ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.5–17

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.5–17

УДК 517.956

ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НАПІВЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ СТЕФАНА НА ПРЯМІЙ

Руслан АНДРУСЯК
Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено теорему про глобальну розв'язність за t задачі з невідомими границями для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. На вихідні дані задачі, крім умов гладкості, накладаються умови монотонності та умови, які обмежують зростання правих частин системи та границі області.

Ключові слова: гіперболічна система, задача з невідомими границями.

Задачі Стефана (задачі з невідомими границями) виникають у багатьох проблемах теоретичного та прикладного природознавства, Здебільшого всі ці задачі нелінійні [1]. Тому більшість методів, які застосовували при розв'язанні таких задач, давали змогу одержувати локальний розв'язок.

У цій праці, користуючись методикою [2], одержано глобальну розв'язність задачі з невідомими границями для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку. На коефіцієнти задачі додатково накладаємо деякі умови монотонності та умови, які обмежують зростання правих частин системи й межі області.

При побудові глобального розв'язку розглядуваної задачі суттєво використано локальну розв'язність, близьку до формулювання задачі з [3].

1. Формулювання задачі. Розглядатимемо систему рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad i=\overline{1,n},\ u=(u_1,\dots,u_n), \tag{1}$$

де $u_i : G_T^u \to \mathbb{R}, i=\overline{1,n},\ \ G_T^u = \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\leqslant t\leqslant T,\ a_1^u(t)\leqslant x\leqslant a_2^u(t)\}$, причому функції a_k^u також невідомі і задовольняють систему рівнянь

$$\frac{da_k^u}{dt} = h_k(t, a^u(t), \{u(a_{k'}^u(t),t)\}_{k'=1,2}), \quad k=1,2,\ a^u=(a_1^u,a_2^u). \tag{2}$$

Початкові та граничні умови задано так:

$$a_k^u(0) = a_k^0, \quad k=1,2,\ a_1^0\neq a_2^0, \tag{3}$$

$$u_i(x,0) = g_i(x), \quad a_1^0 \leqslant x \leqslant a_2^0,\ i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$u_i(a_k^u(t),t) = H_k^i(t, a^u(t)), \quad i \in I_k,\ k = 1,2, \tag{5}$$

де

$$I_1 = \Big\{ i:\ \lambda_i(a_1^0,0) > h_1\big(0, a^0, \{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big) \Big\},$$

$$I_2 = \Big\{ i:\ \lambda_i(a_2^0,0) < h_2\big(0, a^0, \{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big) \Big\}, \ \ a^0 = (a_1^0, a_2^0).$$

Припустимо, що

$$\lambda_i(a_k^0,0) \neq h_k\big(0, a^0, \{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big), \quad i = \overline{1,n},\ k = 1,2. \tag{6}$$

2. Узагальнений розв'язок задачі. Введемо S_T – метричний простір наборів $u = \{u_i\}$, $i = \overline{1,n}$, $u_i \in C(G_T^u)$; $a^u = \{a_k^u\}$, $k = 1,2$, $a_k^u \in C[0,T]$, $a_1^u(t) < a_2^u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, причому задовольняються початкові умови (3), (4). Метрику введемо за формулою

$$\rho(u,v) = \max\big\{ \max_{k,t} |a_k^u(t) - a_k^v(t)|, \max_{i,x,t} |\overline{u}_i(x,t) - \overline{v}_i(x,t)| \big\}.$$

Тут для довільної $\phi : G_T^u \to \mathbb{R}$ під $\overline{\phi}$ розуміємо функцію, яка слугує продовженням ϕ на $\mathbb{R} \times [0,T]$ за формулою $\overline{\phi}(x,t) = \phi(a_1^u(t),t)$, $x < a_1^u(t)$; $\overline{\phi}(x,t) = \phi(a_2^u(t),t)$, $x > a_2^u(t)$.

Позначимо через $\varphi_i(\tau; x,t)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_i(\xi,\tau),\ \xi\Big|_{\tau=t} = x,\ i = \overline{1,n}.$$

Припустивши, що в (1) функції u_i неперервно диференційовні і, що

$$\lambda_i(a_k^u(t),t) \neq h_k\big(t, a^u(t), \{u(a_{k'}^u(t),t)\}_{k'=1,2}\big),\ k = 1,2,\ i = \overline{1,n},\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

інтегруючи (1) вздовж характеристик, приходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t) = \vartheta_i(x,t;u) + \int\limits_{\chi_i(x,t;u)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, u(\varphi_i(\tau;x,t),\tau))\, d\tau,\ i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

де $(x,t) \in G_T^u$, $\chi_i(x,t;u) = \min\{\tau : (\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \in G_T^u\}$,

$$\vartheta_i(x,t;u) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0;x,t)), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t;u) = 0; \\ H_k^i\Big(\chi_i(x,t;u), a^u\big(\chi_i(x,t;u)\big)\Big), & \text{якщо} \quad \chi_i(x,t;u) > 0, \\ & \varphi_i(\chi_i(x,t;u);x,t) = a_k^u(\chi_i(x,t;u)). \end{cases} \tag{9}$$

Під узагальненим (ліпшицевим) розв'язком задачі (1) – (5) розумітимемо набір $u \in S_T$ функцій, які задовольняють умову Ліпшиця, умову (7) і системи рівнянь (2), (8).

3. Локальна розв'язність. Нехай $f_i(x,t,u), i=\overline{1,n}$ – неперервні на $\mathbb{R}\times[0,T]\times\mathbb{R}^n$, локально ліпшицеві за x, u; $h_k(t,\zeta,\{\omega^{k'}\}_{k'=1,2})$, $k=1,2$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$, $\omega^{k'}=(\omega_1^{k'},\dots,\omega_n^{k'})$– визначені на $[0,T]\times\mathbb{R}^{2+2n}$, локально ліпшицеві за всіма аргументами; $\lambda_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$ – неперервні на $\mathbb{R}\times[0,T]$, локально ліпшицеві за x; $g_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – ліпшицеві на $[a_1^0,a_2^0]$; $H_k^i(t,\zeta)$, $k=1,2$, $i\in I_k$, $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)$– визначені на $[0,T]\times\mathbb{R}^2$, задовольняють локально умову Ліпшиця за всіма аргументами.

Припустимо також, що виконуються умови погодження

$$g_i(a_k^0)=H_k^i(0,a^0),\ i\in I_k,\ k=1,2, \tag{10}$$

тоді правильна теорема.

Теорема. *Якщо виконуються припущення щодо неперервності та ліпшицевості заданих функцій, а також умови (6), (10), тоді узагальнений розв'язок задачі (1) – (5) існує і єдиний при* $0\leqslant t\leqslant\varepsilon_0$ *для довільного досить малого* $\varepsilon_0>0$.

Доведення. Позначимо через $S=S_{\varepsilon\alpha\beta p}$– підмножину S_ε, $\varepsilon\in(0,T]$, що складається з наборів $u=\{u_i\}, i=\overline{1,n}$, $a^u=\{a_k^u\}, k=1,2$, для яких виконано умови:

1) функції $t\mapsto a_k^u(t)-h_k\big(0,a^0,\{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)t$, $k=1,2$, $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$ – задовольняють умову Ліпшиця з постійною α;
2) $\big|u_i(x,t)-\overline{g}_i(x)\big|\leqslant\beta$, $i=\overline{1,n}$, $(x,t)\in G_\varepsilon^u$;
3) функції u_i задовольняють умову Ліпшиця за x зі сталою p.

На S визначимо оператор A так. Нехай $u\in S$, тоді $Au=\{A_iu\}$, $i=\overline{1,n}$, де $A_iu: G_\varepsilon^{Au}\to\mathbb{R}$, причому G_ε^{Au} обмежена з боків лініями

$$x=a_k^{Au}(t)=a_k^0+\int\limits_0^t h_k\big(\tau,a^u(\tau),\{u(a_{k'}^u(\tau),\tau)\}_{k'=1,2}\big)\,d\tau,\ \ k=1,2,\ 0\leqslant t\leqslant\varepsilon,$$

а значення функції A_iu задані формулою

$$(A_iu)(x,t)=\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u)+\int\limits_{\chi_i(x,t;\tilde{A}u)}^t f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\big)\,d\tau, \tag{11}$$

де $\tilde{A}u=\{\tilde{A}_iu\}$, $i=\overline{1,n}$, а $\tilde{A}_iu$ – звуження $\overline{u}_i$ на G_ε^{Au}. Зауважимо, що $\chi_i(x,t;\tilde{A}u)=\chi_i(x,t;Au)$.

Зафіксуємо $\varepsilon=\varepsilon_0,\alpha=\alpha_0,\beta=\beta_0$. Тоді $u\in S$, а $G_{\varepsilon_0}^u\subset T_{\varepsilon_0\alpha_0}$, де $T_{\varepsilon_0\alpha_0}$– трапеція з основами $t=0,t=\varepsilon_0$ і бічними сторонами

$$x_k=a_k^0+h_k\big(0,a^0,\{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)t-\alpha_0t,\ \ k=1,2,\ 0\leqslant t\leqslant\varepsilon_0.$$

Отже, при $u\in S,(x,t)\in G_{\varepsilon_0}^u$ правильні оцінки $|f_i(x,t,u)|\leqslant F$, $|\lambda_i(x,t)|\leqslant\Lambda$, $i=\overline{1,n}$; $\big|h_k\big(t,a^u(t),\{u(a_{k'}^u(t),t)\}_{k'=1,2}\big)\big|\leqslant H$, $k=1,2$; причому $f_i(x,t,u)$, $i=\overline{1,n}$ задовольняють за x,u; $\lambda_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$ – за x; $h_k(t,\zeta,\{\omega^{k'}\}_{k'=1,2})$, $H_k^i(t,\zeta)$, $k=1,2$, $i\in I_k$– за всіма своїми аргументами умову Ліпшиця з постійними f_0,λ_0,h_0,H_0 відповідно. Зауваживши, що при досить малих значеннях параметрів ε_0,β_0, a_k^{Au}, $k=1,2$

задовольнятиме умову 1, повторно зменшивши, якщо треба, ε_0 і β_0, отримаємо оцінку

$$\Big|h_k\big(t, a^u(t), \{u(a^u_{k'}(t), t)\}_{k'=1,2}\big) - \lambda_i(a^{Au}_k(t), t)\Big| \geqslant \gamma > 0,\ k = 1, 2,\ i \in I_k,\ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0,$$

а отже, оператор A визначений коректно.

Знайдемо умови, при яких оператор A відображає S в себе, тобто Au при $u \in S$ володіє властивостями 2 і 3.

Розглянемо умову 2. При $(x,t) \in G^{Au}_{\varepsilon_0}$ маємо

$$\big|(A_i u)(x,t) - \overline{g}_i(x)\big| \leqslant \Big| \int\limits_{\chi_i(x,t;Au)}^{t} f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t), \tau, (\tilde{A}u)(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\big)\, d\tau\Big| +$$

$$= \big|\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u) - \overline{g}_i(x)\big| \leqslant F\varepsilon_0 + \big|\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u) - \overline{g}_i(x)\big|.$$

Якщо $\chi_i(x,t;Au) = 0$, то $\big|\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u) - \overline{g}_i(x)\big| = \big|g_i(\varphi_i(0;x,t)) - \overline{g}_i(x)\big| \leqslant r\Lambda\varepsilon_0$, де r – стала Ліпшиця для $g_i(x)$.

Якщо $\chi_i(x,t;Au) > 0$, то отримаємо

$$\big|\vartheta_i(x,t;\tilde{A}u) - \overline{g}_i(x)\big| = \Big|H^i_k\Big(\chi_i(x,t;Au), a^{Au}\big(\chi_i(x,t;Au)\big)\Big) - H^i_k(0,a^0)\Big| +$$

$$+ \big|g_i(a^0_k) - \overline{g}_i(x)\big| \leqslant H_0 \max_{k'}\Big\{\chi_i(x,t;Au), \big|a^{Au}_{k'}(\chi_i(x,t;Au)) - a^0_{k'}\big|\Big\} + r\big|a^0_k - x\big| \leqslant$$

$$\leqslant H_0 \max\big\{1, H\big\} \times \chi_i(x,t;Au) + r\big(\Lambda(t - \chi_i(x,t;Au)) + H\chi_i(x,t;Au)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \max\big\{1, H, \Lambda\big\}\big(H_0 + r\big)\varepsilon_0.$$

Отож, для виконання властивості 2 достатньо, щоб

$$\Big[F + \max\big\{1, H, \Lambda\big\}\big(H_0 + r\big)\Big]\varepsilon_0 \leqslant \beta_0. \tag{12}$$

Розглянемо умову 3. Нехай $(x_j, t) \in G^{Au}_{\varepsilon_0}$, $j = 1, 2$. Тоді, оцінюючи $\big|(A_i u)(x_2,t) - (A_i u)(x_1,t)\big|$, достатньо вважати, що при застосуванні формули (11) або обидва значення $\vartheta_i(x_j,t;\tilde{A}u)$ підраховуються за першою формулою (9) або за другою, причому з однаковим k. Позначимо $\Delta\Phi_j = \Phi_2 - \Phi_1$. Тоді в першому випадку

$$\big|\Delta(A_i u)(x_j,t)\big| \leqslant \int\limits_0^t \big|\Delta f_i\big(\varphi_i(\tau;x_j,t), \tau, (\tilde{A}u)(\varphi_i(\tau;x_j,t),\tau)\big)\big|\, d\tau + \big|\Delta g_i(\varphi_i(0;x_j,t))\big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t f_0 \max\big\{\big|\Delta\varphi_i(\tau;x_j,t)\big|, p\big|\Delta\varphi_i(\tau;x_j,t)\big|\big\}\, d\tau + r\big|\Delta\varphi_i(0;x_j,t)\big|.$$

З інтегрального зображення $\varphi_i(\tau;x_j,t)$ і леми Гронуолла-Белмана одержуємо оцінку

$$\big|\Delta\varphi_i(\tau;x_j,t)\big| \leqslant \big|\Delta x_j\big|\, e^{\lambda_0\varepsilon_0},\ \ i = \overline{1,n},\ j = 1, 2.$$

Отже, $\big|\Delta(A_i u)(x_j,t)\big| \leqslant f_0 p\big|\Delta x_j\big| e^{\lambda_0\varepsilon_0}\varepsilon_0 + r\big|\Delta x_j\big| e^{\lambda_0\varepsilon_0}$, $(p \geqslant 1)$. У другому випадку, вважаючи для визначеності $k=1, x_1 < x_2$, отримаємо

$$\big|\Delta(A_i u)(x_j,t)\big| \leqslant \int\limits_{\chi_i(x_1,t;Au)}^{t} \big|\Delta f_i\big(\varphi_i(\tau;x_j,t),\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i(\tau;x_j,t),\tau)\big)\big|\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i(x_2,t;Au)}^{\chi_i(x_1,t;Au)} \big|f_i\big(\varphi_i(\tau;x_2,t),\tau,(\tilde{A}u)(\varphi_i(\tau;x_2,t),\tau)\big)\big|\, d\tau +$$

$$+\Big|\Delta H_1^i\Big(\chi_i(x_j,t;Au), a^{Au}\big(\chi_i(x_j,t;Au)\big)\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant f_0 p\big|\Delta x_j\big| e^{\lambda_0\varepsilon_0}\varepsilon_0 + F\big|\Delta\chi_i(x_j,t;Au)\big| + H_0\max\{1,H\}\big|\Delta\chi_i(x_j,t;Au)\big|.$$

Оцінимо різницю $\big|\Delta\chi_i(x_j,t;Au)\big|$. Нехай

$$(H+\Lambda)\varepsilon_0 \leqslant \frac{\gamma}{2\lambda_0}, \tag{13}$$

тоді $|a_k^{Au}(\tau) - \varphi_i(\tau;x,t)| \leqslant \dfrac{\gamma}{2\lambda_0}$, за умови $\chi_i(x,t;Au) > 0$ і $\varphi_i(\chi_i(x,t;Au);x,t) = a_k^{Au}(\chi_i(x,t;Au))$. Тому

$$\Big|h_k\big(\tau,a^u(\tau),\{u(a_{k'}^u(\tau),\tau)\}_{k'=1,2}\big) - \lambda_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \Big|h_k\big(\tau,a^u(\tau),\{u(a_{k'}^u(\tau),\tau)\}_{k'=1,2}\big) - \lambda_i(a_k^{Au}(\tau),\tau)\Big| -$$

$$-\big|\lambda_i(a_k^{Au}(\tau),\tau) - \lambda_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\big| \geqslant \gamma - \lambda_0\big|a_k^{Au}(\tau) - \varphi_i(\tau;x,t)\big| \geqslant \gamma - \lambda_0\frac{\gamma}{2\lambda_0} = \frac{\gamma}{2}.$$

Оскільки

$$\frac{d}{d\tau}\big(a_k^{Au}(\tau) - \varphi_i(\tau;x,t)\big) = h_k\big(\tau,a^u(\tau),\{u(a_{k'}^u(\tau),\tau)\}_{k'=1,2}\big) - \lambda_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau),$$

то

$$\big|\Delta\chi_i(x_j,t;Au)\big| \leqslant \frac{2}{\gamma}\,\big|a_1^{Au}\big(\chi_i(x_1,t;Au)\big) - \varphi_i\big(\chi_i(x_1,t;Au);x_2,t\big)\big| =$$

$$= \frac{2}{\gamma}\,\big|\Delta\varphi_i\big(\chi_i(x_1,t;Au);x_j,t\big)\big| \leqslant \frac{2}{\gamma}\big|\Delta x_j\big| e^{\lambda_0\varepsilon_0}.$$

Повертаючись до різниці операторів, отримаємо

$$\big|\Delta(A_i u)(x_j,t)\big| \leqslant f_0 p\big|\Delta x_j\big| e^{\lambda_0\varepsilon_0}\varepsilon_0 + F\frac{2}{\gamma}\big|\Delta x_j\big| e^{\lambda_0\varepsilon_0} + H_0\max\{1,H\}\frac{2}{\gamma}\big|\Delta x_j\big| e^{\lambda_0\varepsilon_0}.$$

Отож, щоб виконувалась для Au властивість 3, достатньо вимагати

$$e^{\lambda_0\varepsilon_0}\Big(f_0 p\varepsilon_0 + \max\Big\{r, \frac{2}{\gamma}(F + H_0\max\{1,H\})\Big\}\Big) \leqslant p.$$

Вважаючи r досить великим, одержимо

$$e^{\lambda_0 \varepsilon_0}\big(f_0 p \varepsilon_0 + r\big) \leqslant p. \tag{14}$$

Припустимо тепер, що всі зазначені умови, які забезпечують включення $AS \subset S$, виконані. З'ясуємо, при яких обмеженнях на ε_0 такий оператор буде стискуючим. Нехай $u^j \in S, j = 1, 2,\ u^j = (u_1^j, \ldots, u_n^j)$ і $\rho(u^1, u^2) = \rho$. Тоді

$$\big|\Delta a_k^{Au^j}(t)\big| \leqslant \int\limits_0^t \big|\Delta h_k\big(\tau, a^{u^j}(\tau), \{u^j(a_{k'}^{u^j}(\tau), \tau)\}_{k'=1,2}\big)\big|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t h_0 \max\big\{|\Delta a^{u^j}(\tau)|, |\Delta u^j(a_1^{u^j}(\tau), \tau)|, |\Delta u^j(a_2^{u^j}(\tau), \tau)|\big\}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_0 h_0 \max\big\{\max_{k,t} |\Delta a_k^{u^j}(t)|, \max_{i,x,t} |\Delta \overline{u}_i^j(x,t)|\big\} = \varepsilon_0 h_0 \rho.$$

Ми отримали оцінку

$$\big|\Delta a_k^{Au^j}(t)\big| \leqslant \varepsilon_0 h_0 \rho,\ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0,$$

з якої випливають нерівності

$$\rho(\tilde{A}u^1, \tilde{A}u^2) \leqslant \max\big\{\varepsilon_0 h_0 \rho,\ \max_{i,x,t}\big|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u^j})(x,t)\big|\big\},$$

$$\rho(Au^1, Au^2) \leqslant \max\big\{\varepsilon_0 h_0 \rho,\ \max_{i,x,t}\big|\Delta(\overline{A_i u^j})(x,t)\big|\big\}.$$

Оцінимо $\big|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u^j})(x,t)\big|$. Нехай для визначеності $k = 1$. Тоді, позначивши $a_1^j(t) = \max\big\{a_1^{u^j}(t), a_1^{Au^j}(t)\big\}$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$, $j = 1, 2$, отримаємо, що

$$\big|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u^j})(x,t)\big| \leqslant \rho + \big|\Delta u_i^{j_0}(a_1^j(t))\big|,$$

де $j_0 = 1$, якщо $a_1^1(t) \leqslant a_1^2(t)$, і $j_0 = 2$, якщо $a_1^1(t) > a_1^2(t)$, при кожному фіксованому t. Використавши умову 3, маємо

$$\big|\Delta(\overline{\tilde{A}_i u^j})(x,t)\big| \leqslant \rho + p|\Delta a_1^j(t)| \leqslant \rho + p\big(|\Delta a_1^{u^j}(t)| + |\Delta a_1^{Au^j}(t)|\big) \leqslant \rho + p(\rho + \varepsilon_0 h_0 \rho)$$

Отже,

$$\rho(\tilde{A}u^1, \tilde{A}u^2) \leqslant \rho(1 + p + \varepsilon_0 h_0 p).$$

Оцінимо $\big|\Delta(\overline{A_i u^j})(x,t)\big|$. Якщо $(x,t) \in G_{\varepsilon_0}^{Au^1} \cap G_{\varepsilon_0}^{Au^2}$ і $\chi_i(x, t; Au^j) = 0$, $j = 1, 2$, то

$$\big|\Delta(\overline{A_i u^j})(x,t)\big| = \big|\Delta(A_i u^j)(x,t)\big| \leqslant \int\limits_0^t \big|\Delta f_i\big(\varphi_i(\tau; x, t), \tau, (\tilde{A}u^j)(\varphi_i(\tau; x,t), \tau)\big)\big|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t f_0 \rho(\tilde{A}u^1, \tilde{A}u^2)\, d\tau \leqslant \varepsilon_0 f_0 (1 + p + \varepsilon_0 h_0 p)\rho.$$

Нехай тепер $(x,t) \in G_{\varepsilon_0}^{Au^1} \cap G_{\varepsilon_0}^{Au^2}$ і $\chi_i(x,t;Au^j) > 0$, $j=1,2$. Для визначеності приймемо $k=1$, $\chi_i(x,t;Au^1) > \chi_i(x,t;Au^2)$. Тоді

$$\left|\Delta(A_iu^j)(x,t)\right| \leqslant \int\limits_{\chi_i(x,t;Au^1)}^{t} \left|\Delta f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,(\tilde{A}u^j)(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\big)\right| d\tau +$$

$$+\int\limits_{\chi_i(x,t;Au^2)}^{\chi_i(x,t;Au^1)} \left|f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,(\tilde{A}u^2)(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\big)\right| d\tau +$$

$$+\left|\Delta H_1^i\big(\chi_i(x,t;Au^j),a^{Au^j}(\chi_i(x,t;Au^j))\big)\right| \leqslant \varepsilon_0 f_0(1+p+\varepsilon_0 h_0 p)\rho + F\left|\Delta\chi_i(x,t;Au^j)\right| +$$

$$+\left|\Delta H_1^i\big(\chi_i(x,t;Au^j),a^{Au^1}(\chi_i(x,t;Au^j))\big)\right| + \left|\Delta H_1^i\big(\chi_i(x,t;Au^2),a^{Au^j}(\chi_i(x,t;Au^2))\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_0 f_0(1+p+\varepsilon_0 h_0 p)\rho + F\left|\Delta\chi_i(x,t;Au^j)\right| + H_0\max\{1,H\}\left|\Delta\chi_i(x,t;Au^j)\right| + H_0\varepsilon_0 h_0\rho.$$

Далі

$$\left|\Delta\chi_i(x,t;Au^j)\right| \leqslant \frac{2}{\gamma}\left|a_1^{Au^2}(\chi_i(x,t;Au^1)) - a_1^{Au^1}(\chi_i(x,t;Au^1))\right| \leqslant \frac{2}{\gamma}\,\varepsilon_0 h_0\rho.$$

Тому

$$\left|\Delta(A_iu^j)(x,t)\right| \leqslant \varepsilon_0 f_0(1+p+\varepsilon_0 h_0 p)\rho + \big(F + H_0\max\{1,H\}\big)\frac{2}{\gamma}\,\varepsilon_0 h_0\rho + H_0\varepsilon_0 h_0\rho.$$

Розглянемо випадок, коли $(x,t) \in G_{\varepsilon_0}^{Au^2}$, але $(x,t) \notin G_{\varepsilon_0}^{Au^1}$. Прийнявши знову для визначеності $k=1$, отримаємо

$$\Delta(\overline{A_iu^j})(x,t) = (A_iu^2)(x,t) - (A_iu^2)(a_1^{Au^1}(t),t) + \Delta(A_iu^j)(a_1^{Au^1}(t),t),$$

причому $|x - a_1^{Au^1}(t)| \leqslant \varepsilon_0 h_0\rho$. Тому

$$\left|\Delta(\overline{A_iu^j})(x,t)\right| \leqslant p\varepsilon_0 h_0\rho + \left|\Delta(A_iu^j)(a_1^{Au^1}(t),t)\right|.$$

Однак $(a_1^{Au^1}(t),t) \in G_{\varepsilon_0}^{Au^1} \cap G_{\varepsilon_0}^{Au^2}$, тобто ми одержали вже розглянутий вище випадок.

Отож,

$$\left|\Delta(\overline{A_iu^j})(x,t)\right| \leqslant \varepsilon_0 f_0(1+p+\varepsilon_0 h_0 p)\rho + \big(F + H_0\max\{1,H\}\big)\frac{2}{\gamma}\,\varepsilon_0 h_0\rho + H_0\varepsilon_0 h_0\rho +$$

$$+p\varepsilon_0 h_0\rho = \Big[f_0(1+p+\varepsilon_0 h_0 p) + \big(F + H_0\max\{1,H\}\big)\frac{2}{\gamma}\,h_0 + H_0 h_0 + p h_0\Big]\varepsilon_0\rho.$$

Отже, якщо

$$\Big[f_0(1+p+\varepsilon_0 h_0 p) + \big(F + H_0\max\{1,H\}\big)\frac{2}{\gamma}\,h_0 + H_0 h_0 + p h_0\Big]\varepsilon_0 < 1, \tag{15}$$

то відображення $A : S \to S$ буде стискуючим.

Вибравши ε_0 настільки малим, щоб виконувались співвідношення (12) – (14), (15), а p достатньо великим, отримаємо, за принципом стискуючих відображень, існування і єдиність в S розв'язку $\{u, a^u\}$ системи рівнянь (2), (8), який задовольняє умову (7).

Оскільки $u \in S$, то u задовольняє умову Ліпшиця за x зі сталою p. Вважатимемо, що

$$(H + \Lambda)\varepsilon_0 \leqslant \frac{a_2^0 - a_1^0}{2}. \tag{16}$$

Тоді для довільних точок $(x, t_1), (x, t_2) \in G^u_{\varepsilon_0}$, $t_1 < t_2$ можна знайти або точку $(x_1, t_1) \in G^u_{\varepsilon_0}$ таку, що $x_1 = \varphi_i(t_1; x, t_2)$, або точку $(x_1, t_2) \in G^u_{\varepsilon_0}$ таку, що $x = \varphi_i(t_1; x_1, t_2)$, $i = \overline{1,n}$. Розглянувши в першому випадку

$$|u_i(x,t_1) - u_i(x,t_2)| \leqslant |u_i(x,t_1) - u_i(x_1,t_1)| + |u_i(x_1,t_1) - u_i(x,t_2)| \leqslant$$
$$\leqslant p|x - x_1| + F|t_1 - t_2| \leqslant (p\Lambda + F)|t_1 - t_2|,$$

і аналогічно в другому випадку, ми бачимо, що за сталу Ліпшиця для функції u за t можна прийняти $p\Lambda + F$. Отже, $u \in S$ – узагальнений розв'язок задачі (1) – (5).

З іншого боку, кожний узагальнений розв'язок (1) – (5) належить якійсь множині $S_{\overline{\varepsilon}\,\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{p}}$, зменшивши $\overline{\varepsilon}$, можемо вважати $\overline{\varepsilon} \leqslant \varepsilon_0, \overline{\alpha} \leqslant \alpha_0, \overline{\beta} \leqslant \beta_0, \overline{p} \leqslant p$, а після зменшення ε_0 до $\overline{\varepsilon}$ вважати, що $S_{\overline{\varepsilon}\,\overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{p}} \subset S_{\varepsilon_0\alpha_0\beta_0 p}$. Локальна єдиність узагальненого розв'язку (1) – (5) доведена.

4. Глобальна розв'язність. Зробимо додаткові припущення. Нехай $\left|h_k\big(t, \zeta, \{\omega^{k'}\}_{k'=1,2}\big)\right| \leqslant H$ на $[0,T] \times \mathbb{R}^{2+2n}$, $k = 1,2$; $\lambda_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$ – неспадні за x; $h_1\big(t, \zeta, \{\omega^{k'}\}_{k'=1,2}\big) \leqslant 0, h_2\big(t, \zeta, \{\omega^{k'}\}_{k'=1,2}\big) \geqslant 0$ на $[0,T] \times \mathbb{R}^{2+2n}$. Припустимо, що існує сумовна на $[0,T]$ функція $M(t)$ і неперервна, неспадна функція $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для якої $\psi(0) = 0$ і $\int\limits_0^\infty \dfrac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \infty$ і що на $\Omega^T \times \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$|f_i(x,t,u)| \leqslant M(t)\psi(\|u\|),\ i = \overline{1,n},$$

де $\Omega^T = \{(x,t) | 0 \leqslant t \leqslant T,\ a_1^0 - Ht \leqslant x \leqslant a_2^0 + Ht\}$, $\|u\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i|$. Нехай також

$$\operatorname{sgn}\Big(h_k\big(t, \zeta_1, \zeta_2, \{\omega^{k'}\}_{k'=1,2}\big) - \lambda_i(\zeta'_k, t)\Big) \neq 0,\ i = \overline{1,n},\ k = 1,2, \tag{17}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $a_1^0 - (H + \alpha_0)t \leqslant \zeta_1, \zeta'_1 \leqslant a_1^0$, $a_2^0 \leqslant \zeta_2, \zeta'_2 \leqslant a_2^0 + (H + \alpha_0)t$, $\|\omega^{k'}\| \leqslant P_0$, $k' = 1,2$. Тут $\alpha_0 > 0$– фіксована константа. Зауважимо, що зміст величини P_0 буде з'ясований нижче.

Теорема 2. *При виконанні умов теореми 1 та припущень п.4 задача (1) – (5) має єдиний узагальнений розв'язок, визначений для всіх $t \in [0,T]$, де T – як завгодно велике.*

Доведення. Нехай G – константа, яка обмежує $|g_i(x)|$, $i = \overline{1,n}$ на $[a_1^0, a_2^0]$, а $\tilde{H}$ обмежує $|H_k^i(t,\zeta)|$, $i \in I_k$, $k = 1,2$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, при $0 \leqslant t \leqslant T$, $a_1^0 - Ht \leqslant \zeta_1, \zeta_2 \leqslant a_2^0 + Ht$.

Якщо u – узагальнений розв'язок задачі (1) – (5), то

$$\|u(x,t)\| \leqslant \max\{\tilde{H}, G\} + \int\limits_0^t M(\tau)\psi(\max_{\substack{0<\theta<\tau \\ a_1^0 - H\theta < \xi < a_2^0 + H\theta}} \|u(\xi,\theta)\|)\, d\tau.$$

Звідси отримаємо, що $\|u(x,t)\|$ не перевищує сталої μ, яка визначається з рівняння

$$\int\limits_{\max\{\tilde{H},G\}}^{\mu} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \int\limits_0^T M(\tau)\, d\tau.$$

Зафіксуємо $P_0 > \mu$. Позначимо $\Omega_{\alpha_0}^T = \{(x,t)|0 \leqslant t \leqslant T,\, a_1^0 - (H+\alpha_0)t \leqslant x \leqslant a_2^0 + (H+\alpha_0)t\}$. Якщо $(x,t,u) \in \Omega_{\alpha_0}^T \times \{u : \|u\| \leqslant P_0\}$, то $f_i(x,t,u)$, $\lambda_i(x,t)$, $i = \overline{1,n}$– задовольняють умову Ліпшиця з константами f_0, λ_0 відповідно; $|f_i(x,t,u)| \leqslant F$, $|\lambda_i(x,t)| \leqslant \Lambda$. Якщо $(t,\zeta,\{\omega\}) \in \Omega_{\alpha_0}^T \times \{\omega : \|\omega\| \leqslant P_0\}$, то аналогічно $h_k(t,\zeta,\{\omega^{k'}\}_{k'=1,2})$, $H_k^i(t,\zeta), i \in I_k$, $k = 1,2$– задовольняють умову Ліпшиця зі сталими h_0, H_0 відповідно.

Введемо підпростір $\tilde{S}$ простору S, наклавши на функції a_k^u, $k = 1,2$ додаткові вимоги монотонності, а саме вимагатимемо, щоб $a_1^u(t)$ була монотонно незростаючою за t, а $a_2^u(t)$– неспадною. Легко бачити, врахувавши знакосталість функцій $h_k\big(t,\zeta,\{\omega^{k'}\}_{k'=1,2}\big), k = 1,2$, що при дії оператора A ці властивості зберігатимуться.

Розглянемо умови, достатні для того, щоб $a_k^{Au}(t)$ задовольняло 1. Маємо

$$\left|\frac{d}{dt}\, a_k^{Au}(t) - h_k\big(0,a^0,\{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)\right| = \Big|h_k\big(t,a^u(t),\{u(a_{k'}^u(t),t)\}_{k'=1,2}\big) -$$

$$-h_k\big(0,a^0,\{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)\Big| \leqslant h_0 \max_{k',i}\big\{t, |a_{k'}^u(t) - a_{k'}^0|, |u_i(a_{k'}^u(t),t) - g_i(a_{k'}^0)|\big\}.$$

Оскільки $a_k^u(t)$ задовольняє 1, то

$$|a_{k'}^u(t) - a_{k'}^0| \leqslant \Big(\big|h_k\big(0,a^0,\{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)\big| + \alpha_0\Big)t \leqslant (H+\alpha_0)\,\varepsilon_0.$$

З властивості 2 випливає оцінка $|u_i(a_{k'}^u(t),t) - g_i(a_{k'}^0)| = |u_i(a_{k'}^u(t),t) - \overline{g}_i(a_{k'}^u(t))| \leqslant \beta_0$. Отже,

$$\left|\frac{d}{dt}\, a_k^{Au}(t) - h_k\big(0,a^0,\{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)\right| \leqslant h_0 \max\big\{\varepsilon_0, (H+\alpha_0)\varepsilon_0, \beta_0\big\}.$$

Зафіксуємо $\beta_0 = \min\left\{\dfrac{\alpha_0}{h_0},\, P_0 - \mu\right\}$. Тоді умова

$$\varepsilon_0 \leqslant \min\left\{\beta_0, \frac{\beta_0}{H+\alpha_0}\right\} \tag{18}$$

є достатньою для виконання співвідношення

$$\left|\frac{d}{dt}\, a_k^{Au}(t) - h_k\big(0,a^0,\{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)\right| \leqslant \alpha_0,$$

яке є достатнім для ліпшицевості функції $t \mapsto a_k^{Au}(t) - h_k\big(0, a^0, \{g(a_{k'}^0)\}_{k'=1,2}\big)t$ зі сталою α_0. Враховуючи (17), отримаємо

$$h_k\big(t, a^u(t), \{u(a_{k'}^u(t), t)\}_{k'=1,2}\big) \neq \lambda_i(a_k^{Au}(t), t), \; k = 1,2, \; i = \overline{1,n}, \; 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0.$$

Отож, оператор A коректно визначений.

Нехай γ визначається з нерівності

$$\Big|h_k\big(t, \zeta_1, \zeta_2, \{\omega^{k'}\}_{k'=1,2}\big) - \lambda_i(\zeta'_k, t)\Big| \geqslant \gamma > 0, \; i \in I_k, \; k = 1,2,$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$, $a_1^0 - (H+\alpha_0)t \leqslant \zeta_1, \zeta'_1 \leqslant a_1^0$, $a_2^0 \leqslant \zeta_2, \zeta'_2 \leqslant a_2^0 + (H+\alpha_0)t$, $\|\omega^{k'}\| \leqslant P_0$, $k' = 1,2$. Існування такої сталої γ випливає з неперервності функцій h_k та λ_i, $(k = 1,2, \, i = \overline{1,n})$.

Зазначимо, що з монотонності $\lambda_i(x,t)$ за x випливає співвідношення

$$|\varphi_i(\tau; x_2, t) - \varphi_i(\tau; x_1, t)| \leqslant |x_2 - x_1|,$$

тому в нерівностях, які визначають достатні умови локальної розв'язності нашої задачі, можна прийняти $e^{\lambda_0 \varepsilon_0} = 1$.

Отож, умови існування узагальненого локального розв'язку задачі (1) – (5) визначаються обмеженнями (12), (13), (15), (16),(18) та співвідношенням

$$\big(f_0 p \varepsilon_0 + r\big) \leqslant p, \quad p \geqslant 1.$$

Побудувавши розв'язок при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1 = \varepsilon_0$, приймаємо за початкові дані значення функцій $a_k^u(t)$ та $u_i(x,t)$ при $t = \varepsilon_1$. Отримаємо задачу

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = f_i(x,t,v), \quad i = \overline{1,n}, \tag{19}$$

$$\frac{da_k^v}{dt} = h_k(t, a^v(t), \{v(a_{k'}^v(t), t)\}_{k'=1,2}), \quad k = 1,2, \tag{20}$$

$$a_k^v(0) = a_k^u(\varepsilon_1), \quad k = 1,2, \tag{21}$$

$$v_i(x,0) = u_i(x,\varepsilon_1), \quad a_1^u(\varepsilon_1) \leqslant x \leqslant a_2^u(\varepsilon_1), \; i = \overline{1,n}, \tag{22}$$

$$v_i(a_k^v(t), t) = H_k^i(t, a^v(t)), \quad i \in I'_k, \; k = 1,2, \tag{23}$$

де

$$I'_1 = \Big\{i : \; \lambda_i(a_1^u(\varepsilon_1), \varepsilon_1) > h_1\big(\varepsilon_1, a^u(\varepsilon_1), \{u(a_{k'}^u(\varepsilon_1), \varepsilon_1)\}_{k'=1,2}\big)\Big\},$$

$$I'_2 = \Big\{i : \; \lambda_i(a_2^u(\varepsilon_1), \varepsilon_1) < h_2\big(\varepsilon_1, a^u(\varepsilon_1), \{u(a_{k'}^u(\varepsilon_1), \varepsilon_1)\}_{k'=1,2}\big)\Big\}.$$

З умови (17) випливає, що $I'_1 = I_1$, $I'_2 = I_2$.

Зафіксувавши α_0, β_0 такими самими, як і при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1$, одержимо умови на ε_2 для існування локального розв'язку задачі (19) – (23) при $\varepsilon_1 \leqslant t \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$$\Big[F + \max\{1, H, \Lambda\}\big(H_0 + p_1\big)\Big]\varepsilon_2 \leqslant \beta_0,$$
$$(H + \Lambda)\varepsilon_2 \leqslant \frac{\gamma}{2\lambda_0},$$
$$\big(f_0 p_2 \varepsilon_2 + p_1\big) \leqslant p_2, \quad p_2 \geqslant 1,$$
$$\Big[f_0(1 + p_2 + \varepsilon_2 h_0 p_2) + \big(F + H_0 \max\{1, H\}\big)\frac{2}{\gamma}\, h_0 + H_0 h_0 + p_2 h_0\Big]\varepsilon_2 < 1,$$
$$(H + \Lambda)\varepsilon_2 \leqslant \frac{a_2^u(\varepsilon_1) - a_1^u(\varepsilon_1)}{2},$$
$$\varepsilon_2 \leqslant \min\left\{\beta_0, \frac{\beta_0}{H + \alpha_0}\right\}.$$

Знайшовши аналогічно розв'язок при $0 \leqslant t \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i$, можемо продовжити його на $\sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i \leqslant t \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\sigma} \varepsilon_i$, значення ε_σ, p_σ у цій смузі повинні задовольняти такі нерівності:

$$\Big[F + \max\{1, H, \Lambda\}\big(H_0 + p_{\sigma-1}\big)\Big]\varepsilon_\sigma \leqslant \beta_0, \tag{24}$$
$$(H + \Lambda)\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{\gamma}{2\lambda_0}, \tag{25}$$
$$\big(f_0 p_\sigma \varepsilon_\sigma + p_{\sigma-1}\big) \leqslant p_\sigma, \quad p_\sigma \geqslant 1, \tag{26}$$

$$\Big[f_0(1 + p_\sigma + \varepsilon_\sigma h_0 p_\sigma) + \big(F + H_0 \max\{1, H\}\big)\frac{2}{\gamma}\, h_0 + H_0 h_0 + p_\sigma h_0\Big]\varepsilon_\sigma < 1, \tag{27}$$

$$(H + \Lambda)\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{a_2^u(\sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i) - a_1^u(\sum\limits_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i)}{2}, \tag{28}$$

$$\varepsilon_\sigma \leqslant \min\left\{\beta_0, \frac{\beta_0}{H + \alpha_0}\right\}. \tag{29}$$

Із монотонності функцій $a_k^u(t)$ маємо

$$a_2^0 - a_1^0 \leqslant a_2^u(\sum_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i) - a_1^u(\sum_{i=1}^{\sigma-1} \varepsilon_i),$$

а тому співвідношення (28) можемо замінити нерівністю

$$(H + \Lambda)\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{a_2^0 - a_1^0}{2}.$$

Для виконання співвідношень (24) – (29) достатньо вимагати

$$\Big[F+\max\{1,H,\Lambda\}H_0\Big]\varepsilon_\sigma \leqslant \beta_0/2, \quad \max\{1,H,\Lambda\}p_{\sigma-1}\varepsilon_\sigma \leqslant \beta_0/2,$$
$$(H+\Lambda)\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{\gamma}{2\lambda_0},$$
$$f_0 p_\sigma \varepsilon_\sigma \leqslant 1, \quad p_\sigma = 1+p_{\sigma-1}, \quad p_\sigma \geqslant 1, \quad p_0 = r,$$
$$\Big[f_0+h_0+\big(F+H_0\max\{1,H\}\big)\frac{2}{\gamma}\,h_0+H_0h_0\Big]\varepsilon_\sigma \leqslant 1/3,$$
$$\Big[f_0+h_0\Big]p_\sigma\varepsilon_\sigma \leqslant 1/3,$$
$$(H+\Lambda)\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{a_2^0-a_1^0}{2}, \quad \varepsilon_\sigma \leqslant \beta_0, \quad \varepsilon_\sigma \leqslant \frac{\beta_0}{H+\alpha_0}.$$

Отож, обмеження на ε_σ можна записати у вигляді

$$\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{\beta_0}{2\Big[F+\max\{1,H,\Lambda\}H_0\Big]}, \quad \varepsilon_\sigma \leqslant \frac{\beta_0}{2\max\{1,H,\Lambda\}p_{\sigma-1}},$$
$$\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{\gamma}{2\lambda_0(H+\Lambda)}, \quad \varepsilon_\sigma \leqslant \frac{1}{f_0p_\sigma},$$
$$\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{1}{3\Big[f_0+h_0+\big(F+H_0\max\{1,H\}\big)\frac{2}{\gamma}\,h_0+H_0h_0\Big]},$$
$$\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{1}{3\Big[f_0+h_0\Big]p_\sigma},$$
$$\varepsilon_\sigma \leqslant \frac{a_2^0-a_1^0}{2(H+\Lambda)}, \quad \varepsilon_\sigma \leqslant \beta_0, \quad \varepsilon_\sigma \leqslant \frac{\beta_0}{H+\alpha_0}.$$

При цьому $p_\sigma = 1+p_{\sigma-1}$, $p_\sigma \geqslant 1$.

Застосовуючи послідовно рекурентні співвідношення для p_σ, отримаємо $p_\sigma = \sigma + r$.

Позначимо

$$\delta = \min\Bigg\{\frac{\beta_0}{2\Big[F+\max\{1,H,\Lambda\}H_0\Big]}, \frac{\beta_0}{2\max\{1,H,\Lambda\}}, \frac{\gamma}{2\lambda_0(H+\Lambda)}, \frac{1}{f_0},$$
$$\frac{1}{3\Big[f_0+h_0+\big(F+H_0\max\{1,H\}\big)\frac{2}{\gamma}\,h_0+H_0h_0\Big]}, \frac{1}{3\Big[f_0+h_0\Big]}, \frac{a_2^0-a_1^0}{2(H+\Lambda)}, \beta_0, \frac{\beta_0}{H+\alpha_0}\Bigg\}.$$

Тоді, враховуючи нерівності $p_\sigma \geqslant 1$, $p_\sigma > p_{\sigma-1}$, $\sigma = 1, 2, \ldots$, де $p_0 = r$, одержимо, що $\varepsilon_\sigma = \dfrac{\delta}{p_\sigma}$ задовольнятиме всі співвідношення (24) – (29).

Оскільки

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty}\varepsilon_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{\delta}{p_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{\delta}{\sigma+r} = \infty,$$

а величина T – скінченна, то за скінченну кількість кроків ми дійдемо до $t = T$. Це свідчить тро те, що існування узагальненого розв'язку задачі (1) – (5) в умовах теореми 2 можна гарантувати для довільного проміжку часу T.

Припустимо, що цей розв'язок не єдиний. Перенесемо початок відліку часу в точку $\bar{t}$, що є нижньою межею тієї множини точок t, для яких порушувалась би єдиність. При заданих α_0, β_0 згідно з теоремою 1 знаходимо $\bar{p}$, $\bar{\varepsilon}$ такі, що при $\bar{t} \leqslant t \leqslant \bar{t} + \bar{\varepsilon}$ існує і єдиний розв'язок нашої задачі з простору $S_{\bar{\varepsilon}\,\alpha_0\,\beta_0\,\bar{p}}$. Вибравши $\bar{p}$ досить великим і зменшивши, якщо треба, $\bar{\varepsilon}$, забезпечимо при $\bar{t} \leqslant t \leqslant \bar{t} + \bar{\varepsilon}$ належність наших двох розв'язків до простору $S_{\bar{\varepsilon}\,\alpha_0\,\beta_0\,\bar{p}}$. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

---

1. *Данилюк И. И.* О задачах со свободной (неизвестной) границей. – В кн.: Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей: Сб. науч. тр. К., 1983. – С. 3-5.
2. *Филимонов А. М.* Достаточные условия глобальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными// Рукопись деп. у ВИНИТИ щ6-81 ДЕП, 1982, 18с.
3. *Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой// Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – N 3. – С. 497-503.

GLOBAL SOLVABILITY OF SEMILINEAR HYPERBOLIC STEPHAN PROBLEM ON THE LINE

Ruslan ANDRUSYAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

In the work the author has proved the theorem of global solvability along t of the problem with unknown boundaries for the semilinear hyperbolic system of the first order equations with two independent variables. Besides smoothness requirements also conditions of monotonicity and conditions restricting the increase of both right-hand sides of the system and area boundaries are imposed on the initial data of the problem .

Key words: hyperbolic system, problem with unknown boundaries.

Стаття надійшла до редколегії 11.02.2004
Прийнята до друку 03.11.2004