ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.44–47

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.44–47

УДК 517.53

ПРО ФОРМАЛЬНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ, ПОХІДНІ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА ЯКИХ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ СПЕЦІАЛЬНУ УМОВУ

Олександр ВОЛОХ, Степан ФЕДИНЯК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Для формального степеневого ряду знайдено умову на похідні Гельфонда-Леонтьєва, за яких цей ряд задає функцію, аналітичну в крузі $\{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant + \subset$.

Ключові слова: формальний степеневий ряд, похідні Гельфонда-Леонтьєва, ціла функція, аналітична в одиничному крузі функція.

Нехай $A(R)$, $0 < R \leqslant +\infty$ – клас аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ функцій $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, а $A(0)$ – клас формальних степеневих рядів. Зрозуміло, $A(R_2) \subset A(R_1)$ для всіх $0 \leqslant R_1 \leqslant R_2 \leqslant +\infty$. Вважатимемо, що $f \in A^+(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $f_k > 0$ для всіх $k \geqslant 0$. Для функцій $f \in A(0)$ і $l(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} l_k z^k \in A^+(0)$ формальний степеневий ряд $D_l^n f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k$ називається [1, 2] n-ю похідною Гельфонда-Леонтьєва. Якщо $l(z) = e^z$, тобто $l_k = 1/k!$, то $D_l^n f(z) = f^{(n)}(z)$ – звичайна n-а похідна функції f. Вважатимемо надалі $l_0 = 1$.

Через Λ позначимо клас додатних числових послідовностей $\lambda = (\lambda_k)$ і, як в [2], вважатимемо, що $f \in A_\lambda(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $|f_k| \leqslant \lambda_k |f_1|$ для всіх $k \geqslant 1$. В [2] доведено таке: якщо $l \in A^+(0)$, то для того щоб для довільних функцій $f \in A(0)$ і послідовності $\lambda \in \Lambda$ з умови $(\forall n \geqslant 0)$ $\{D_l^n f \in A_\lambda(0)\}$ випливало, що $f \in A(\infty)$, необхідно і достатньо, щоб $l \in A^+(\infty)$, тобто $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\lambda_k} = 0$. Мета праці – вивчити умови на $l \in A^+(0)$, за яких із виконання для всіх $n \geqslant 0$ умови $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ випливає, що $f \in A(R)$ для будь-якого $R > 0$. Твердження 1 є новим і для випадку $R = +\infty$.

Твердження 1. *Нехай $f_1 \neq 0$ і $R > 0$. Для того щоб $f \in A(R)$, необхідно і достатньо, щоб існувала послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $f \in A_\lambda(0)$ і $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\lambda_k} \leqslant 1/R$.*

Справді, якщо існує послідовність $\lambda \in \Lambda$ така, що $f \in A_\lambda(0)$ і $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\lambda_k} \leqslant 1/R$, то $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|} \leqslant 1/R$, звідки випливає, що радіус збіжності ряду $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$, $R_{зб} \geqslant R$ і, отже, $f \in A(R)$. Навпаки, якщо $f \in A(R)$, тобто $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|} \leqslant 1/R$, то існує додатна послідовність $(\varepsilon_k) \downarrow 0$ така, що $\sqrt[k]{|f_k|} \leqslant 1/R + \varepsilon_k$. Позначимо $\lambda_k = (1/R + \varepsilon_k)^k/|f_1|$. Тоді $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\lambda_k} \leqslant 1/R$ і $|f_k| \leqslant \lambda_k|f_1|$ для всіх $k \geqslant 1$, тобто $f \in A_\lambda(0)$.

Основний результат нашої праці – узагальнення наведеного твердження з [2].

Теорема. *Нехай $l \in A^+(0)$ і $R > 0$. Для того щоб для довільних функцій $f \in A(0)$ і послідовності $\lambda \in \Lambda$ із виконання для всіх $n \geqslant 0$ умови $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ випливало, що $f \in A(R)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k} \leqslant \frac{l_2}{l_1\lambda_2 R}. \tag{1}$$

Доведення. Якщо $l \in A^+(0)$, $\lambda \in \Lambda$ і $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ для всіх $n \geqslant 0$, тобто

$$\frac{l_k}{l_{k+n}}|f_{k+n}| \leqslant \lambda_k \frac{l_1}{l_{1+n}}|f_{1+n}| \tag{2}$$

для всіх $n \geqslant 0$ і всіх $k \geqslant 1$, то для $k = 2$ з (2) маємо

$$|f_{n+2}| \leqslant \lambda_2 \frac{l_1 l_{n+2}}{l_2 l_{n+1}}|f_{n+1}| \leqslant \left(\frac{\lambda_2 l_1}{l_2}\right)^2 \frac{l_{n+2}}{l_n}|f_n| \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{\lambda_2 l_1}{l_2}\right)^{n+1} \frac{l_{n+2}}{l_1}|f_1|, \tag{3}$$

тобто

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} \leqslant \frac{\lambda_2 l_1}{l_2} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{l_n}.$$

Якщо виконується умова (1), то для радіуса збіжності ряду (1) маємо

$$R_{зб} \geqslant \frac{l_2}{\lambda_2 l_1 \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{l_n}} \geqslant R,$$

звідки випливає, що $f \in A(R)$. Навпаки, якщо умова (1) не виконується, тобто $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{l_n} > \dfrac{l_2}{l_1\lambda_2 R}$, то, вибираючи $\lambda_1 = 1$, $\lambda_k = \dfrac{l_k}{l_1}\left(\dfrac{l_1\lambda_2}{l_2}\right)^{k-1}$ для $k \geqslant 2$ і $f_k = l_k\left(\dfrac{l_1\lambda_2}{l_2}\right)^k$ для $k \geqslant 1$, маємо

$$\frac{l_k}{l_{k+n}}|f_{k+n}| = l_k\left(\frac{l_1\lambda_2}{l_2}\right)^{k+n} = \lambda_k l_1\left(\frac{l_1\lambda_2}{l_2}\right)^{1+n} = \lambda_k \frac{l_1}{l_{1+n}}|f_{1+n}| \quad (n \geqslant 0,\ k \geqslant 1),$$

тобто правильна нерівність (2) для всіх $n \geqslant 0$ та $k \geqslant 1$ і, отже, $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ для всіх $n \geqslant 0$. Оскільки

$$\frac{1}{R_{зб}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} = \frac{\lambda_2 l_1}{l_2} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{l_n} > \frac{1}{R},$$

то $f \notin A(R)$. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Нехай $l \in A^{+}(0)$. Для того щоб для довільних функції $f \in A(0)$ і послідовності $\lambda \in \Lambda$ із виконання для всіх $n \geqslant 0$ умови $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ випливала аналітичність функції f у деякому околі точки $z = 0$ необхідно і достатньо, щоб $\sqrt[k]{l_k} = O(1)$, $k \to \infty$.*

Справді, якщо $\sqrt[k]{l_k} = O(1)$, $k \to \infty$, то виконується умова (1) з деяким числом $R > 0$ і за теоремою $f \in A(R)$, тобто функція f аналітична у деякому околі точки $z = 0$. Якщо ж $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{l_n} = +\infty$, то, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_k = \dfrac{l_k}{l_1}\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)^{k-1}$ для $k \geqslant 2$ і $f_k = l_k\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)^{k}$ для $k \geqslant 1$, як у доведенні факту 2, переконуємося, що $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ для всіх $n \geqslant 0$ і $R_{зб} = 0$. Наслідок 1 доведено.

Через $\overline{A}(1)$ позначимо клас формальних степеневих рядів таких, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|} \geqslant 1$. З теореми випливає наслідок 2.

Наслідок 2. *Нехай $l \in A^{+}(0)$. Для того щоб для довільних функції $f \in \overline{A}(1)$ і послідовності $\lambda \in \Lambda$ із виконання для всіх $n \geqslant 0$ умови $D_l^n f \in A_\lambda(0)$ випливало, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f_n|} = 1$ необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{l_1\lambda_2}{l_2} \sqrt[k]{l_k} \leqslant 1$.*

Використовуючи нерівність (3), можна оцінити зростання як цілої функції, про яку йдеться у наведеному результаті з [2], так і аналітичної в одиничному крузі функції з наслідку 2 у будь-якій шкалі зростання. Ми розглянемо тільки оцінки типів.

Для функції $f \in A(R)$ з $R > 0$ нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r < R\}$. Якщо $R = +\infty$, то тип цілої функції f визначається рівністю $\sigma[f] =: \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \dfrac{\ln M_f(r)}{r^\rho}$, $0 < \rho < +\infty$, а за теоремою Адамара $\sigma[f] = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{n}{e\rho}|f_n|^{\rho/n}$. Тому з (3) отримуємо оцінку $\sigma[f] \leqslant \left(\dfrac{l_1\lambda_2}{l_2}\right)^\rho \sigma[l]$. Якщо ж $R = 1$, то тип аналітичної в крузі $\{z : |z| < 1\}$ функції f визначається рівністю $\sigma[f] := \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}}(1-r)^\rho \ln M_f(r)$, $0 < \rho < +\infty$, а для його знаходження правильна [3] формула $\sigma[f] = \dfrac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{(\rho+1)}} \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{(\ln^+ |f_n|)^{(\rho+1)}}{n^\rho}$. Тому з (3) отримуємо оцінку $\sigma[f] \leqslant \dfrac{\rho^\rho}{(\rho+1)^{(\rho+1)}} \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \left\{ n \ln^+ \left(\dfrac{l_1\lambda_2}{l_2} \sqrt[n]{l_n}\right)\right\}^{\rho+1}$.

---

1. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. – 1951. – Т. 29. – N 3. – С. 477–500.

2. *Шеремета М. Н.* О степенных рядах Дирихле с удовлетворяюющими специальному условию производными Гельфонда-Леонтьева // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1996. – Т. 3. – N 3/4. – С. 423–445.

3. *Говоров Н. В.* О связи между ростом функции, аналитической в единичном круге, и коэффициентами ее степенного разложения // Тр. Новочеркаск. политех. ин-та. – 1959. – Т. 100. – С. 101–115.

ON FORMAL POWER SERIES WITH GELFOND-LEONT'EV DERIVATIVES SATISFYING A SPECIAL CONDITION

Oleksandr Volokh, Stepan Fedynyak

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

For a formal power series it is found a condition on Gelfond-Leont'ev derivatives under which the series represents an analytic function in the disk $\{z : |z| < R\}$, $0 < R \leqslant +\infty$.

Key words: formal power series, Gelfond-Leont'ev derivatives, entire function, analytic function in the unit disk.

Стаття надійшла до редколегії 21.10.2003
Прийнята до друку 03.11.2004