ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2003.Вип.62.С.147–151

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2003.Vol.62.P.147–151

УДК 517.537.72

ПРО МАКСИМУМ МОДУЛЯ ТА МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ СТЕПЕНЕВОГО ЗРОСТАННЯ

Мирослав ШЕРЕМЕТА
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Нехай Φ – додатна на $(-\infty,+\infty)$ функція така, що $\Phi'(\sigma)\uparrow+\infty$ $(\sigma\to+\infty)$ і $1<h\leqslant\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\leqslant H<+\infty$, $\sigma\in[\sigma_0,+\infty)$. Для цілого ряду Діріхле $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$ приймемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in\mathbb{R}\}$ і $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\geqslant 0\}$. Доведено, що співвідношення $\ln\mu(\sigma,F)\sim\Phi(\sigma)$ і $\ln M(\sigma,F)\sim\Phi(\sigma)$ при $\sigma\to+\infty$ рівносильні, якщо $\ln n=o(\Phi(\varphi(\lambda_n)))$, $n\to\infty$, де φ – функція, обернена до Φ'.

Ключові слова: цілі ряди Діріхле, максимум модуля, максимальний член.

Нехай $\Lambda=(\lambda_n)$ – зростача до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda;+\infty)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

зі заданою послідовністю показників (λ_n). Приймемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in\mathbb{R}\}$, і нехай $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1).

Через $\Omega(+\infty)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty,\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,\infty)$. Для $\Phi\in\Omega(+\infty)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [1] функція Ψ неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,\infty)$, а функція φ неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(0,+\infty)$.

У випадку, коли $\Phi\in\Omega(+\infty)$ і $\Phi(\sigma)=\sigma\alpha(\sigma)$ для $\sigma\geqslant\sigma_0$, де α – повільно зростаюча функція така, що $\dfrac{\sigma\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\ln\alpha(\sigma)\to 0\,(s_0\leqslant\sigma\to+\infty)$, в [2] знайдено необхідну і достатню умови на (λ_n) для еквівалентності співвідношень

$$\ln\mu(\sigma,F)\leqslant(1+o(1))\Phi(\sigma),\quad\sigma\to+\infty, \tag{2}$$

і

$$\ln M(\sigma,F)\leqslant(1+o(1))\Phi(\sigma),\quad\sigma\to+\infty. \tag{3}$$

Мета нашої праці – необхідна та достатня умова на (λ_n), за якої співвідношення (2) і (3) рівносильні у випадку, коли $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і

$$1 < h \leqslant \frac{\sigma\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)} \leqslant H < +\infty, \quad \sigma \in [\sigma_0, +\infty), \tag{4}$$

тобто функція Φ є близькою до степеневої.

Теорема. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ задовольняє умову (4), то для того щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda; +\infty)$ співвідношення (2) і (3) були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб послідовність Λ задовольняла умову*

$$\ln n = o(\Phi(\varphi(\lambda_n))), \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що умова (5) рівносильна умові

$$\ln n = o(\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_n)))), \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Справді, з огляду на (4) для деякого $\xi = \xi(\sigma) \in (\Psi(\sigma), \sigma)$, маємо

$$0 \leqslant \ln \Phi(\sigma) - \ln \Phi(\Psi(\sigma)) = \frac{\Phi'(\xi)}{\Phi(\xi)} \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} \leqslant \frac{\xi\Phi'(\xi)}{\Phi(\xi)} \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma\Phi'(\sigma)} \frac{\sigma}{\Psi(\sigma)} \leqslant \frac{H}{h(1-1/h)} = \frac{H}{h-1},$$

тобто $\Phi(\sigma) \asymp \Phi(\Psi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$ і умови (5), (6) рівносильні.

Подібно, для деякого $\xi \in (x, 2x)$

$$0 \leqslant \ln \Phi(\Psi(\varphi(2x))) - \ln \Phi(\Psi(\varphi(x))) \leqslant \frac{\Phi'(\Psi(\varphi(\xi)))}{\Phi(\Psi(\varphi(\xi)))} \Psi'(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)\xi =$$
$$= \frac{\Phi'(\Psi(\varphi(\xi)))}{\Phi(\Psi(\varphi(\xi)))} \frac{\Phi(\varphi(\xi))\Phi''(\varphi(\xi))\varphi'(\xi)\xi}{\Phi'(\varphi(\xi))^2} = \frac{\Phi'(\Psi(\varphi(\xi)))}{\Phi(\Psi(\varphi(\xi)))} \frac{\Phi(\varphi(\xi))}{\Phi'(\varphi(\xi))} \leqslant \frac{H}{h-1},$$

тобто $\Phi(\Psi(\varphi(2x))) \asymp \Phi(\Psi(\varphi(x)))$, $x \to +\infty$, оскільки $\Phi(\Psi(\sigma)) \leqslant \Psi(\sigma)\Phi'(\Psi(\sigma))/h \leqslant \Psi(\sigma)\Phi'(\sigma)/h$, то з (6) випливає співвідношення

$$\ln n = o(\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n/2))), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Зауважимо також, що $\Phi(2\sigma) \asymp \Phi(\sigma), \sigma \to \infty$.

Щоб довести достатність умови (5), використаємо таке твердження з [1]: *якщо $\Phi \in \Omega(+\infty)$, то для того щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$ необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n \geqslant n_0$.*

Припустимо, що правильне співвідношення (2). Тоді $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant 2\Phi(\sigma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, і за вищенаведеним твердженням $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n/2))$, $n \geqslant n_0$. Якщо приймемо $n^0(\sigma) = \min\{n : \Psi(\varphi(\lambda_n/2)) \geqslant 2\sigma\}$, то для всіх досить великих σ, завдяки (7), матимемо

$$M(\sigma, F) \leqslant \sum_{n=1}^{n^0(\sigma)-1} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} + \sum_{n=n^0(\sigma)}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant$$
$$\leqslant n^0(\sigma)\mu(\sigma, F) + \sum_{n=n^0(\sigma)}^{\infty} \exp\{-\lambda_n(\Psi(\varphi(\lambda_n/2)) - \sigma)\} \leqslant$$
$$\leqslant n^0(\sigma)\mu(\sigma, F) + \sum_{n=n^0(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda_n}{2}\Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right)\right\} = n^0(\sigma)\mu(\sigma, F) + o(1)$$

при $n \to +\infty$. Звідси і з (2) випливає, що $\ln M(\sigma, F) \leqslant (1+o(1))\Phi(\sigma) + \ln n^0(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, щоб отримати (3), залишилось показати, що $\ln n^0(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$. Але $\ln n^0(\sigma) = (1+o(1))\ln(n^0(\sigma)-1) \leqslant (1+o(1))\ln n(2\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))$, $\sigma \to +\infty$, де $n(t)$ – лічильна функція послідовності (λ_n). Тому з огляду на (6) і співвідношення $\Phi(2\sigma) \asymp \Phi(\sigma), \sigma \to \infty$, та $\Phi(\Psi(\varphi(2x))) \asymp \Phi(\Psi(\varphi(x)))$, $x \to +\infty$, маємо

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln n^0(\sigma)}{\Phi(\sigma)} = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln n(2\Phi'(\Psi^{-1}(2\sigma)))}{\Phi(\sigma)} = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln n(t)}{\Phi\left(\Psi(\varphi(t/2))/2\right)} = 0.$$

Отже, з (2) випливає (3), з огляду на нерівність Коші $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$, з (3) випливає (2). Достатність умови (5) доведено.

Щоб довести необхідність умови (5), з огляду на нерівність Коші, треба показати таке: якщо умова (6) не виконується, то існує цілий ряд Діріхле (1), для якого співвідношення (2) правильне, а співвідношення (3) не правильне.

Отже, нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_n)))} > \beta \in (0, 1]$. Тоді за лемою 4 з [3] (див. [2]) існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\beta\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_k^*)))\} + 1\ (k \in \mathbb{N})$ і $k_j \geqslant \exp\{\beta\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_{k_j}^*)))\}$ для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Приймемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, і $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-\lambda_k^*\Psi(\varphi(\lambda_k^*))\}$. Ряд Діріхле з такими коефіцієнтами є цілим, бо, з огляду на (4),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln k}{\lambda_k^*\Psi(\varphi(\lambda_k^*))} \leqslant \beta\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Phi(\Psi(\varphi(\lambda_k^*)))}{\lambda_k^*\Psi(\varphi(\lambda_k^*))} \leqslant \beta\, \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\Phi(\Psi(\varphi(t)))}{t\Psi(\varphi(t))} =$$
$$= \beta\, \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} \leqslant \beta\, \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma\Phi'(\sigma)} \leqslant \frac{\beta}{h} < 1.$$

Для цього ряду за наведеним у доведенні достатності твердженням з [1] маємо (2).

Нехай $m_j = \left[k_j - \sqrt{k_j}\,\right]$. Тоді для всіх досить великих j

$$\lambda_{m_j}^* \geqslant \Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\ln(m_j-1)}{\beta}\right)\right)\right) \geqslant \Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\ln\left(k_j - \sqrt{k_j} - 2\right)}{\beta}\right)\right)\right) \geqslant$$
$$\geqslant \Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\ln k_j}{\beta} - \frac{2}{\beta\sqrt{k_j}}\right)\right)\right) = \Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\ln k_j}{\beta}\right)\right)\right) -$$
$$-\left\{\Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\ln k_j}{\beta}\right)\right)\right) - \Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{\ln k_j}{\beta} - \frac{2}{\beta\sqrt{k_j}}\right)\right)\right)\right\} \geqslant \lambda_{k_j}^* - \delta_j,$$

де

$$\delta_j = \frac{2\Phi''(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)))}{\beta\sqrt{k_j}\Psi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)))\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))} = \frac{2\{\Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)))\}^2}{\beta\sqrt{k_j}\Phi(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)))\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2H\Phi(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)))}{\beta\sqrt{k_j}(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)))^2\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))}, \qquad \frac{\ln k_j}{\beta} - \frac{2}{\beta\sqrt{k_j}} \leqslant \xi_j \leqslant \frac{\ln k_j}{\beta}.$$

Приймаючи $x_j = \Psi^{-1}(\Phi^{-1}((\ln k_j)/2))$ і враховуючи, що $\Phi(\sigma) \asymp \Phi(\Psi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, маємо

$$\delta_j = o\left(\frac{\Phi(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}((\ln k_j)/2)))}{\sqrt{k_j}}\right) = o\left(\frac{\Phi(x_j)}{\exp\{(\beta/2)\Phi(\Psi(x_j))\}}\right) = o(1), \quad j \to \infty.$$

Приймемо $\sigma_j = \varphi(\lambda^\star_{k_j})$, нехай $\eta > 0$ таке, що $\Phi(\Psi(\sigma)) \geqslant \eta\Phi(\sigma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$. Оскільки $\sigma = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, то

$$\begin{aligned} M(\sigma_j, F) &\geqslant \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda^\star_k \Psi(\varphi(\lambda^\star_k)) + \sigma_j \lambda^\star_k\} \geqslant \\ &\geqslant (k_j - m_j + 1)\exp\{-\lambda^\star_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda^\star_{k_j})) + \sigma_j\lambda^\star_{m_j}\} \geqslant \\ &\geqslant \exp\left\{\frac{\beta}{2}\Phi(\Psi(\varphi(\lambda^\star_{k_j}))) - \lambda^\star_{k_j}\Psi(\varphi(\lambda^\star_{k_j})) + \varphi(\lambda^\star_{k_j})\lambda^\star_{k_j} - \varphi(\lambda^\star_{k_j})\delta_j\right\} = \\ &= \exp\left\{\Phi(\varphi(\lambda^\star_{k_j})) + \frac{\beta}{2}\Phi(\Psi(\varphi(\lambda^\star_{k_j}))) - \varphi(\lambda^\star_{k_j})\delta_j\right\} \geqslant \exp\left\{\left(1 + \frac{\beta\eta}{2} + o(1)\right)\Phi(\sigma_j)\right\} \end{aligned}$$

при $j \to \infty$, тобто (3) не виконується. Теорему повністю доведено.

Доводячи достатність умови (5), з огляду на нерівність Коші, ми показали таке: якщо правильне одне зі співвідношень (2) чи (3), то $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \ln M(\sigma, F) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) + o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$. Звідси легко отримуємо таке твердження.

Твердження. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ задовольняє умову (4), а показники цілого ряду Діріхле – умову (5), то співвідношення $\ln \mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, і $\ln M(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, рівносильні.*

1. *Шеремета М. Н., Федыняк С. И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т 39. – N 1. – С. 206-223.
2. *Шеремета Мирослав.* Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле повільного зростання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 57-61.
3. *Шеремета М. Н.* О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57. – N 2. – С. 283-296.

ON THE MAXIMUM MODULUS AND MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES OF POWER GROWTH

Myroslav Sheremeta

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Let Φ be a positive functions on $(-\infty, +\infty)$ such that $\Phi'(\sigma) \uparrow +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$ and $1 < h \leqslant \sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \leqslant H < +\infty, \sigma \in [\sigma_0, +\infty)$. For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ we put $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$. It is proved that relations $\ln \mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ and $\ln M(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ as $\sigma \to +\infty$ are equivalent provided $\ln n = o(\Phi(\varphi(\lambda_n)))$, $n \to \infty$, where φ is the inverse function to Φ'.

Key words: entire Dirichlet series, maximum modulus, maximal term.

Стаття надійшла до редколегії 23.04.2002
Прийнята до друку 02.10.2003