ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.32–43

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.32–43

УДК 517.53

ХАРАКТЕРИСТИКА І ПЕРША ОСНОВНА ТЕОРЕМА НЕВАНЛІННИ ДЛЯ МЕРОМОРФНИХ В ПІВСМУЗІ ФУНКЦІЙ

Андрій БРИДУН
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено аналоги формули Карлемана та першої основної теореми Неванлінни для мероморфних у півсмузі функцій.

Ключові слова: мероморфна функція, перша основна теорема Неванлінни, формула Карлемана.

1^0. **Допоміжні твердження.** Основою теорії розподілу значень мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій є формули Йенсена та Пуассона-Йенсена ([1], с. 16, 17), а для мероморфних у півплощині функцій – формули Карлемана та Левіна-Цудзі ([1], с. 19, 42). Вони пов'язують поведінку мероморфної функції з розподілом її нулів і полюсів. З них безпосередньо випливає перша основна теорема теорії розподілу значень.

Ми доводимо формулу Карлемана для мероморфної в півсмузі функції, а також аналог першої основної теореми Неванлінни. Оскільки смуга конформно еквівалентна до півплощини, то можна було б спробувати вивести аналог формули Карлемана для півсмуги з відповідної формули для півплощини заміною змінної. Ми застосовуємо інший підхід, який грунтується на використанні основної теореми Коші про лишки. Цей підхід було запропоновано в [2]. Він дає змогу одержати залишковий член у простішому вигляді.

Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x + iy : x > x_0, 0 < y < \pi\}$, $\{\rho_q\}$ – послідовність нулів функції f в R, занумерованих в порядку неспадання їхніх дійсних частин, $\rho_q = \beta_q + i\gamma_q$; $\{\omega_p\}$ – послідовність полюсів функції f в R, занумерованих відповідно, $\omega_p = \xi_p + i\eta_p$. Припустимо, що f не має ні нулів, ні полюсів на ∂R.

Нехай $f(x_0) \neq 0, \infty$, і значення $\log f(x_0)$ вибране. В $R_0 = \overline{R} \setminus \bigcup_j (\{t\beta_j + i\gamma_j : t \geqslant 1\} \cup \{t\xi_j + i\gamma_j : t \geqslant 1\})$ приймемо

$$\log f(z) = \log f(x_0) + \int_{x_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta, \tag{1}$$

де інтеграл беремо по деякому шляху в R_0 з початком у точці x_0 і кінцем у точці z.

© Бридун А., 2004

Отож,

$$\arg f(z) = \operatorname{Im} \int\limits_{x_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + \arg f(x_0).$$

Лема. *Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x+ +iy : x > x_0,\, 0 < y < \pi\}$, не має ні нулів, ні полюсів на ∂R і $f(x_0) \neq 0, \infty$. Правильне таке співвідношення:*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} e^{-iy} \log f(x+iy)\, dy = \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{\rho_q \in R_t} e^{t-\rho_q}\, dt - \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{\omega_p \in R_t} e^{t-\omega_p}\, dt +$$
$$+ \frac{i}{2\pi} e^{x} \int\limits_{x_0}^{x} e^{-t} (\log f(t) + \log f(t+i\pi)) dt + \tag{2}$$
$$+ \frac{1}{2\pi} e^{x-x_0} \int\limits_0^{\pi} e^{-iy} \log f(x_0+iy)\, dy,$$

де $R_t = \{\tau + iy : x_0 < \tau < t,\, 0 < y < \pi\}$.

Доведення. Нехай функція f голоморфна в $\overline{R}$ і не має нулів на ∂R_t. Застосуємо теорему про лишки до функції $\frac{f'(z)}{f(z)} e^{-z}$ в R_t

$$\int\limits_{\partial R_t} \frac{f'(z)}{f(z)} e^{-z}\, dz = 2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-\rho_q}. \tag{3}$$

Оскільки ∂R_t складається з чотирьох відрізків, то з (3) випливає

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-\rho_q} = \int\limits_{x_0}^{t} e^{-\tau} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\, d\tau + i \int\limits_0^{\pi} e^{-(t+iy)} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy -$$
$$- \int\limits_{x_0}^{t} e^{-(\tau+i\pi)} \frac{f'(\tau+i\pi)}{f(\tau+i\pi)}\, d\tau - i \int\limits_0^{\pi} e^{-(x_0+iy)} \frac{f'(x_0+iy)}{f(x_0+iy)}\, dy. \tag{4}$$

Інтегруючи частинами в першому, другому та четвертому інтегралах правого боку (4), маємо

$$2\pi i \sum_{\rho_q \in R_t} e^{-\rho_q} = e^{-t} \log f(t) + \int\limits_{x_0}^{t} e^{-\tau} \log f(\tau)\, d\tau +$$
$$+ i e^{-t} \int\limits_0^{\pi} e^{-iy} \frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\, dy + e^{-t} \log f(t+i\pi) + \tag{5}$$

$$+\int_{x_0}^{t} e^{-\tau}\log f(\tau+i\pi)\,d\tau - ie^{-x_0}\int_0^{\pi} e^{-iy}\log f(x_0+iy)\,dy.$$

Рівність (3), а отже, і (5) правильні при $t\in(x_0;x)$ за винятком $t\neq \mathrm{Re}\rho_q$. Домножимо (5) на e^t і проінтегруємо по t від x_0 до x. Одержимо

$$2\pi i\int_{x_0}^{x} e^t \sum_{\rho_q\in R_t} e^{-\rho_q}\,dt = e^x\int_{x_0}^{x} e^{-t}\log f(t)\,dt+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\Big(i\int_0^{\pi} e^{-iy}\frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\,dy\Big)dt + e^x\int_{x_0}^{x} e^{-t}\log f(t+i\pi)\,dt+ \tag{6}$$
$$+i\int_0^{\pi} e^{-iy}\log f(x_0+iy)\,dy - ie^{x-x_0}\int_0^{\pi} e^{-iy}\log f(x_0+iy)\,dy.$$

Застосувавши теорему Фубіні до другого доданка правого боку (6), маємо

$$\int_{x_0}^{x}\Big(i\int_0^{\pi} e^{-iy}\frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\,dy\Big)dt = i\int_0^{\pi} e^{-iy}\Big(\int_{x_0}^{x}\frac{f'(t+iy)}{f(t+iy)}\,dt\Big)dy =$$
$$= i\int_0^{\pi} e^{-iy}\Big(\log f(x+iy)-\log(x_0+iy)\Big)dy.$$

Тобто, ми отримали (2) для голоморфної в $\overline{R}$ функції.

Нехай тепер f мероморфна і задовольняє умови леми. Тоді з правого боку (3) відніматимемо суму $2\pi i\sum\limits_{\omega_p\in\partial R_t} e^{-\omega_p}$. Повторюючи аналогічні дії, одержимо (2).

2^0. **Формула Карлемана-Неванлінни для півсмуги.** Нехай функція f задовольняє умови леми пункту 1^0. Позначимо

$$l_1(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-iy}\log f(x+iy)\,dy, \tag{7}$$

$$l_{-1}(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{iy}\log f(x+iy)\,dy,$$

$$c_1(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log|f(x+iy)|\sin y\,dy. \tag{8}$$

Зазначимо, що

$$c_1(x,f)=-\mathrm{Im}\frac{l_1(x,f)+\overline{l_{-1}(x,f)}}{2}. \tag{9}$$

Далі доведемо такий аналог формули Карлемана-Неванлінни для півсмуги ([1], с. 19), [3], [4], [5].

Теорема 1. *Нехай функція $f(z)$ задовольняє умови леми. Тоді*

$$\sum_{\rho_q\in R_x}\sin\gamma_q\Big(\frac{1}{e^{\beta_q}}-\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\Big)-\sum_{\omega_p\in R_x}\sin\eta_q\Big(\frac{1}{e^{\xi_p}}-\frac{e^{\xi_p}}{e^{2x}}\Big)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\Big(\log|f(t)|+\log|f(t+i\pi)|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}-\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)\,dt+ \tag{10}$$
$$+\frac{1}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\log|f(t+iy)|\sin y\,dy+Q(x;x_0,f),$$

де

$$Q(x;x_0,f)=\frac{\operatorname{ch}(x-x_0)}{\pi\,e^x}\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin y\,dy-$$
$$-\frac{\operatorname{sh}(x-x_0)}{\pi\,e^x}\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos y\,dy,$$

$Q(x;x_0,f)=O(1)$ *при* $x\to\infty$.

Доведення. Згідно з (2) і (7) маємо

$$\frac{1}{2}\,l_1(x,f)=\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{\rho_q\in R_t}e^{-i\gamma_q}\cdot e^{t-\beta_q}\,dt-\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{\omega_p\in R_t}e^{-i\eta_p}\cdot e^{t-\xi_p}\,dt+$$
$$+\frac{i}{2\pi}\,e^x\int\limits_{x_0}^{x}e^{-t}\Big(\log|f(t)|+i\arg f(t)+\log|f(t+i\pi)|+i\arg f(t+i\pi)\Big)dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\,e^{x-x_0}\int\limits_0^{\pi}\Big(\cos y-i\sin y\Big)\Big(\log|f(x_0+iy)|+i\arg f(x_0+iy)\Big)dy.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{2}\,\overline{l_{-1}(x,f)}=\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{\rho_q\in R_t}e^{-i\gamma_q}\cdot e^{-(t-\beta_q)}\,dt-\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{\omega_p\in R_t}e^{-i\eta_p}\cdot e^{-(t-\xi_p)}\,dt-$$
$$-\frac{i}{2\pi}\,e^{-x}\int\limits_{x_0}^{x}e^t\Big(\log|f(t)|-i\arg f(t)+\log|f(t+i\pi)|-i\arg f(t+i\pi)\Big)e^t dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\,e^{-(x-x_0)}\int\limits_0^{\pi}\Big(\cos y-i\sin y\Big)\Big(\log|f(x_0+iy)|-i\arg f(x_0+iy)\Big)dy.$$

З врахуванням (9) ці співвідношення дають

$$
\begin{aligned}
c_1(x,f) = &\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{\rho_q\in R_t} \sin\gamma_q\Big(\frac{e^t}{e^{\beta_q}}+\frac{e^{\beta_q}}{e^t}\Big)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{\omega_p\in R_t} \sin\eta_p\Big(\frac{e^t}{e^{\xi_p}}+\frac{e^{\xi_p}}{e^t}\Big)\,dt-\\
&-\frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\Big(\log|f(t)|+\log|f(t+i\pi)|\Big)\frac{e^{x-t}-e^{-(x-t)}}{2}\,dt+ \qquad (11)\\
&+\frac{\operatorname{ch}(x-x_0)}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin y\,dy-\frac{\operatorname{sh}(x-x_0)}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos y\,dy.
\end{aligned}
$$

Інтегруючи частинами в інтегралі Стільтьєса, отримаємо

$$
\int\limits_{x_0}^{x} e^t\,d\left(\sum_{\rho_q\in R_t} e^{-\beta_q}\sin\gamma_q\right) = e^t\sum_{\rho_q\in R_t} e^{-\beta_q}\sin\gamma_q\Big|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x}\sum_{\rho_q\in R_t} e^{-\beta_q}\sin\gamma_q\,de^t.
$$

Звідси, обчислюючи інтеграл, що зліва, маємо

$$
\int\limits_{x_0}^{x} e^t\sum_{\rho_q\in R_t} e^{-\beta_q}\sin\gamma_q\,dt = e^x\sum_{\rho_q\in R_x} e^{-\beta_q}\sin\gamma_q - \sum_{\rho_q\in R_x}\sin\gamma_q.
$$

Це ж саме проробимо з іншим доданком першого інтеграла та другим інтегралом співвідношення (11). Тоді

$$
\begin{aligned}
c_1(x,f) = &e^x\sum_{\rho_q\in R_t}\sin\gamma_q\Big(\frac{1}{e^{\beta_q}}-\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\Big) - e^x\sum_{\omega_p\in R_t}\sin\eta_p\Big(\frac{1}{e^{\xi_p}}-\frac{e^{\xi_p}}{e^{2x}}\Big)-\\
&-\frac{e^x}{2\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\Big(\log|f(t)|+\log|f(t+i\pi)|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}-\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)\,dt+ \qquad (12)\\
&+\frac{\operatorname{ch}(x-x_0)}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin y\,dy-\frac{\operatorname{sh}(x-x_0)}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos y\,dy.
\end{aligned}
$$

Помноживши (12) на e^{-x} і врахувавши (8), одержимо (10). Позначивши

$$
\begin{aligned}
Q(x;x_0,f) = &\frac{\operatorname{ch}(x-x_0)}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\log|f(x_0+iy)|\sin y\,dy-\\
&-\frac{\operatorname{sh}(x-x_0)}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\arg f(x_0+iy)\cos y\,dy.
\end{aligned}
$$

Оскільки $f(x_0+iy)\neq 0,\infty$ при $0\leqslant y\leqslant\pi$, то $\log|f(x_0+iy)|$ та $\arg(f(x_0+iy))$ є неперервними функціями при $0\leqslant y\leqslant\pi$. Тому $|\log|f(x_0+iy)\sin y|\leqslant K$ і $|\arg(f(x_0+$

$iy))\cos y| \leqslant K$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, де K – деяка стала. Крім того,

$$0 \leqslant \left|\frac{\mathrm{ch}(x-x_0)}{\pi e^x}\right| \leqslant \frac{\mathrm{ch}x_0}{\pi} \quad \text{і} \quad 0 \leqslant \left|\frac{\mathrm{sh}(x-x_0)}{\pi e^x}\right| \leqslant \frac{\mathrm{ch}x_0}{\pi}.$$

Тому $|Q(x;x_0,f)| \leqslant \dfrac{4K\mathrm{ch}x_0}{\pi}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Надалі точку x_0 вважатимемо такою, що $f(x_0+iy) \neq 0, \infty$ при $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Якщо f має нулі або полюси на ∂R, то ми довизначимо $\log f(z)$ на ∂R за винятком нулів і полюсів співвідношенням (1), в якому інтеграл розуміється в сенсі головного значення. Тоді в цьому випадку співвідношення (10) залишається правильним. Доведення не суттєво модифікується.

3^0. **Характеристика і перша основна теорема Неванлінни для мероморфних у півсмузі функцій.** Нехай функція f мероморфна в замиканні півсмуги $R = \{z = x+iy : x > x_0,\quad 0 < y < \pi\}$, $\{\rho_q\}$ – послідовність нулів функції f в R, занумерованих у порядку неспадання їхніх дійсних частин, $\rho_q = \beta_q + i\gamma_q$; $\{\omega_p\}$ – послідовність полюсів функції f в R, занумерованих відповідно, $\omega_p = \xi_p + i\eta_p$.

Приймемо

$$c(x;x_0,f) = \sum_{\omega_p \in R_x} \sin\eta_p.$$

Характеристика $c(x;x_0,f)$ описує розміщення полюсів функції $f(z)$, суттєво враховуючи їхні уявні частини. Очевидно, $c(x;x_0,f)$ як функція від x є неспадною, неперервною справа на $[x_0;+\infty)$, кусково-сталою на будь-якому сегменті $[x_1;x_2] \subset [x_0;+\infty)$.

Позначимо

$$C(x;x_0,f) = 2\int_{x_0}^{x} c(t;x_0,f)\Big(\frac{1}{e^t} + \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt. \tag{13}$$

Ця характеристика природно пов'язана з формулою Карлемана – Неванлінни (10). Це випливає зі співвідношення

$$C(x;x_0,f) = 2\sum_{\omega_p \in R_x} \sin\eta_p\Big(\frac{1}{e^{\xi_p}} - \frac{e^{\xi_p}}{e^{2x}}\Big), \tag{14}$$

яке перевіряється інтегруванням частинами в інтегралі Стільтьєса (13). Справді,

$$2\sum_{\omega_p \in R_x} \sin\eta_p\Big(\frac{1}{e^{\xi_p}} - \frac{e^{\xi_p}}{e^{2x}}\Big) = 2\int_{x_0}^{x}\Big(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)d\left(\sum_{\omega_p \in R_x} \sin\eta_p\right) =$$

$$= 2\int_{x_0}^{x}\Big(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dc(t;x_0,f) = 2\Big(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)c(t;x_0,f)\Big|_{x_0}^{x} +$$

$$+2\int_{x_0}^{x} c(t;x_0,f)\Big(\frac{1}{e^t}+\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt = C(x;x_0,f).$$

Функція $C(x;x_0,f)$ є невід'ємною, неспадною, неперервною на $[x_0;+\infty)$, оскільки кожен доданок суми, яка її визначає, є невід'ємним і при зростанні x кількість доданків зростає в широкому розумінні.

Далі введемо характеристики

$$A(x;x_0,f)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x}\Big(\log^+|f(t)|+\log^+|f(t+i\pi)|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}-\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)\,dt,$$

$$B(x;x_0,f)=\frac{2}{\pi e^x}\int_0^{\pi}\log^+|f(x+iy)|\sin y\,dy.$$

Величини $A(x;x_0,f)$, $B(x;x_0,f)$ характеризують зростання функції $f(z)$ при $x\to+\infty$, перша – вздовж горизонтальних півпрямих межі R, друга – всередині півсмуги R.

Введемо характеристику

$$S(x;x_0,f)=A(x;x_0,f)+B(x;x_0,f)+C(x;x_0,f).$$

Характеристику $S(x;x_0,f)$ називатимемо характеристикою Неванлінни для півсмуги.

Правильний такий аналог першої основної теореми Неванлінни ([1], с. 39).

Теорема 2. *Нехай $f(z)$ – функція, мероморфна в замиканні півсмуги $R=\{z=x+iy: x>x_0,\ 0<y<\pi\}$, $f(x_0)\neq 0,\ a,\ \infty$. Тоді для довільного комплексного числа a справджується співвідношення*

$$A\Big(x;x_0,\frac{1}{f-a}\Big)+B\Big(x;x_0,\frac{1}{f-a}\Big)+C\Big(x;x_0,\frac{1}{f-a}\Big)=$$
$$=S(x;x_0,f)+\varepsilon(x;x_0,a),$$

де $\varepsilon(x;x_0,a)=O(1)$, при $x\to\infty$.

Доведення теореми 2 проводиться за аналогічною схемою до доведення теореми Неванлінни. Записавши (10) для функції $f-a$ і застосувавши співвідношення $\log|x|=\log^+|x|-\log^+\left|\frac{1}{x}\right|$ та $\left|\log^+|x_1|-\log^+|x_2|\right|\leqslant\log^+|x_1-x_2|+\log 2$ ([1], с. 25), отримаємо (15).

Теорема 3. *Нехай функція f, $f(z)\not\equiv 0$, мероморфна в замиканні півсмуги $R=\{z=x+iy: x_0<x<+\infty,\ 0<y<\pi\}$. Тоді існують σ, $x_0\leqslant\sigma$, та обмежена на $[\sigma;+\infty)$ функція $\psi(x;\sigma,f)$ така, що функція $S(x;\sigma,f)+\psi(x;\sigma,f)$ – зростає та неперервна на $[\sigma;+\infty)$.*

Доведення. Виберемо σ так, щоб $f(\sigma+iy)\neq 0,\infty$ при $0\leqslant y\leqslant\pi$. Покажемо, що характеристики Неванлінни для функцій af і f відрізняються на обмежену функцію $\psi_1(x;\sigma,f)$.

Оскільки множини полюсів функцій af та f однакові, то $C(x;\sigma,af) = C(x;\sigma,f)$. Далі

$$|A(x;\sigma,af) - A(x;\sigma,f)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{x}\Big|\Big(\log^+|af(t)| - \log^+|f(t)|\Big)\Big|\Big(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{x}\Big|\Big(\log^+|af(t+i\pi)| - \log^+|f(t+i\pi)|\Big)\Big|\Big(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt, \quad x \geqslant \sigma.$$

Застосовуючи нерівність $\big|\log^+|x_1| - \log^+|x_2|\big| \leqslant \left|\log\left|\frac{x_1}{x_2}\right|\right|$ ([1], с. 25), маємо

$$|A(x;\sigma,af) - A(x;\sigma,f)| \leqslant \frac{2|\log|a||}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{x}\Big(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt \leqslant \frac{2|\log|a||}{\pi e^{\sigma}}, \quad x \geqslant \sigma.$$

Проводячи аналогічні міркування, одержимо

$$|B(x;\sigma,af) - B(x;\sigma,f)| = \frac{2}{\pi e^x}\left|\int\limits_0^{\pi}\log^+|af(x+iy)|\sin y\,dy -\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^{\pi}\log^+|f(x+iy)|\sin y\,dy\right| \leqslant \frac{2|\log|a||}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\sin y\,dy \leqslant \frac{4|\log|a||}{\pi e^{\sigma}}, \quad x \geqslant \sigma.$$

Отож, позначивши $\psi_1(x;\sigma,f) = S(x;\sigma,af) - S(x;\sigma,f)$, матимемо

$$|\psi_1(x;\sigma,f)| \leqslant \frac{6|\log|a||}{\pi e^{\sigma}}.$$

Можемо вважати $|f(\sigma+iy)| > 1$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, помноживши в разі потреби f на $a = \dfrac{2}{m}$, $m = \min\limits_{0\leqslant y\leqslant\pi}|f(\sigma+iy)|$. Характеристика $S(x;\sigma,f)$ в результаті цього зміниться, як показано вище, на обмежену на $[\sigma;+\infty)$ функцію.

Запишемо тепер співвідношення (10) для функції $f - e^{i\theta}$

$$C\Big(x;\sigma,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\Big) - C(x;\sigma,f) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{x}\Big(\log\big|f(t)-e^{i\theta}\big| + \log\big|f(t+i\pi)-e^{i\theta}\big|\Big)\Big(\frac{1}{e^t} + \frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt + \tag{16}$$
$$+\frac{2}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\log\big|f(x+iy)-e^{i\theta}\big|\sin y\,dy + 2Q\Big(x,\sigma,f-e^{i\theta}\Big).$$

Перші два доданки правого боку цієї рівності та перший доданок в зображенні $Q(x;\sigma,f-e^{i\theta})$ є вимірними функціями змінної θ. Гілку аргумента вибираємо так, щоб функція $\arg\Big(f(\sigma)-e^{i\theta}\Big)$ була неперервною за θ, а саме

$$\arg\Big(f(\sigma)-e^{i\theta}\Big)=\arg f(\sigma)+\operatorname{arctg}\frac{-\sin\Big(\theta-\arg f(\sigma)\Big)}{|f(\sigma)|-\cos\Big(\theta-\arg f(\sigma)\Big)}.$$

Оскільки рівність (16) правильна для всіх $\theta\in[0;2\pi)$, то і $C\Big(x;\sigma,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\Big)$ є вимірною функцією змінної θ. Проінтегруємо по θ від 0 до 2π і поділимо на 2π. Отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}C\Big(x;\sigma,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\Big)d\theta-C\Big(x;\sigma,f\Big)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma^x\Big(\log\left|f(t)-e^{i\theta}\right|+\log\left|f(t+i\pi)-e^{i\theta}\right|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}+\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt\Big)d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{2}{\pi e^x}\int\limits_0^\pi\log\left|f(x+iy)-e^{i\theta}\right|\sin y\,dy\Big)d\theta+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q\Big(x;\sigma,f-e^{i\theta}\Big)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{I}_1(\theta)\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{I}_2(\theta)\,d\theta+\mathrm{I}_3(\theta),\qquad(17)$$

якщо приймемо, що інтеграли з правого боку (17) існують. Ми покажемо це і покажемо, що в цих інтегралах можна змінити порядок інтегрування.

Спочатку доведемо існування інтегралів $\mathrm{I}_j(\theta)$, $j\in\{1;\,2;\,3\}$.

Використавши співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\log\left|w-e^{i\theta}\right|\right|d\theta\leqslant\log^+|w|+2\log 2,$$

де w – довільне комплексне число ([1], с. 34), маємо

$$|\mathrm{I}_1|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma^x\Big(\log^+|f(t)|+\log^+|f(t+i\pi)|+4\log 2\Big)\Big(\frac{1}{e^t}+\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt.$$

Аналогічно

$$|\mathrm{I}_2|\leqslant\frac{2}{\pi e^x}\int\limits_0^\pi\Big(\log^+|f(x+iy)|+2\log 2\Big)\sin y\,dy.$$

Розглянемо

$$\mathrm{I}_3=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\operatorname{ch}(x-\sigma)}{\pi e^x}\Big(\int\limits_0^\pi\log\left|f(\sigma+iy)-e^{i\theta}\right|\sin y\,dy\Big)d\theta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sh}(x-\sigma)}{\pi e^x}\Big(\int\limits_0^{\pi}\arg\Big(f(\sigma+iy)-e^{i\theta}\Big)\cos y\,dy\Big)d\theta. \qquad (18)$$

Аналогічно до попередніх інтегралів доводимо існування інтеграла

$$\int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|\log|f(\sigma+iy)|-e^{i\theta}\big|\sin y\,d\theta\Big)dy.$$

Функція

$$\int\limits_0^{\pi}\arg\Big(f(\sigma+iy)-e^{i\theta}\Big)\cos y\,dy$$

є, як зазначено вище, неперервною на $[0;2\pi]$.

Тому в інтегралах правого боку (17) згідно з теоремою Фубіні – Тонеллі ([6], с. 213) можемо змінити порядок інтегрування. Отож,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma^{x}\Big(\log\big|f(t)-e^{i\theta}\big|+\log\big|f(t+i\pi)-e^{i\theta}\big|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}+\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt\Big)d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma^{x}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\log\big|f(t)-e^{i\theta}\big|+\log\big|f(t+i\pi)-e^{i\theta}\big|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}+\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)d\theta\Big)dt.$$

Використавши співвідношення

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|w-e^{i\theta}|\,d\theta=\log^+|w|,$$

де w – довільне комплексне число ([1], с. 34), маємо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma^{x}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\log\big|f(t)-e^{i\theta}\big|+\log\big|f(t+i\pi)-e^{i\theta}\big|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}+\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)d\theta\Big)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_\sigma^{x}\Big(\log^+|f(t)|+\log^+|f(t+i\pi)|\Big)\Big(\frac{1}{e^t}+\frac{e^t}{e^{2x}}\Big)dt=A(x;\sigma,f). \qquad (20)$$

Аналогічно

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{2}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\log\big|f(x+iy)-e^{i\theta}\big|\sin y\,dy\Big)d\theta=$$

$$=\frac{2}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\log^+|f(x+iy)|\sin y\,dy=B(x;\sigma,f). \qquad (21)$$

Знайдемо, як і раніше, перший доданок правого боку (18)

$$\frac{2\mathrm{ch}(x-\sigma)}{\pi e^x}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\log|f(\sigma+iy)-e^{i\theta}|\sin y\,dy\,d\theta=$$

$$=\frac{2\mathrm{ch}(x-\sigma)}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\log^+|f(\sigma+iy)|\sin y\,dy. \tag{22}$$

Позначимо

$$\psi_2(x;\sigma,f)=\frac{2\mathrm{ch}(x-\sigma)}{\pi e^x}\int\limits_0^{\pi}\log|f(\sigma+iy)-e^{i\theta}|\sin y\,dy\,d\theta-$$

$$-\frac{\mathrm{sh}(x-\sigma)}{\pi^2 e^x}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\arg\Big(f(\sigma)-e^{i\theta}\Big)\cos y\,dy\,d\theta. \tag{23}$$

Врахувавши (19) - (23), рівність (17) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}C\Big(x;\sigma,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\Big)d\theta=S(x;\sigma,f)+\psi_2(x;\sigma,f). \tag{24}$$

Оскільки ця рівність доведена для функції f, домноженої в разі потреби на сталу, і ми показали, що її характеристика відрізняється від характеристики функції f на обмежену функцію $\psi_1(x;\sigma,f)$, тоді позначивши $\psi(x;\sigma,f)=\psi_1(x;\sigma,f)+\psi_2(x;\sigma,f)$, рівність (24) запишемо так:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}C\Big(x;\sigma,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\Big)d\theta=S(x;\sigma,f)+\psi(x;\sigma,f). \tag{25}$$

Згідно з (13) лівий бік співвідношення (25) є неперервною функцією на $[\sigma;+\infty)$, а згідно з (14) зростаючою на цьому проміжку.

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай $L(\omega)=\dfrac{a\omega+b}{c\omega+d}$, $\quad ad-cb\neq 0$ – довільне дробово-лінійне відображення. Тоді

$$S(x;x_0,L(f))=S(x;x_0,f)+O(1). \tag{26}$$

Доведення. З властивостей дробово-лінійного відображення випливає, що достатньо розглянути випадки:

1) $L(\omega)=\omega-a$;

2) $L(\omega)=a\omega$;

3) $L(\omega)=\frac{1}{\omega}$.

Якщо 1 або 2, то співвідношення (26) було одержано в теоремі 2 та при доведенні теореми 3. Якщо 3, то (26) це (15) при $a=0$.

---

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. - М., 1970.
2. *Brydun A. M, Kondratyuk A. A.* On the Fourier series of the zeta-function logarithm on the vertical lines// Mathematychni Studii. – 2004. – Vol. 21. – N 1.
3. *Carleman T.* Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen // Ark. för Mat., Astr. och Fysik. – 1923. – Vol. 17. – N 9. – S. 1-30.
4. *Nevanlinna F.* Über die Beziehungen zwischen dem Anwachsen einer analytischen Funktion und der Verteilung ihrer Nullstellen und Pole // Proc. of 5-th Cong. des mathématiciens scand., Helsingfors, 1922.
5. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – Москва; Ленинград, 1941.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.*, Линейные операторы. Общая теория. – М., 1962.

NEVANLINNA CHARACTERISTIC AND FIRST MAIN THEOREM FOR MEROMORPHIC FUNCTIONS IN A HALF-STRIP

Andriy Brydun

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

Analogs of the Carleman formula and the Nevanlinna first main theorem for meromorphic functions in a half-strip are proved.

Key words: meromorphic function, Nevanlinna first main theorem, Carleman formula.

Стаття надійшла до редколегії 11.12.2003
Прийнята до друку 03.11.2004