to D(\overline{Q}_i),\ D^0(\overline{Q}_0)\to D^0(\overline{Q}_i),\ i=0,1;\ D(\overline{Q}_0)\to D(\overline{\Omega}_0),\ i=2.$

У [6] виведено, що

$$\hat{G}_0(L^*\psi)(y,\tau) = \psi(y,\tau),\ (y,\tau) \in \overline{Q}_0,$$
$$\hat{G}_1(L^*\psi)(y,\tau) = (\frac{\partial\psi}{\partial\nu})(y,\tau),\ (y,\tau) \in \overline{Q}_1, \psi \in X(\overline{Q}_0). \tag{11}$$

З однозначної розв'язності спряженої крайової задачі при даних із $D_0(\overline{Q}_i)$, $i = 0,1$, $D_0(\overline{\Omega}_0)$ випливає існування єдиного розв'язку ψ з простору $X_k(\overline{Q}_0)$ рівняння $L^*\psi = \varphi$ для довільної $\varphi \in D^0(\overline{Q}_0)$, а тоді з попередніх тотожностей одержуємо
$(\hat{G}_0\varphi)(y,\tau) = \psi(y,\tau)$, $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$,
$(\hat{G}_1\varphi)(y,\tau) = \frac{\partial\psi(y,\tau)}{\partial\nu}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\nu} \in D^0(\overline{Q}_1)$,
$(\hat{G}_2\varphi)(y) = \psi(y,0) \in D(\overline{\Omega}_0)$ для довільної $\varphi \in D^0(\overline{Q}_0)$.

Отже, $\hat{G}_0 :\ D^0(\overline{Q}_0) \to X_k(\overline{Q}_0)$, $\hat{G}_1 :\ D^0(\overline{Q}_0) \to D^0(\overline{Q}_1)$, $\hat{G}_2 :\ D(\overline{Q}_0) \to D(\overline{\Omega}_0)$.

Розглянемо інтегральне рівняння

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G(x,t,y,\tau)\cdot F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy +$$

$$+(\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x,t;y,\tau),F_1(y,\tau))_1 + (G(x,t,y,0),F_2(y))_2. \tag{12}$$

Введемо такі позначення:
$(Hu)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G(x,t;y,\tau)\cdot F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy$,
$g_1(x,t) = (\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x,t;y,\tau),F_1(y,\tau))_1$,
$g_2(x,t) = (G(x,t;y,0),F_2(y))_2$
Тоді (12) запишемо у вигляді
$u(x,t) = (Hu)(x,t) + g_1(x,t) + g_2(x,t)$.

Означення 2. *Розв'язком інтегрального рівняння* (12) *в просторі* $\mathcal{M}_k(Q_0)$ *називається така функція* $u \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, *що:*
1) $g_i \in \mathcal{M}_k(Q_0)\,i = 1,2$; $(Hu) \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ *для довільного* $u \in \mathcal{M}_k(Q_0)$;
2)

$$\int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t)\cdot[u(x,t) - (Hu)(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)]\,dxdt = 0. \tag{13}$$

Теорема 2. *u є розв'язком задачі* (1) – (3) *у формулюванні 2 тоді і лише тоді, коли u є розв'язком рівняння* (12) *в* $\mathcal{M}_k(Q_0)$.

Доведення. Перевіримо, що розв'язок $u(x,t)$ задачі (1) – (3) у формулюванні 2 є розв'язком інтегрального рівняння (12) в $\mathcal{M}_k(Q_0)$. Відомо, що для довільної $\varphi \in D^0(\overline{Q}_0)$ існує розв'язок задачі А: $L^*\psi = \varphi$ в Q_0, $\psi|_{Q_1} = 0$, $\psi|_{t=T} = 0$. Цей розв'язок має вигляд $\psi(y,\tau) = (\hat{G}_0\varphi)(y,\tau)$ і $\psi \in D^0(\overline{Q}_0)$.

Функція $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$ для $\varphi = O(\varrho^k)$ біля ∂Q_0 [8]. Підставимо в (6) розв'язок задачі A, одержимо

$$\int_{Q_0} \varphi \cdot u\,dxdt = \int_{Q_0} \left(\int_{\tau}^{T} dt \int_{\Omega_0} G(x,t;y,\tau) \cdot \varphi(x,t)\,dx \right) F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dyd\tau +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\int_{\tau}^{T} dt \int_{\Omega_0} G(x,t;y,\tau) \cdot \varphi(x,t)\,dx \right), F_1(y,\tau) \right)_1 +$$

$$+ \left(\int_{0}^{T} dt \int_{\Omega_0} G(x,t;y,0) \cdot \varphi(x,t)\,dx, F_2(y) \right)_2. \tag{14}$$

Вирази в (14) гладкі й існують за властивостями функції Гріна та умовою (7). Крім того, існують g_1, g_2 та $\int\limits_{Q_0} \varphi \cdot (Hu)\,dxdt$ для довільної $\varphi \in D^0(\overline{Q}_0)$. За аналогією теореми Фубіні [12] отримуємо

$$\int_{Q_0} \varphi \cdot (Hu)\,dxdt = \int_{Q_0} \varphi \cdot u\,dxdt - \int_{Q_0} \varphi \cdot g_1\,dxdt - \int_{Q_0} \varphi \cdot g_2\,dxdt.$$

Оскільки $g_i \in D^0(\overline{Q}_0)$, то $g_i \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, $i = 1, 2$, $u \in \mathcal{M}_k(Q_0)$. Звідси одержуємо, що $(Hu) \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ $\forall u \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, а також

$$\int_{Q_0} \varphi \cdot [u(x,t) - (Hu)(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)]\,dxdt = 0,$$

зокрема (13).

Доведемо, що розв'язок u інтегрального рівняння (12) задовольняє (6) для кожної $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$, тобто u є розв'язком задачі (1) – (3) в формулюванні 2.

Справді, (12) домножуємо на $L^*\psi$ й інтегруємо по Q_0. Ці інтеграли існують, оскільки $L^*\psi = O(\varrho^k)$ біля S для $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$. Одержуємо

$$\int_{Q_0} L^*\psi \cdot u\,dxdt = \int_{Q_0} (L^*\psi)(x,t) \left(\int_{0}^{t} d\tau \int_{\Omega_0} G(x,t,y,\tau) \times \right.$$

$$\left. \times F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy \right) dxdt + \int_{Q_0} (L^*\psi)(x,t) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,t;y,\tau), F_1(y,\tau) \right)_1 dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_0}(L^*\psi)(x,t)(G(x,t,y,0),F_2(y))_2\,dxdt.$$

З 1 в означенні розв'язку інтегрального рівняння та аналогу теореми Фубіні [12] випливає, що у правій частині є законною заміна порядку інтегрування. Матимемо

$$\int\limits_{Q_0} L^*\psi\cdot u\,dxdt=\int\limits_{Q_0}\hat{G}_0(L^*\psi)(y,\tau)\cdot F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy+$$

$$+(\hat{G}_1(L^*\psi)(y,\tau),F_1(y,\tau))_1+(\hat{G}_2(L^*\psi)(y),F_2(y))_2.$$

Враховуючи формули (11), остання рівність набуває вигляду

$$\int\limits_{Q_0} L^*\psi\cdot u\,dxdt=\int\limits_{Q_0}F_0\cdot\psi\,dxdt+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu},F_1)_1+(\psi(x,0),F_2(x)\right)_2$$

для довільної $\psi\in X_k(\overline{Q}_0)$. Маємо (6). Теорема 2 доведена.

Зауваження. *u є розв'язком задачі (1) – (3) в формулюванні 2, тоді і лише тоді, коли u є розв'язком рівняння (12) в $\mathcal{M}_k'(Q_0)$, де*

$$\mathcal{M}_k'(Q_0)=\{u:||u||_k=\int\limits_{Q_0}\varrho^k(x,t)\exp\left(\frac{-c\varrho^2(x,t)}{t}\right)|u(x,t)|\,dxdt<+\infty\},$$

$c>0$, а також тоді, коли $\varrho(x,t)=\min[\varrho(x),\sqrt{t}]$, де $\varrho(x)$ – невід'ємна нескінчено диференційовна в $\overline{Q}_0$ функція порядку відстані від точки x до $\overline{Q}_1$.

---

1. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М., 1987.

2. *Абдулаев У. Г.* О существовании неограниченных решений нелинейного уравнения теплопроводности со стоком// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. – 1993. – Т. 33. – N 2. – С. 232-245.

3. *Vazques J. L. and Wilias M.* Existence and uniqueness of solutions of diffusion-absorption equation with general data// Diff. and Integral Equat. – 1994. – Vol. 7. – N 1. – P. 15-36.

4. *Veron L.* The boundary traces of positive solutions of some nonlinear elliptic equations// Book of Abstr. of Int. conf. "Nonlinear partial diff. equat." – Donetsk. – 1997. – P. 169.

5. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка// Методы исследования диференциальных и интегральных операторов. – К., 1989. – С. 54-59.

6. *Лопушанская Г. П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций// Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38. – N 6. – С. 795-798.

7. *Лопушанская Г. П.* Задача Діріхле для квазілінійного еліптичного рівняння у просторів розподілів// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 34. – С. 26-31.

8. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. – М., 1965.

9. *Лопушанська Г. П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах// Матем. студії. – 2001. – Т. 15. – N 2. – С. 179-190.

10. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К., 1990.

11. *Эльдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.

12. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М., 1988.

A FORMULATION OF THE FIRST GENERALIZED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION

Oksana Chmyr

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

There is proved theorems about the equivalence of two formulations of the first generalized boundary value problem for equation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = F_0(x,t,u)$ and the equivalence this problem some integral equation in the class of the functions with singularities onto parabolic boundary.

Key words: boundary value problem, semilinear equation, generalized function, generalized boundary value problem.

Стаття надійшла до редколегії 23.09.2002

Прийнята до друку 02.10.2003