ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.18–31 *Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.18–31*

УДК 517.956

ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА З НЕВІДОМОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ ЗАЛЕЖНОЮ ВІД ЧАСУ

Галина БЕРЕГОВА
Львівський банківський інститут НБУ,
вул. Січових Стрільців, 11 79000 Львів, Україна

Розглянуто задачу Стефана для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з невідомою правою частиною залежною від часу та невідомими границями області. Задано інтегральні граничні умови фредгольмівського типу та інтегральні умови перевизначення. За допомогою методу характеристик доведено теорему існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі для малих t.

Ключові слова: обернена гіперболічна задача Стефана, метод характеристик, інтегральні умови.

Задачі про визначення коефіцієнтів гіперболічних рівнянь і систем за деякою додатковою інформацією про їх розв'язок мають важливе практичне значення і виникають у проблемах квантової теорії поля, атомної фізики, теорії коливань, сейсміки [1-3]. Задачі з невідомими границями для гіперболічних рівнянь (гіперболічні задачі Стефана) є математичними моделями проблем газової динаміки, аеропружності, теплопровідності (коли швидкість поширення тепла скінченна) і вивчають недавно [4-7]. Один із фізичних процесів, математична модель якого зводиться до дослідження оберненої гіперболічної задачі Стефана, наведено в [8].

У цій праці розглянуто задачу про знаходження розв'язку оберненої задачі для напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку в криволінійному чотирикутнику з невідомим коефіцієнтом у правій частині, інтегральними граничними умовами фредгольмівського типу, границі області також апріорі невідомі. Умови перевизначення задано в інтегральній формі. Подібну задачу для системи рівнянь першого порядку у криволінійному секторі з крайовими умовами першого роду розглянуто в [9]; для лінійного рівняння другого порядку з крайовими умовами другого роду досліджено в [10].

За допомогою методу характеристик, використовуючи методику праць [11, 12], задачу зведено до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра другого роду. Дослідження задачі проведено за допомогою принципу стисних відображень.

1. Формулювання задачі. Нехай $a_1(t)$ і $a_2(t)$ деякі наперед невідомі криві на $[0,T]$ такі, що $a_1(t) < a_2(t)$, причому $a_1(0)$, $a_2(0)$, $a_1'(0)$, $a_2'(0)$ - відомі константи. В криволінійному чотирикутнику $G_T = \{(x,t) : t \in [0,T], a_1(t) \leqslant x \leqslant a_2(t)\}$ розглянемо гіперболічну систему рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t)F_i(x,t;u), \quad u = (u_1,\ldots,u_n), \ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

в якій, окрім функцій $u_i(x,t)$, невідомими також є і функції $f_i(t)$. Задамо умови на невідомі границі

$$a_k'(t) = h_k(t, a_k(t); u), \quad k = 1,2, \tag{2}$$

де $h_k(a_k(t),t;u) = h_k\big(a_k(t),t;u(a_k(t),t)\big)$ - відомі функціонали типу Вольтерра (тобто

$$h_k(a_k(t),t;u) = \sum_{l=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t \alpha_{ki}^l(a_l(\tau),\tau)u_i(a_l(\tau),\tau)d\tau + \Theta_k(a_k(t),t),$$

де $\alpha_{ki}^l(a_l(\tau),\tau) \in C([0,T])$, $\Theta_k(a_k(t),t) \in C(\overline{G_T})$ і задовольняють умову Ліпшиця за першою змінною).

Нехай виконуються умови

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(a_1^0,0) - h_1(a_1(0),0;g) > 0, \qquad && i = \overline{1,q};\\
&\lambda_i(a_1^0,0) - h_1(a_1(0),0;g) < 0, && i = \overline{q+1,n};\\
&\lambda_i(a_2^0,0) - h_2(a_2(0),0;g) > 0, && i = \overline{1,p};\\
&\lambda_i(a_2^0,0) - h_2(a_2(0),0;g) < 0, && i = \overline{p+1,n}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Якщо функції $\lambda_i(x,t)(i = \overline{1,n})$ неперервні в околі точок $(a_1(0),0)$ та $(a_2(0),0)$, а функції $a_i(t)$ неперервно диференційовані в околі 0, то з умов (3) стає відомо про взаємне розташування характеристик системи та кривих $a_i(t)$ у деякому як завгодно малому околі точок $(a_1(0),0)$ та $(a_2(0),0)$. Позначимо

$$\begin{aligned}
&I_1^+ = \{1,...,q\}, \quad I_2^+ = \{1,...,p\},\\
&I_1^- = \{q+1,...,n\}, \quad I_2^+ = \{p+1,...,n\},\\
&N = \operatorname{card}(I_1^+ \cup I_2^-) = q+n-p-1.
\end{aligned}$$

Розглянемо таку задачу: для деякого $T > 0$ знайти набір функцій $(u_1,...,u_n, f_1,...,f_n,a_1,a_2) \in \left(\left[C(\overline{G}_T)\right]^n \times \left[C[0,T]\right]^{n+2}\right)$, які задовольняють систему (1), умову Стефана (2), початкові умови

$$u_i(x,0) = g_i(x), \qquad i = \overline{1,n}; \tag{4}$$

крайові умови

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{li}(x,t)u_i(x,t)\,dx = H_l(t), \qquad l = \overline{1,N}; \tag{5}$$

та умови перевизначення

$$\int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} \gamma_i(x,t)u_i(x,t)\,dx = \beta_i(t), \quad i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

причому сукупність векторів $\vec{C}_l = \{C_{l1}(x,t), C_{l2}(x,t), ..., C_{ln}(x,t),\}$, $\vec{\Gamma}_k = \{0, ..., \gamma_k(x,t), ...0\}$, $l=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,n}$ є лінійно незалежною.

2. Достатні умови розв'язності задачі (1), (2), (4)-(6).

Введемо матрицю $A(t) = \{a_{li}\}_{l,i=1}^{N}$, елементи якої мають вигляд

$$a_{li} = (-1)^k C_{li}(a_k(t),t)(a_k^{'}(t) - \lambda_i(a_k(t),t)),$$

де $k=1$ при $i \in I_1^+ (i=\overline{1,q})$; $k=2$ при $i \in I_2^- (i=\overline{p+1,n})$.

Надалі будемо вимагати, щоб

$$det A(0) \neq 0; \tag{7}$$

$$\int\limits_{a_1(0)}^{a_2(0)} \gamma_i(y,0)F_i(y,0;g)\,dy \neq 0. \tag{8}$$

Крім того, припустимо, що виконуються умови:

1) $\lambda_i(x,t) \in C^1(\overline{G}_T)$;
2) $h_k(a_k(t),t;u)$ – неперервні й обмежені в області визначення сталими M_{h_k}, задовольняють умову Ліпшиця за першою та третьою змінними зі сталими L_{h_k} та виконується умова $h_1(a_1(0),0;g) \neq h_2(a_2(0),0;g)\big(g=(g_1,...,g_n)\big)$;
3) $g_i(x) \in C([a_1(0),a_2(0)])$, $(i=\overline{1,n})$ та диференційовані на $[a_1(0),a_2(0)]$;
4) $C_{li}(x,t) \in C^1(\overline{G}_T)$, $H_l(t) \in C^1([0,T]), l=\overline{1,N}, i=\overline{1,n}$;
5) $\gamma_i(x,t) \in C^1(\overline{G}_T)$, $\beta_i(t) \in C^1([0,T]), i=\overline{1,n}$;
6) $F_i(y,t;u) \in C(\overline{G}_T \times \mathbb{R}^n)$ і задовольняють умову Ліпшиця за u зі сталими $F_{u_i} (i=\overline{1,n})$;
7) виконуються умови узгодження нульового та першого порядку

$$\int\limits_{a_1(0)}^{a_2(0)} \gamma_i(x,0)g_i(x)\,dx = \beta_i(0), \quad i=\overline{1,n};$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_1(0)}^{a_2(0)} C_{li}(x,0)g_i(x)\,dx = H_l(0), \quad l=\overline{1,N};$$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^k C_{li}(a_k(0),0)g_i(a_k(0))h_k(a_k(0),0;g(a_k(0)))+ \tag{9}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_1(0)}^{a_2(0)}\Big(g_i(x)C_{li}{}'_t(x,0)-\lambda_i(x,0)C_{li}(x,0)g_i'(x)\Big)dx+\sum_{i=1}^{n}\frac{\int\limits_{a_1(0)}^{a_2(0)}C_{li}(x,0)F_i(x,0;g)dx}{\int\limits_{a_1(0)}^{a_2(0)}\gamma_i(x,0)F_i(x,0;g)dx}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\gamma_i(a_k(0),0)g_i(a_k(0))h_k(a_k(0),0;g(a_k(0)))+\right.$$

$$\left.+\beta_i'(0)+\int\limits_{a_1(0)}^{a_2(0)}\left[\gamma_i(x,0)g_i'(x)\lambda_i(x,0)-\gamma_{it}'(x,0)g_i(x)\right]dx\right)=H_l'(0),\quad l=\overline{1,N}.$$

Введемо також допоміжні функції

$$\begin{aligned}&u_i(a_1(t),t)=\mu_i(t),\quad i\in I_1^+;\\&u_i(a_2(t),t)=\nu_i(t),\quad i\in I_2^-.\end{aligned}\tag{10}$$

3. Локальна розв'язність задачі. Перед означенням узагальненого розв'язку задачі (1), (2), (4)-(6) попередньо перетворимо систему (1) за допомогою методу характеристик [11] в припущенні, що умови (3), які задають поведінку характеристик системи, виконуються для будь-яких $t\in[0,T_1]$.

Нехай $\xi=\varphi_i(\tau;x,t)$ розв'язок задачі Коші $d\xi/d\tau=\lambda_i(\xi,\tau),\xi\,|_{\tau=t}=x,(i=\overline{1,n})$. Через $L_i(x,t)$ позначимо відповідну характеристику, що проходить через точку (x,t) і продовжена в сторону спадання t до перетину з межею G_{T_1}. Нехай $t_i(x,t)$ – найменша ордината точки перетину такої характеристики. Очевидно, що $0\leqslant t_i(x,t)\leqslant t$. Виберемо T_1 таким, щоб характеристики, випущені з кутових точок $(a_k(0),0)$, в області G_{T_1} не перетинались. Кожна характеристика розбиває G_{T_1} на три підобласті $G_{T_1}=\bigcup\limits_{k=0}^{2}G_i^k$ так:

$$\begin{aligned}&G_i^0=\{(x,t):\ \ t_i(x,t)=0\};\\&G_i^k=\{(x,t):\ \ \varphi_i\big(t_i(x,t);x,t\big)=a_k\big(t_i(x,t)\big)\},\ k=1,2.\end{aligned}$$

Очевидно, що при $i\in I_1^+\backslash I_2^-\ -\ G_i^2=\emptyset;\ \ i\in I_2^-\backslash I_1^+\ -\ G_i^1=\emptyset$.

Інтегруючи систему (1) вздовж характеристик і враховуючи (4), (10), отримаємо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$u_i(x,t)=\omega_i(x,t)+\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau,\quad i=\overline{1,n},\tag{11}$$

де

$$\omega_i(x,t)=\begin{cases}g_i(\varphi_i(0;x,t)), & \text{при}\quad (x,t)\in G_i^0;\\ \mu_i(t_i(x,t)), & \text{при}\quad (x,t)\in G_i^1;\\ \nu_i(t_i(x,t)), & \text{при}\quad (x,t)\in G_i^2.\end{cases}$$

Для того щоб функції $u_i(x,t)$ при переході з G_i^0 в G_i^1 і G_i^2 були неперервні, необхідно, щоб для кожного $i = \overline{1,n}$, $k = 1,2$ виконувались умови

$$\lim_{\substack{(x,t)\in G_i^k\\(x,t)\to(a_k(0),0)}} u_i(x,t) = \lim_{\substack{(x,t)\in G_i^0\\(x,t)\to(a_k(0),0)}} u_i(x,t),$$

тобто

$$\mu_i(0) = g_i(a_1(0)), \quad i \in I_1^+,$$
$$\nu_i(0) = g_i(a_2(0)), \quad i \in I_2^-,$$

що забезпечується умовами (9).

Означення. Розв'язком задачі (1), (2), (4)-(6) назвемо набір функцій $u_i \in C(\overline{G}_T)$, $f_i \in C([0,T])(i = \overline{1,n})$ $a_k \in C^1([0,T])$ $(k = 1,2)$, які задовольняють систему (11) та умови (2), (5)-(6) для всіх $t \in [0,T]$.

Теорема. *Якщо виконуються припущення пункту 2, то для деякого $T > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (1)-(6).*

Доведення. У просторі вектор-функцій $a(t) = (a_1(t), a_2(t)) \in C^1\left[[0,T_1]\right]^2, T_1 \in \mathbb{R}_+$ виберемо множину

$$D_{T_1} = \left\{a(t) : a(t) \in \left[C^1[0,T_1]\right]^2, \ \ |a_k(t) - a_k(0)| \leqslant T_1 M_{h_k}, \ \ k = 1,2\right\},$$

з метрикою

$$\rho\big(a^1(t), a^2(t)\big) = \sum_{k=1}^{2} \max_{t\in[0,T_1]} |a_k^1(t) - a_k^2(t)|.$$

Враховуючи (3) та те, що шукані $u_i(x,t)(i = \overline{1,n})$, $a_k(t)(k = 1,2)$ повинні бути неперервними функціями і $\lambda_i(x,t)$, $h_k(t, a_k(t); u)$ є неперервними за умовами теореми, існує $0 < T_2 \leqslant T_1$ таке, що для всіх $t \in [0,T_2]$ виконуються такі нерівності:

$$\lambda_i(a_k(t),t) - h_k(a_k(t),t;u) > 0, \quad k = 1,2, \ \ i \in I_k^+;$$
$$\lambda_i(a_k(t),t) - h_k(a_k(t),t;u) < 0, \quad k = 1,2, \ \ i \in I_k^-.$$

Для кожної фіксованої вектор-функції $a(t) \in D_{T_1}$ отримуємо задачу (1), (4)-(6) з невідомими $(u_1, \ldots, u_n, f_1, \ldots, f_n)$.

Оскільки виконуються припущення теореми, то задача (1), (4)-(6) за допомогою методу характеристик зводиться до розв'язування системи інтегро-функціональних рівнянь (11) з умовами (5)-(6).

Оскільки в системі (11) є функції $\mu_i(t), \nu_i(t)$, то перетворимо граничні умови (5) так, щоб отримати рівняння для знаходження цих функцій. Для цього підставимо $u_i(x,t)$ з (11) в (5) і врахуємо розміщення характеристик

$$\sum_{i\in I_1^+\setminus I_2^-} \left[\int\limits_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_1(0),0)} C_{li}(x,t) \left(\mu_i\big(t_i(x,t)\big) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\tau) F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big) d\tau \right) dx + \right.$$

$$
+\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{a_2(t)} C_{li}(x,t)\left(g_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)+\int\limits_0^t f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau\right)dx\Bigg]+
$$

$$
+\sum_{i\in I_1^+\cap I_2^-}\left[\int\limits_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_1(0),0)} C_{li}(x,t)\left(\mu_i\big(t_i(x,t)\big)+\int\limits_{t_i(x,t)}^t f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau\right)dx+\right.
$$

$$
+\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} C_{li}(x,t)\left(g_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)+\int\limits_0^t f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau\right)dx+ \qquad (12)
$$

$$
+\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{a_2(t)} C_{li}(x,t)\left(\nu_i\big(t_i(x,t)\big)+\int\limits_{t_i(x,t)}^t f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau\right)dx\Bigg]+
$$

$$
+\sum_{i\in I_2^-\setminus I_1^+}\left[\int\limits_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} C_{li}(x,t)\left(g_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)+\int\limits_0^t f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau\right)dx+\right.
$$

$$
\left.+\int\limits_{\varphi_i(t;a_2(0),0)}^{a_2(t)} C_{li}(x,t)\left(\nu_i\big(t_i(x,t)\big)+\int\limits_{t_i(x,t)}^t f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)d\tau\right)dx\right]=H_l(t),
$$

$$
l=\overline{1,N}.
$$

В останній рівності проведемо такі перетворення [12]: в однократних інтегралах зробимо заміну змінних $\tau=t_i(x,t)\Rightarrow x=\rho_i^k(\tau,t)$ $(k=1,\ i\in I_1^+;\ \ k=2,\ i\in I_2^-)$, а в двовимірних інтегралах змінимо порядок інтегрування та зробимо заміну змінних $\varphi_i(\tau;x,t)=y$. Причому функції $\varphi_i(\tau;x,t)$ такі, що $x=\varphi_i(t;y,\tau)$. Тоді (12) перепишемо у вигляді

$$
-\sum_{i\in I_1^+}\int\limits_0^t C_{li}\big(\rho_i^1(\tau,t),t\big)\mu_i(\tau)\frac{\partial\rho_i^1(\tau,t)}{\partial\tau}d\tau+\sum_{i\in I_2^-}\int\limits_0^t C_{li}\big(\rho_i^2(\tau,t),t\big)\nu_i(\tau)\frac{\partial\rho_i^2(\tau,t)}{\partial\tau}d\tau+
$$

$$
+\sum_{i\in I_1^+\setminus I_2^-}\int\limits_0^t\int\limits_{a_1(\tau)}^{\varphi_i(\tau;a_2(t),t)} C_{li}\big(\varphi_i(t;y,\tau),t\big)f_i(\tau)F_i(y,\tau;u)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dy\,d\tau+
$$

$$
+\sum_{i\in I_1^+\cap I_2^-}\int\limits_0^t\int\limits_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} C_{li}\big(\varphi_i(t;y,\tau),t\big)f_i(\tau)F_i(y,\tau;u)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dy\,d\tau+ \qquad (13)
$$

$$
+\sum_{i\in I_2^-\setminus I_1^+}\int\limits_0^t\int\limits_{\varphi_i(\tau;a_1(t),t)}^{a_2(\tau)} C_{li}\big(\varphi_i(t;y,\tau),t\big)f_i(\tau)F_i(y,\tau;u)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dy\,d\tau=H_l(t)-
$$

$$-\sum_{i\in I_1^+\setminus I_2^-}\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{a_2(t)} C_{li}(x,t)g_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)\,dx-\sum_{i\in I_1^+\cap I_2^-}\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} C_{li}(x,t)g_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)\,dx-$$

$$-\sum_{i\in I_2^-\setminus I_1^+}\int\limits_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} C_{li}(x,t)g_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)\,dx,\qquad l=\overline{1,N}.$$

Підставимо в (13) значення похідних

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial x}=\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t}\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\eta;x,t),\eta\big)\,d\eta\right);$$

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau;x,t)}{\partial t}=-\lambda_i(x,t)\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t}\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\eta;x,t),\eta\big)d\eta\right);$$

$$\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial x}=\frac{\exp\left(-\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\eta;x,t),\eta\big)\,d\eta\right)}{h_k\big(a_k(t_i(x,t)),t_i(x,t);u\big)-\lambda_i\big(a_k(t_i(x,t)),t_i(x,t)\big)};$$

$$\frac{\partial t_i(x,t)}{\partial t}=\frac{-\lambda_i(x,t)\exp\left(-\int\limits_{t_i(x,t)}^{t}\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\eta;x,t),\eta\big)d\eta\right)}{h_k\big(a_k(t_i(x,t)),t_i(x,t);u\big)-\lambda_i\big(a_k(t_i(x,t)),t_i(x,t)\big)};$$

$$\frac{\partial\rho_i^k(\tau,t)}{\partial\tau}=\frac{h_k\big(a_k(\tau),\tau;u\big)-\lambda_i\big(a_k(\tau),\tau\big)}{\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t}\lambda'_{ix}\big(\varphi_i(\eta;\rho_i^k(\tau,t),t),\eta\big)\,d\eta\right)};\quad \frac{\partial\rho_i^k(\tau,t)}{\partial t}=-\lambda_i\big(\rho_i^k(\tau,t),t\big);$$

$$k=1\ \text{ при }\ (x,t)\in G_i^1\ \big(i\in I_1^+\big);\qquad\qquad k=2\ \text{ при }\ (x,t)\in G_i^2\ \big(i\in I_2^-\big)$$

і продиференціюємо за змінною t. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}&-\sum_{i\in I_1^+}C_{li}(a_1(t),t)\big(h_1(a_1(t),t;u)-\lambda_i(a_1(t),t)\big)\mu_i(t)+\\&+\sum_{i\in I_2^-}C_{li}(a_2(t),t)\big(h_2(a_2(t),t;u)-\lambda_i(a_2(t),t)\big)\nu_i(t)=\end{aligned}\tag{.4}$$

$$=\sum_{i\in I_1^+}\int\limits_0^t R_{li}^1(\tau,t)\mu_i(\tau)\,d\tau-\sum_{i\in I_2^-}\int\limits_0^t R_{li}^2(\tau,t)\nu_i(\tau)\,d\tau+H_l'(t)+G_l(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\sum_{i\in N_k}\int\limits_0^t f_i(\tau)C_{li}\big(a_{3-k}(t),t\big)F_i\big(\varphi_i(\tau;a_{3-k}(t),t),\tau;u\big)\,d\tau\times$$

$$\times\big(h_{3-k}(a_{3-k}(t),t;u)-\lambda_i(a_{3-k}(t),t)\big)-\sum_{i=1}^{n}f_i(t)\int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)}C_{li}(y,t)F_i(y,t;u)dy-$$

$$-\sum_{k=1}^{3}\sum_{i\in N_k}\int\limits_0^t f_i(\tau)\int\limits_{\chi_i^k(\tau,t)}^{\psi_i^k(\tau,t)}\Phi_{li}(y,\tau,t;u)dy\,d\tau,$$

де

$$R_{li}^k(\tau,t)=\Big[C_{li}\big(\rho_i^k(\tau,t),t\big)\lambda_{i_x}'\big(\rho_i^k(\tau,t),t\big)-C_{li_x}'\big(\rho_i^k(\tau,t),t\big)\lambda_i\big(\rho_i^k(\tau,t),t\big)+$$
$$+C_{li_t}'\big(\rho_i^k(\tau,t),t\big)\Big]\times\big(h_k\big(a_k(\tau),\tau;u\big)-\lambda_i(a_k(\tau),\tau)\big)\times$$
$$\times\exp\left(\int\limits_\tau^t\lambda_{ix}'\big(\varphi_i\big(\eta;\rho_i^k(\tau,t),t\big),\eta\big)d\eta\right),\ k=1,2;$$

$$\Phi_{li}(y,\tau,t;u)=\Big[C_{li_x}'\big(\varphi_i(t;y,\tau),t\big)\lambda_i(y,\tau)+C_{li_t}'\big(\varphi_i(t;y,\tau),t\big)+C_{li}\big(\varphi_i(t;y,\tau),t\big)\times$$
$$\times\ \lambda_{i_x}'\big(\varphi_i(t;y,\tau),t\big)\Big]\times F_i(y,\tau;u)\exp\left(-\int\limits_t^\tau\lambda_{i_x}'\big(\varphi_i(\eta;y,\tau),\eta\big)\,d\eta\right);$$

$$G_l(t)=\sum_{i\in I_1^+}C_{li}\big(\varphi_i(t;a_1(0),0),t\big)g_i(a_1(0))\lambda_i(a_1(0),0)-$$
$$-\sum_{i\in I_2^-}C_{li}\big(\varphi_i(t;a_2(0),0),t\big)g_i(a_2(0))\lambda_i(a_2(0),0)+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\sum_{i\in N_k}C_{li}\big(a_{3-k}(t),t\big)g_i\big(\varphi_i(0;a_{3-k}(t),t)\big)h_{3-k}(a_{3-k}(t),t;u)-$$
$$-\sum_{k=1}^{3}\sum_{i\in N_k}\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(l_i),l_i)}^{\varphi_i(t;a_2(n_i),n_i)}Q_{li}(x,t)\,dx,\qquad l=\overline{1,N};$$

$$Q_{li}(x,t)=C_{li_t}'(x,t)g_i\big(\varphi_i(0;x,t)\big)-C_{li}(x,t)g_i'\big(\varphi_i(0;x,t)\big)\lambda_i(x,t)\times$$
$$\times\exp\left(-\int\limits_0^t\lambda_{i_x}'\big(\varphi_i(\eta;x,t),\eta\big)\,d\eta\right);$$

$N_1=I_1^+\backslash I_2^-$, $\quad N_2=I_2^-\backslash I_1^+$, $\quad N_3=I_1^+\cap I_2^-$; при $i\in I_1^+\backslash I_2^-$ – $l_i=0,\ n_i=t$; при $i\in I_1^+\cap I_2^-$ – $l_i=n_i=0$; при $i\in I_2^-\backslash I_1^+$ – $l_i=t,\ n_i=0$;

$$\chi_i^k(\tau,t)=\begin{cases}a_1(\tau), & \text{при } k=1,3;\\ \varphi_i(\tau;a_1(t),t), & \text{при } k=2;\end{cases}\qquad \psi_i^k(\tau,t)=\begin{cases}\varphi_i(\tau;a_2(t),t), & \text{при } k=1;\\ a_2(\tau), & \text{при } k=2,3.\end{cases}$$

Отже, (14) – система інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду стосовно функцій $\mu_i(t)(i\in I_1^+)$, $\nu_i(t)(i\in I_2^-)$ з неперервними ядрами $R_{li}^k(\tau,t)$.

Щоб отримати замкнену систему інтегральних рівнянь стосовно невідомих $u_i(x,t)$, $\mu_i(t), \nu_i(t)$, $f_i(t)$ перетворимо умови перевизначення (6). Для цього спочатку підставимо в (6) значення функцій $u_i(x,t)$ з (11)
1) для $i \in I_1^+ \backslash I_2^-$

$$\int\limits_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_1(0),0)} \gamma_i(x,t)\left(\mu_i(t_i(x,t)) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)\,d\tau\right)dx +$$
$$+\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{a_2(t)} \gamma_i(x,t)\left(g_i(\varphi_i(0;x,t)) + \int\limits_{0}^{t} f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)\,d\tau\right)dx = \beta_i(t);$$

2) для $i \in I_1^+ \cap I_2^-$

$$\int\limits_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_1(0),0)} \gamma_i(x,t)\left(\mu_i(t_i(x,t)) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)\,d\tau\right)dx +$$
$$+\int\limits_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} \gamma_i(x,t)\left(g_i(\varphi_i(0;x,t)) + \int\limits_{0}^{t} f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)\,d\tau\right)dx + \qquad (15)$$
$$+\int\limits_{\varphi_i(t;a_2(0),0)}^{a_2(t)} \gamma_i(x,t)\left(\nu_i(t_i(x,t)) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)\,d\tau\right)dx = \beta_i(t);$$

3) для $i \in I_2^- \backslash I_1^+$

$$\int\limits_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} \gamma_i(x,t)\left(g_i(\varphi_i(0;x,t)) + \int\limits_{0}^{t} f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)\,d\tau\right)dx +$$
$$+\int\limits_{\varphi_i(t;a_2(0),0)}^{a_2(t)} \gamma_i(x,t)\left(\nu_i(t_i(x,t)) + \int\limits_{t_i(x,t)}^{t} f_i(\tau)F_i\big(\varphi_i(\tau;x,t),\tau;u\big)\,d\tau\right)dx = \beta_i(t).$$

Проведемо перетворення аналогічні до тих, що проводили в (12). Тобто, поміняємо порядок інтегрування і зробимо заміну змінних в однократних інтегралах. В результаті отримаємо

1) $i \in I_1^+ \backslash I_2^-$

$$\int_0^t f_i(\tau) \int_{a_1(\tau)}^{\varphi_i(\tau;a_2(t),t)} \gamma_i(\varphi_i(t;y,\tau),t)F_i(y,\tau;u)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dy\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \gamma_i(\rho_i^1(\tau,t),t)\mu_i(\tau)\frac{\partial\rho_i^1(\tau,t)}{\partial\tau}\,d\tau - \int_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{a_2(t)} \gamma_i(x,t)g_i(\varphi_i(0;x,t))\,dx + \beta_i(t);$$

2) $i \in I_1^+ \cap I_2^-$

$$\int_0^t f_i(\tau)\int_{a_1(\tau)}^{a_2(\tau)} \gamma_i(\varphi_i(t;y,\tau),t)F_i(y,\tau;u)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dyd\tau = \int_0^t \gamma_i(\rho_i^1(\tau,t),t)\mu_i(\tau)\frac{\partial\rho_i^1(\tau,t)}{\partial\tau}d\tau -$$

$$- \int_0^t \gamma_i(\rho_i^2(\tau,t),t)\nu_i(\tau)\frac{\partial\rho_i^2(\tau,t)}{\partial\tau}\,d\tau - \int_{\varphi_i(t;a_1(0),0)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} \gamma_i(x,t)g_i(\varphi_i(0;x,t))\,dx + \beta_i(t);$$

3) $i \in I_2^- \backslash I_1^+$

$$\int_0^t f_i(\tau) \int_{\varphi_i(\tau;a_1(t),t)}^{a_2(\tau)} \gamma_i(\varphi_i(t;y,\tau),t)F_i(y,\tau;u)\frac{\partial\varphi_i(t;y,\tau)}{\partial y}\,dy\,d\tau = \tag{16}$$

$$= - \int_0^t \gamma_i(\rho_i^2(\tau,t),t)\nu_i(\tau)\frac{\partial\rho_i^2(\tau,t)}{\partial\tau}\,d\tau - \int_{a_1(t)}^{\varphi_i(t;a_2(0),0)} \gamma_i(x,t)g_i(\varphi_i(0;x,t))\,dx + \beta_i(t).$$

Система рівнянь (16) є системою інтегральних рівнянь типу Вольтерра першого роду. Щоб отримати рівняння Вольтерра другого роду продиференціюємо (16) за змінною t

$$f_i(t) = \Big(\int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \gamma_i(y,t)F_i(y,t;u)\,dy\Big)^{-1} \times \Bigg[- \int_0^t f_i(\tau)\Big\{ \int_{\chi_i^k(\tau,t)}^{\psi_i^k(\tau,t)} F_i(y,\tau;u)\Psi_i(\tau,t,y)\,dy +$$

$$+A_i(\tau,t;u)\Big\}\,d\tau + \sum_{l=1}^{2} k_l(i)\Big(\int_0^t \sigma_i^l(\tau)\Gamma_{il}(\tau,t)\,d\tau + \big(h_l(a_l(t),t;u) - \lambda_i(a_l(t),t)\big)\times \tag{17}$$

$$\times\gamma_i(a_l(t),t)\sigma_i^l(t)\Big) + \sum_{l=1}^{2} r_l(i)h_{3-l}(a_{3-l}(t),t;u)\gamma_i(a_{3-l}(t),t)g_i\big(\varphi_i(0;a_{3-l}(t),t)\big) + B_i(t)\Bigg],$$

де $\sigma_i^1(t) = \mu_i(t), \quad \sigma_i^2(t) = \nu_i(t);$

$$k_1(i) = \begin{cases} 1, & i \in I_1^+; \\ 0, & i \in I_2^- \backslash I_1^+; \end{cases} \quad k_2(i) = \begin{cases} 0, & i \in I_1^+ \backslash I_2^-; \\ -1, & i \in I_2^-; \end{cases}$$

$$r_1(i) = \begin{cases} -1, & i \in I_1^+ \backslash I_2^-; \\ 0, & i \in I_2^-; \end{cases} \quad r_2(i) = \begin{cases} 0, & i \in I_1^+; \\ 1, & i \in I_2^- \backslash I_1^+; \end{cases}$$

$$\Psi_i(\tau, t, y) = \gamma_{ix}'\big(\varphi_i(t; y, \tau), t\big)\lambda_i(y, \tau) + \gamma_{it}'\big(\varphi_i(t; y, \tau), t\big) + \gamma_i\big(\varphi_i(t; y, \tau), t\big)\Big\{\lambda_{ix}'(x, t) -$$

$$-\int_\tau^t \lambda_{ixx}''\big(\varphi_i(\eta; x, t), \eta\big)\lambda_i(x, t)\exp\Big(-\int_\eta^t \lambda_{ix}'\big(\varphi_i(\sigma; x, t), \sigma\big)d\sigma\Big)d\eta\Big\} \times$$

$$\times \exp\Big(\int_\tau^t \lambda_{ix}'\big(\varphi_i(\eta; y, \tau), \eta\big)d\eta\Big);$$

$$\Gamma_{ik}(\tau, t) = \big(h_k\big(a_k(\tau), \tau; u\big) - \lambda_i(a_k(\tau), \tau)\big) \times \Big[\gamma_i\big(\rho_i^k(\tau, t), t\big)\lambda_{ix}'\big(\rho_i^k(\tau, t), t\big) +$$

$$+\gamma_{it}'\big(\rho_i^k(\tau, t), t\big) - \gamma_{ix}'\big(\rho_i^k(\tau, t), t\big)\lambda_i\big(\rho_i^k(\tau, t), t\big)\Big] \exp\Big(\int_\tau^t \lambda_{ix}'\big(\varphi_i(\eta; \rho_i^k(\tau, t), \tau), \eta\big)d\eta\Big)$$

$$A_i(\tau, t; u) =$$

$$= \sum_{l=1}^2 r_l(i)\big(h_{3-l}(a_{3-l}(t), t; u) - \lambda_i(a_{3-l}(t), t)\big)\gamma_i(a_{3-l}(t), t)F_i\big(\varphi_i(\tau; a_{3-l}(t), t), \tau; u\big);$$

$$B_i(t) = \sum_{l=1}^2 (-1)^{l+1}k_l(i)\lambda_i(a_l^0, 0)\gamma_i\big(\varphi_i(t; a_l^0, 0), t\big)g_i(a_l^0) - \int_{\varphi_i(t; a_1(l_i), l_i)}^{\varphi_i(t; a_2(n_i), n_i)} \Big[\gamma_{it}(x, t)g_i(\varphi_i(0; x, t)) -$$

$$-\lambda_i(x, t)\gamma_i(x, t)g_i'(\varphi_i(0; x, t))\exp\Big(\int_0^t \lambda_{ix}'\big(\varphi_i(\eta; x, t), \eta\big)d\eta\Big)\Big]dx + \beta_i(t).$$

Отже, для визначення функцій $u_i(x,t)$, $f_i(t)(i = \overline{1,n})$, $\mu_i(t)(i \in I_1^+)$, $\nu_i(t)(i \in I_2^-)$ одержуємо систему нелінійних інтегро-функціональних рівнянь типу Вольтерра (11), (14), (17), в якій за умовами теореми функції $F_i(x,t;u)$ та $h_k(a_k(t),t;u)$ задовольняють умову Ліпшиця за змінною u. Розглянемо простір $\big[C(\overline{G}_{T_2})\big]^{2n+N}$ вектор-функцій $z = \big(u_1, ..., u_n,\ \mu_1, ..., \mu_q,\ \nu_{p+1}, ..., \nu_n,\ f_1, ..., f_n\big)$, в яких перші n-штук координат визначені та неперервні в області $\overline{G}_{T_1}$, решта – на відрізку $[0, T_2]$. Введемо також вектор Θ_0, координатами якого є доданки відповідних рівнянь системи (11), (14), (17), складені з відомих функцій. У просторі $\big[C(\overline{G}_{T_2})\big]^{2n+N}$ розглянемо оператор M, компоненти якого визначаються відповідними доданками в досліджуваній системі [1]. Тоді система (11), (14), (17) набуде вигляду

$$z = Mz + \Theta_0. \tag{18}$$

Оскільки M – вольтеррівський оператор, то враховуючи умови (7), (8), можна вибрати таке $T_3 \in (0, T_2]$, що відображення, визначене правою частиною (18), в просторі $\left[C(\overline{G}_{T_3})\right]^{2n+N}$ є стисним [3, с.43-46]. Тому за теоремою Банаха існує єдиний неперервний розв'язок системи (18).

Отже, для кожної фіксованої вектор-функції $a(t) \in D_{T_3}$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (3)-(6): $u_1(x,t), ..., u_n(x,t), f_1(t), ..., f_n(t)$. Оскільки він залежить від вибору $a(t) \in D_{T_3}$, то позначимо $u_i(x,t) = U_i(x,t;a)$, а також $f_i(t) = F_i(t;a)$. Залишається зі всієї множини допустимих вектор-функцій $a(t)$ вибрати ту, для якої виконується умова (2).

Функція $U(a_j(t), t; a)(j = 1, 2)$ в метриці рівномірного відхилення від a як елемента $\left[C[0, T_4]\right]^2$, задовольняє умову Ліпшиця $\exists L_u \geqslant 0\ \forall a^1, a^2 \in D_{T_4}$

$$\max_{t\in[0,T_4]} \left|U(a_j^1(t), t; a^1) - U(a_j^2(t), t; a^2)\right| \leqslant L_u \varrho(a^1, a^2). \tag{19}$$

Для перевірки співвідношення (19) зауважимо, що з (11) та (14) можна отримати апріорні оцінки для розв'язку через задані функції, з яких, зокрема, випливає, що для $(x,t) \in \overline{G}_{T_4}$, $a \in D_{T_4}$

$$\left|U(x,t;a)\right| \leqslant U_0, \qquad \text{де } U_0 - \text{const}.$$

Оскільки всі оператори в (18) задовольняють за $a(t)$ умову Ліпшиця, то залежність розв'язку рівнянь типу Вольтерра (18) від функціонального параметра a задовольняє умову Ліпшиця, звідки і випливає (19).

Виберемо T_4 таким, щоб виконувалась умова

$$T_4 < \frac{1}{(L_{h_1} + L_{h_2}) \max\{1, nL_u\}}. \tag{20}$$

Розглянемо на D_{T_4} оператор $S : a \to Sa$, який діє за формулою

$$(Sa_k)(t) = a_k(0) + \int_0^t h_k\big(a(\tau), \tau; U(a_k(\tau), \tau; a)\big)\, d\tau.$$

Покажемо, що оператор S переводить множину D_{T_4} в себе і є стиском. Справді,

$$\left|(Sa_k)(t) - a_k(0)\right| \leqslant \left|\int_0^t h_k\big(a(\tau), \tau; U(a_k(\tau), \tau; a)\big)\, d\tau\right| \leqslant T_4 M_{h_k}.$$

Отже, $SD_{T_4} \subset D_{T_4}$. Покажемо, що при вибраному T_4 оператор S є стиском

$$\varrho(Sa^1, Sa^2) = \sum_{k=1}^{2} \max_{0\leqslant t\leqslant T_4} \left|(Sa_k^1)(t) - (Sa_k^2)(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{2} \max_{0\leqslant t\leqslant T_4} \left|\int_0^t \Big(h_k\big(a_k^2(\tau), \tau; U(a_k^2(\tau), \tau; a^2)\big) - h_k\big(a_k^1(\tau), \tau; U(a_k^1(\tau), \tau; a^1)\big)\Big) d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant T_4 \sum_{k=1}^{2} L_{h_k} \max_t \left\{\left|a_k^1(t) - a_k^2(t)\right|; \sum_{i=1}^{n} \left|U_i\big(a_k^1(\eta), \eta; a^1\big) - U_i\big(a_k^2(\eta), \eta; a^2\big)\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varrho(a^1,a^2)T_4\big(L_{h_1}+L_{h_2}\big)\max\{1,nL_u\}.$$

Враховуючи умову (20), отримаємо

$$\varrho(Sa^1,Sa^2)\leqslant \varrho(a^1,a^2)T_3\big(L_{h_1}+L_{h_2}\big)\max\{1,nL_u\}<\varrho(a^1,a^2).$$

Отож, S – стиск і за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка оператора S, тобто існує єдина вектор-функція $a(t)\in D_{T_4}$, яка задовольняє умову (2) і яку можна знайти методом послідовних наближень. За відомою вже $a(t)$ при $t\in[0,T]$ $\quad(T=\min\{T_3,T_4\})$ вибираємо $u_i(x,t)=U_i(x,t;a)$, аналогічно визначаємо $f_i(t)=F_i(t;a)$ $(i=\overline{1,n})$. Отже, ми знайшли єдиний розв'язок задачі (1)-(6).

Теорему доведено.

---

1. *Орловский Д.Г.* К задаче определения правой части гиперболической системы // Дифференциальные уравнения – 1983. – Т. 19. – N 8. – С. 137–146.
2. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. – М., 1984.
3. Функциональные методы в задачах математической физики. // Сб. науч. трудов под ред. А.И.Прилепко. – М., 1985.
4. *Hill C.D.* A hyperbolic free boundary problem // J.Math.Anal. and Appl. – 1970. – Vol. 31. – N 1. – P. 117–129.
5. *Sinha D.R.* A note on mechanicall response in a piesoelectric transducer to an impulsive voltage input // Proc. Nat. Inst., India. – 1966. – A 31. – N 4. – P. 395–402.
6. *Sond I.* Some Developments in mathematical demography and their application to the People's Republic of China // Theor. Popul. Biol. – 1982. – Vol. 22. – N 3.
7. *D'Acunto B.* On the piston problem in gosdynamics // Mech. Res. Commun. – 1984. – Vol. 11. – N 6. – C. 401–407.
8. *Крутиков В.С.* Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами // Прикл. мех. и мат. – 1991. – Т. 55. – N 6. – С. 1058–1062.
9. *Берегова Г.І., Кирилич В.М.* Обернена гіперболічна задача Стефана в криволінійному секторі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 5–11.
10. *Берегова Г.І.* Обернена гіперболічна задача Стефана // Математичні студії. – 1998. – Т. 10. – N 1. – С. 41–53.
11. *Кирилич В.М., Мышкис А.Д.* Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – N 3. – С. 497–501.
12. *Мельник З.О.* Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем на прямой // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21. – N 2. – С. 246–253.

THE HYPERBOLIC STEFAN PROBLEM WITH AN UNKNOWN RIGHT PART DEPENDING ON TIME

Halyna Beregova

Bank Institute of Lviv,
Sichovykh Stril'tsiv Str., 11 79000 Lviv, Ukraine

The Stefan problem for a semilinear hyperbolic system of the first order with an unknown right part and unknown boundaries of a domain is considered. There are specified nonlocal integral boundary conditions and integral conditions of the overdetermination. With the help of a method of characteristic the theorem of existence and uniqueness of the generalized solution for this problem is proved for local t.

Key words: inverse hyperbolic Stefan problem, method of characteristic, integral conditions.

Стаття надійшла до редколегії 20.03.2003
Прийнята до друку 03.11.2004