ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.144–146

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.144–146

УДК 517.53

ПРО ФУНКЦІЇ, БЛИЗЬКІ ДО ОПУКЛИХ

Зоряна ШЕРЕМЕТА
Інститут прикладних проблем математики і механіки НАН України, вул. Дудаєва, 15 790050 Львів, Україна

Нехай $K(\mathbb{D})$ – клас близьких до опуклих в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функцій, а $K_\alpha(\mathbb{D})$ – клас аналітичних у $\mathbb{D}$ функцій $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ таких, що $\sum_{n=2}^{\infty} n|f_n| < \alpha|f_1|$. Доведено, що $K_\alpha(\mathbb{D}) \subset K(\mathbb{D})$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha \leqslant 1$.

Ключові слова: близькі до опуклих функції, природна межа.

Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\left\{1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0\ (z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості функції f в $\mathbb{D}$. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\mathrm{Re}\,\dfrac{f'(z)}{\Phi'(z)} > 0\ (z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція є однолистою в $\mathbb{D}$ і $f_1 \neq 0$ [1, с. 583].

Клас близьких до опуклих у $\mathbb{D}$ функцій позначимо через $K(\mathbb{D})$, нехай $K_\alpha(\mathbb{D})$ — клас аналітичних в $\mathbb{D}$ функцій (1), для яких

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|f_n| < \alpha|f_1|. \tag{2}$$

У цій праці доведемо, що $K_\alpha(\mathbb{D}) \subset K(\mathbb{D})$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha \leqslant 1$. Фактично, правильною є така теорема.

Теорема. *Якщо $\alpha \leqslant 1$, то кожна функція з $K_\alpha(\mathbb{D})$ належить до $K(\mathbb{D})$. Якщо $\alpha \leqslant 1$, то існує аналітична в $\mathbb{D}$ функція (1) така, що $f \in K_\alpha(\mathbb{D})$, $f \notin K(\mathbb{D})$ і $\partial\mathbb{D}$ є* *природною межею для f, тобто f не можна аналітично продовжити через жодну точку з $\partial\mathbb{D}$.*

Доведення. Близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f характеризується тим, що $f(\mathbb{D})$ – лінійно досяжна зовні область [1, с. 584], тобто $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{D})}$ можна заповнити проведеними з $\partial f(\mathbb{D})$ променями, які належать до $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{D})}$. Оскільки $f_1 \neq 0$, то звідси випливає, що функція (1) близька до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і тільки тоді, коли близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ є функція

$$f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_1} z^n.$$

Нехай $\alpha \leqslant 1$. Виберемо $\Phi(z) = z$. Тоді умова $\operatorname{Re} \dfrac{f_1'(z)}{\Phi'(z)} > 0\,(z \in \mathbb{D})$ матиме вигляд $\operatorname{Re} f_1'(z) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Тому, з огляду на (2), треба довести таке: якщо $\sum_{n=2}^{\infty} n|f_n/f_1| < 1$, то $\operatorname{Re} f_1'(z) > 0\,(z \in \mathbb{D})$. Але

$$\operatorname{Re} f_1'(z) = 1 + \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nf_n}{f_1} z^{n-1}\right\} \geqslant 1 - \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{nf_n}{f_1} z^{n-1}\right| \geqslant 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n|f_n|}{|f_1|}| > 0$$

і, отже, першу частину теореми (достатність умови $\alpha \leqslant 1$) доведено.

Нехай тепер $\alpha > 1$. Розглянемо функцію

$$f_0(z) = -\frac{(3+\alpha)(5-\alpha)}{16(\alpha+1)} + z - \frac{1+\alpha}{4} z^2.$$

Для цієї функції

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|f_n| = \frac{1+\alpha}{2} < \alpha = \alpha|f_1|,$$

тобто $f_0 \in K_\alpha(\mathbb{D})$. З іншого боку, $f_0(z_1) = f_0(z_2) = 0$, де $z_1 = \dfrac{3+\alpha}{2(\alpha+1)} \in \mathbb{D}$ і $z_2 = \dfrac{5-\alpha}{2(\alpha+1)} \in \mathbb{D}$, тобто f_0 не є однолистою і, отже, близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ функцією. Звідси випливає таке: якщо $\alpha > 1$, то $K_\alpha(\mathbb{D}) \not\subset K(\mathbb{D}$. Необхідність умови $\alpha \leqslant 1$ у наведеному перед формулюванням теореми твердженні доведено.

Далі, оскільки $|z_1| < 1$ і $|z_2| < 1$, то

$$0 < r_0 = r_0(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 + \max\{|z_1|, |z_2|\}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\max\{\alpha+3, |5-\alpha|\}}{2(\alpha+1)}\right) < 1.$$

Крім того, $|z_1| < r_0$ і $|z_2| < r_0$, тобто у крузі $\{z : |z| < r_0\}$ функція f_0 має два нулі. Оскільки $f_0(z) = \dfrac{1+\alpha}{4}(z - z_1)(z - z_2)$, то

$$|f(r_0 e^{i\theta})| \geqslant \frac{1+\alpha}{4}(r_0 - |z_1|)(r_0 - |z_2|) = q(\alpha), \tag{3}$$

де
$$q(\alpha) = \frac{1+\alpha}{4}\left(r_0 - \frac{3+\alpha}{2(\alpha+1)}\right)\left(r_0 - \frac{5-\alpha}{2(\alpha+1)}\right) > 0.$$

Нехай
$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n\beta} z^n, \quad \beta > 0.$$

Функція φ аналітична в $\mathbb{D}$, а за теоремою Адамара [2, с. 65] $\partial\mathbb{D}$ є для неї природною межею. Число β можна вибрати так, щоб
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-n\beta} < \min\left\{q(\alpha),\ \frac{\alpha-1}{2}\right\}.$$

Тоді
$$|\varphi(r_0 e^{i\theta})| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n\beta} < \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-n\beta} < q(\alpha). \tag{4}$$

Приймемо $f = f_0 + \varphi$. Тоді $\partial\mathbb{D}$ природна межа для f, а з (3) і (4) за теоремою Руше випливає, що у крузі $\{z : |z| < r_0\}$ функція f має два нулі і тому не належить до $K(\mathbb{D})$. З іншого боку,
$$\sum_{n=2}^{\infty} n|f_n| \leqslant \frac{1+\alpha}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 e^{-n\beta} < \frac{1+\alpha}{2} + \frac{\alpha-1}{2} = \alpha = \alpha|f_1|,$$

тобто $f \in K_\alpha(\mathbb{D})$. Теорему доведено.

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М., 1966.

2. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. – М., 1966.

ON CLOSE-TO-CONVEX FUNCTIONS

Zoryana Sheremeta

Instytut of Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Dudayeva Str., 15, 79005 Lviv, Ukraine

Let $K(\mathbb{D})$ be a class of close-to-convex functions in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ and $K_\alpha(\mathbb{D})$ be a class of analytic functions $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ in $\mathbb{D}$ such that $\sum_{n=2}^{\infty} n|f_n| < \alpha|f_1|$. It is proved that $K_\alpha(\mathbb{D}) \subset K(\mathbb{D})$ if and only if $\alpha \leqslant 1$.

Key words: close-to-convex functions, natural boundary.

Стаття надійшла до редколегії 01.04.2002
Прийнята до друку 02.10.2003