ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.48–58

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.48–58

УДК 517.526

МНОЖИНИ ЗБІЖНОСТІ ТА СТІЙКОСТІ ДЕЯКИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ПІДХІДНИХ ДРОБІВ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Володимир ГЛАДУН
Національний університет "Львівська політехніка", вул. Бандери, 12 79013 Львів, Україна

Досліджено збіжність та стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) зі змінною кількістю гілок розгалуження і дійсними елементами. Виявлено багатовимірні множини абсолютної збіжності послідовностей $\left\{f^{(2s+1)}\right\}$, $\left\{f^{(2s)}\right\}$, $\left\{f^{(s)}\right\}$ підхідних дробів таких ГЛД. Проаналізувавши абсолютні похибки підхідних дробів, визначено багатовимірні множини абсолютної стійкості до збурень таких ГЛД.

Ключові слова: гіллясті ланцюгові дроби.

Найважливіший напрям аналітичної теорії неперервних дробів та їх багатовимірних узагальнень – гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), – дослідження їх збіжності [4, 6, 8, 9]. Виявлено, що проста область збіжності неперервних дробів з дійсними частинними чисельниками та знаменниками, які дорівнюють одиниці, не може містити точок, які лежать зліва від точки $-\frac{1}{4}$ [6]. Вагомий внесок у теорію збіжності неперервних дробів з дійсними елементами зробив Тіце, підсиливши ознаку збіжності Прінгсгейма [9]. Аналоги ознак збіжності Тіце і Прінгсгейма для ГЛД довів Д.І.Боднар [5], для інтегральних ланцюгових дробів (ІЛД) – Т.М.Антонова [2]. Досліджено також деякі властивості ГЛД з недодатними елементами [1]. В зв'язку з розширенням області можливих застосувань ГЛД актуальним є подальше дослідження збіжності ГЛД з дійсними елементами.

Важливою властивістю неперервних дробів та ГЛД, як ефективного засобу обчислювальної математики, є властивість стійкості до збурень (властивість ненагромадження або малого нагромадження похибок, які виникають під час обчислення підхідних дробів) [4, 6, 8], яка здебільшого підтверджується експериментально. Теоретичних результатів у цьому напрямі досягнули В.Трон, У.Джоунс [10] для неперервних дробів, Д.І.Боднар – для ГЛД з додатними елементами [4], М.О.Недашковський – для ГЛД, елементи яких задовольняють умови типу Прінгсгейма [7], Т.М.Антонова – для ІЛД [2].

Мета праці – розглянути поняття багатовимірних множин елементів та відповідних їм множин значень ГЛД. Знайдено вигляд багатовимірних множин абсолютної збіжності та абсолютної стійкості до збурень ГЛД зі змінною кількістю гілок розгалуження і дійсними частинними чисельниками, гіллястий ланцюговий дріб, підхідний дріб, залишок підхідного дробу, багатовимірні множини елементів, багатовимірні множини абсолютної збіжності, багатовимірні множини абсолютної стійкості до збурень

Кожен ГЛД зі змінною кількістю гілок розгалуження з дійсними, відмінними від нуля елементами,

$$b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}},$$

використовуючи еквівалентні перетворення та перепозначення, завжди можна звести до вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{c_{i(k)}}{1} + \sum_{i_k=n_{i(k-1)}+1}^{N_{i(k-1)}} \frac{c_{i(k)}}{1} \right) :=$$

$$b_0 + \sum_{i_1=1}^{n_0} \cfrac{c_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cfrac{c_{i(2)}}{1+\ddots} + \sum\limits_{i_2=n_{i(1)}+1}^{N_{i(1)}} \cfrac{c_{i(2)}}{1+\ddots}} +$$

$$+ \sum_{i_1=n_0+1}^{N_0} \cfrac{c_{i(1)}}{1 + \sum\limits_{i_2=1}^{n_{i(1)}} \cfrac{c_{i(2)}}{1+\ddots} + \sum\limits_{i_2=n_{i(1)}+1}^{N_{i(1)}} \cfrac{c_{i(2)}}{1+\ddots}}, \qquad (1)$$

де $N_{i(k)} \in \mathbb{N}$, $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ – мультиіндекс, $i(k) \in I_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$I_0 = \{0\}, \quad I_k = \left\{ i(k) : 1 \leqslant i_p \leqslant N_{i(p-1)}, p = \overline{1,k} \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots ;$$

$n_{i(k)}$, $n_{i(k)} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $0 \leqslant n_{i(k)} \leqslant N_{i(k)}$ $(i(k) \in I_k, k = 0, 1, 2, \ldots)$ – кількість додатних елементів $c_{i(k+1)}$, $1 \leqslant i_{k+1} \leqslant N_{i(k)}$, при фіксованих індексах $i_1, i_2, \ldots, i_k$. У записі ГЛД (1) передбачено, що $c_{i(k+1)} > 0$ при $1 \leqslant i_{k+1} \leqslant n_{i(k)}$, $c_{i(k+1)} < 0$ при $n_{i(k)} + 1 \leqslant i_{k+1} \leqslant N_{i(k)}$, причому сума, верхній індекс якої менший за нижній, вважається такою, що дорівнює нулю.

Багатовимірними множинами елементів $\left\{E_{i(k)}\right\}$ та відповідними їм множинами значень $\left\{V_{i(k)}\right\}$ ГЛД (1) назвемо сукупності непорожніх множин $E_{i(k)} \subset \mathbb{R}^{N_{i(k)}}$, $V_{i(k)} \subset \mathbb{R}$ таких, що при всіляких можливих значеннях мультиіндексів $1 \in V_{i(k)}$ і для довільних елементів $\mathbf{c}_{i(k)} = \left(c_{i(k)1}, c_{i(k)2}, \ldots c_{i(k)N_{i(k)}}\right) \in E_{i(k)}$, $v_{i(k+1)} \in V_{i(k+1)}$, $1 \leqslant i_{k+1} \leqslant N_{i(k)}$ виконуються співвідношення

$$1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{v_{i(k+1)}} \in V_{i(k)} \quad (i(k) \in I_k, k = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

Скінченні ГЛД

$$f^{(0)} = b_0, \quad f^{(s)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{s} \left(\sum_{i_k=1}^{n_{i(k-1)}} \frac{c_{i(k)}}{1} + \sum_{i_k=n_{i(k-1)}+1}^{N_{i(k-1)}} \frac{c_{i(k)}}{1} \right) \quad (s = 1, 2, \dots)$$

називаються s-ми підхідними дробами ГЛД (1). Величини, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_{i(s)}^{(s)} = 1, \quad Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{c_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}} \quad (i\,(p) \in I_p,\ p = s-1, s-2, \dots, 0),$$

називаються залишками s -го підхідного дробу ГЛД (1). Із наведених означень випливає, що для s-го підхідного дробу ГЛД (1) справджується формула $f^{(s)} = b_0 - 1 + Q_0^{(s)}$, $s = 0, 1, 2, \dots$, і

$$Q_{i(p)}^{(s)} \in V_{i(p)}, \quad \left(i\,(p) \in I_p, p = \overline{0, s}, s = 0, 1, 2, \dots\right). \tag{3}$$

Означення. Послідовність багатовимірних множин елементів $\left\{E_{i(k)}\right\}$, $E_{i(k)} \subset \mathbb{R}^{N_{i(k)}}$ $(i\,(k) \in I_k, k = 0, 1, 2, \dots)$ називається послідовністю множин абсолютної збіжності підпослідовності підхідних дробів $\left\{f^{(s_l)}\right\}$ $(l = 0, 1, 2, \dots)$ ГЛД (1), якщо збігається ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \left|f^{(s_{l+1})} - f^{(s_l)}\right|$ для довільних $\mathbf{c}_{i(k)} \in E_{i(k)} (i(k) \in I_k,\ k = 0, 1, 2, \dots)$.

Позначимо через $\mathbb{R}_{n_{i(k)}}^{N_{i(k)}}$ гіпероктанти простору $\mathbb{R}^{N_{i(k)}}$

$$\mathbb{R}_{n_{i(k)}}^{N_{i(k)}} = \left\{ \mathbf{x}_{i(k)} = \left(x_{i(k)1}, x_{i(k)2}, \dots x_{i(k)N_{i(k)}} \right) \in \mathbb{R}^{N_{i(k)}} : \right.$$

$$\left. x_{i(k)j} > 0, 1 \leqslant j \leqslant n_{i(k)}; x_{i(k)j} < 0, n_{i(k)} + 1 \leqslant j \leqslant N_{i(k)} \right\}.$$

Лема. *Нехай* $\left\{\rho_{i(k)}^{(\nu)}\right\}$, $\rho_{i(k)}^{(\nu)} > 0$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\left\{\varepsilon_{i(k)}\right\}$, $\varepsilon_{i(k)} \geqslant 0$ *(* $i\,(k) \in I_k, k = 0, 1, 2, \dots$ *) – деякі послідовності дійсних сталих таких, що*

$$\rho_{i(k)}^{(1)} + \varepsilon_{i(k)} \leqslant 1 \leqslant \rho_{i(k)}^{(2)} - \varepsilon_{i(k)} \left(i\,(k) \in I_k, k = 0, 1, 2, \dots\right). \tag{4}$$

Тоді множини

$$E_{i(k)}\left(\varepsilon_{i(k)}\right) =$$

$$\left\{ \mathbf{x}_{i(k)} \in \mathbb{R}_{n_{i(k)}}^{N_{i(k)}} :\ 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{x_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(2)}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{x_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(1)}} \geqslant \rho_{i(k)}^{(1)} + \varepsilon_{i(k)} \right\} \cap$$

$$\cap \left\{ \mathbf{x}_{i(k)} \in \mathbb{R}_{n_{i(k)}}^{N_{i(k)}} : 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{x_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(1)}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{x_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(2)}} \leqslant \rho_{i(k)}^{(2)} - \varepsilon_{i(k)} \right\} \tag{5}$$

і

$$V_{i(k)} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \rho_{i(k)}^{(1)} \leqslant x \leqslant \rho_{i(k)}^{(2)} \right\} \tag{6}$$

$(i(k) \in I_k, k = 0,1,2,\ldots)$ є відповідно багатовимірними множинами елементів і відповідними їм множинами значень ГЛД (1).

Доведення. З умови (4) випливає, що $1 \in V_{i(k)}$.

Нехай $\mathbf{c}_{i(k)} = \left(c_{i(k)1}, c_{i(k)2}, \ldots, c_{i(k)N_{i(k)}}\right)$ і $v_{i(k+1)}$, $1 \leqslant i_{k+1} \leqslant N_{i(k)}$ довільні елементи множин $E_{i(k)}\left(\varepsilon_{i(k)}\right)$ і $V_{i(k+1)}$, $1 \leqslant i_{k+1} \leqslant N_{i(k)}$, відповідно. Тоді

$$1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{v_{i(k+1)}} = 1+\sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{v_{i(k+1)}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{v_{i(k+1)}} \leqslant$$

$$\leqslant 1+\sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{\rho^{(1)}_{i(k+1)}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{\rho^{(2)}_{i(k+1)}} \leqslant \rho^{(2)}_{i(k)} - \varepsilon_{i(k)} \leqslant \rho^{(2)}_{i(k)},$$

$$1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{v_{i(k+1)}} \geqslant 1+\sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{\rho^{(2)}_{i(k+1)}} + \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{\rho^{(1)}_{i(k+1)}} \geqslant \rho^{(1)}_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)} \geqslant \rho^{(1)}_{i(k)},$$

що доводить виконання умови (2). Лема доведена.

Зауваження. Якщо множини $E_{i(k)}\left(\varepsilon_{i(k)}\right)$, $V_{i(k)}$ $(i(k) \in I_k, k = 0,1,2,\ldots)$ визначаються згідно з (5), (6), то виконуються такі включення:

$$1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{V_{i(k+1)}} \subseteq$$

$$\subseteq V_{i(k)} \setminus \left(\left\{x \in \mathbb{R} : \rho^{(1)}_{i(k)} \leqslant x < \rho^{(1)}_{i(k)} + \varepsilon_{i(k)}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : \rho^{(2)}_{i(k)} - \varepsilon_{i(k)} < x \leqslant \rho^{(2)}_{i(k)}\right\}\right)$$

і для залишків $Q^{(s)}_{i(p)}$ s -го підхідного дробу ГЛД (1) справджуються оцінки

$$\rho^{(1)}_{i(p)} + \varepsilon_{i(p)} \leqslant Q^{(s)}_{i(p)} \leqslant \rho^{(2)}_{i(p)} - \varepsilon_{i(p)} \quad \left(i(p) \in I_p, p = \overline{0,s}, s = 1,2,\ldots\right). \tag{7}$$

Розглянемо множини мультиіндексів, які визначаються такими рекурентними співвідношеннями:

$$I^{(1)}_k = \left\{i(k-1)\,i_k : i(k-1) \in I^{(1)}_{k-1}, n_{i(k-1)}+1 \leqslant i_k \leqslant N_{i(k-1)}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{i(k-1)\,i_k : i(k-1) \in I^{(2)}_{k-1}, 1 \leqslant i_k \leqslant n_{i(k-1)}\right\},$$

$$I^{(2)}_k = \left\{i(k-1)\,i_k : i(k-1) \in I^{(1)}_{k-1}, 1 \leqslant i_k \leqslant n_{i(k-1)}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{i(k-1)\,i_k : i(k-1) \in I^{(2)}_{k-1}, n_{i(k-1)}+1 \leqslant i_k \leqslant N_{i(k-1)}\right\},$$

$k = 2,3,\ldots$, причому $I^{(1)}_1 = \{i(1) : 1 \leqslant i_1 \leqslant n_0\}$, $I^{(2)}_1 = \{i(1) : n_0+1 \leqslant i_1 \leqslant N_0\}$. Очевидно, що $I^{(1)}_k \cup I^{(2)}_k = I_k$, $I^{(1)}_k \cap I^{(2)}_k = \emptyset$, $k = 1,2,\ldots$.

Теорема 1. *Сукупність множин* $\left\{E_{i(k)}\left(\varepsilon_{i(k)}\right)\right\}$ *, які задаються згідно з (5), де* $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_{i(k)} > 0$ $(i(k) \in I_k, k = 1, 2, \ldots)$ *– послідовність множин абсолютної збіжності:*

1) підпослідовності $\left\{f^{(2s+1)}\right\}$ *підхідних дробів ГЛД (1), якщо*

$$\rho_{i(2k-1)}^{(\nu)} + (-1)^{3-\nu} \varepsilon_{i(2k-1)} = 1, \ \textit{де}\ i(2k-1) \in I_{2k-1}^{(\nu)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \nu = 1, 2;$$

2) підпослідовності $\left\{f^{(2s)}\right\}$ *підхідних дробів ГЛД (1), якщо*

$$\rho_{i(2k)}^{(\nu)} + (-1)^{3-\nu} \varepsilon_{i(2k)} = 1, \ \textit{де}\ i(2k) \in I_{2k}^{(3-\nu)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \nu = 1, 2;$$

3) послідовності $\left\{f^{(s)}\right\}$ *підхідних дробів ГЛД (1), якщо*

$$\rho_{i(k)}^{(\nu)} + (-1)^{3-\nu} \varepsilon_{i(k)} = 1, \ \textit{де}$$

a) $i(k) \in I_k^{(\nu)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2$,
або
b) $i(k) \in I_k^{(3-\nu)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2$.

При цьому для довільних s , $s = 1, 2, \ldots$ *справджуються нерівності:* $b_0 - 1 + \rho_0^{(1)} < f^{(2s+1)} < f^{(2s-1)}$ *у випадку 1);* $f^{(2s)} < f^{(2s+2)} < b_0 - 1 + \rho_0^{(2)}$ *у випадку 2);* $b_0 - 1 + \rho_0^{(1)} < f^{(s+1)} < f^{(s)}$ *у випадку 3a) і* $f^{(s)} < f^{(s+1)} < b_0 - 1 + \rho_0^{(2)}$ *у випадку 3b).*

Доведення. Зафіксуємо індекс s . Враховуючи, що s -й підхідний дріб $f^{(s)}$ ГЛД (1) дорівнює $b_0 - 1 + Q_0^{(s)}$, перетворимо його шляхом послідовної заміни залишків $Q_{i(p)}^{(s)}$ $\left(i(p) \in I_p, p = \overline{0, s}\right)$, такими рівними їм виразами залежно від мультиіндексів

$$Q_0^{(s)} = 1 + \sum_{i_1=1}^{n_0} \frac{c_{i(1)}}{\rho_{i(1)}^{(2)}} + \sum_{i_1=n_0+1}^{N_0} \frac{c_{i(1)}}{\rho_{i(1)}^{(1)}} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{n_0} \frac{c_{i(1)}/\rho_{i(1)}^{(2)}}{-1 + \dfrac{\rho_{i(1)}^{(2)}}{\rho_{i(1)}^{(2)} - Q_{i(1)}^{(s)}}} - \sum_{i_1=n_0+1}^{N_0} \frac{c_{i(1)}/\rho_{i(1)}^{(1)}}{1 + \dfrac{\rho_{i(1)}^{(1)}}{Q_{i(1)}^{(s)} - \rho_{i(1)}^{(1)}}},$$

$$Q_{i(p)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{p+1}=1}^{n_{i(p)}} \frac{c_{i(p+1)}}{\rho_{i(p+1)}^{(\nu)}} + \sum_{i_{p+1}=n_{i(p)}+1}^{N_{i(p)}} \frac{c_{i(p+1)}}{\rho_{i(p+1)}^{(3-\nu)}} + (-1)^{\nu} \times$$

$$\times \left(\sum_{i_{p+1}=1}^{n_{i(p)}} \frac{c_{i(p+1)}/\rho_{i(p+1)}^{(\nu)}}{(-1)^{3-\nu} + \dfrac{(-1)^{\nu} \rho_{i(p+1)}^{(\nu)}}{\rho_{i(p+1)}^{(\nu)} - Q_{i(p+1)}^{(s)}}} - \sum_{i_{p+1}=n_{i(p)}+1}^{N_{i(p)}} \frac{c_{i(p+1)}/\rho_{i(p+1)}^{(3-\nu)}}{(-1)^{\nu} + \dfrac{(-1)^{3-\nu} \rho_{i(p+1)}^{(3-\nu)}}{\rho_{i(p+1)}^{(3-\nu)} - Q_{i(p+1)}^{(s)}}} \right),$$

$$Q_{i(s)}^{(s)} = 1 + \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{i(s)}} \frac{c_{i(s+1)}}{\rho_{i(s+1)}^{(\nu)}} + \sum_{i_{s+1}=n_{i(s)}+1}^{N_{i(s)}} \frac{c_{i(s+1)}}{\rho_{i(s+1)}^{(3-\nu)}} +$$

$$+(-1)^{\nu}\left(\sum_{i_{s+1}=1}^{n_{i(s)}}\frac{c_{i(s+1)}/\rho_{i(s+1)}^{(\nu)}}{(-1)^{3-\nu}}-\sum_{i_{s+1}=n_{i(s)}+1}^{N_{i(s)}}\frac{c_{i(s+1)}/\rho_{i(s+1)}^{(3-\nu)}}{(-1)^{\nu}}\right),$$

де $i(p)\in I_p^{(\nu)}$, $p=\overline{1,s}$, $\nu=1,2$. В результаті таких перетворень підхідний дріб $f^{(s)}$ можна записати у вигляді

$$f^{(s)}=b_0-1+d_0+\sum_{i_1=1}^{N_0}\frac{c'_{i(1)}}{q_{i(1)}}+\frac{p_{i(1)}}{d_{i(1)}}+\ldots+\sum_{i_s=1}^{N_{i(s-1)}}\frac{c'_{i(s)}}{q_{i(s)}}+\frac{p_{i(s)}}{d_{i(s)}}+\sum_{i_{s+1}=1}^{N_{i(s)}}\frac{c'_{i(s+1)}}{q_{i(s+1)}}, \quad (8)$$

де $d_0=1+\sum\limits_{i_1=1}^{n_0}\frac{c_{i(1)}}{\rho_{i(1)}^{(2)}}+\sum\limits_{i_1=n_0+1}^{N_0}\frac{c_{i(1)}}{\rho_{i(1)}^{(1)}}$ і

$$\begin{cases} d_{i(k)}=(-1)^{\nu}\left(1+\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}}\frac{c_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(\nu)}}+\sum\limits_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}}\frac{c_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(3-\nu)}}-\rho_{i(k)}^{(3-\nu)}\right), \\ i(k)\in I_k^{(\nu)}, k=\overline{1,s}, \nu=1,2; \\ c'_{i(k)}=\frac{\left|c_{i(k)}\right|}{\rho_{i(k)}^{(\nu)}}, i(k)\in I_k^{(3-\nu)}, k=\overline{1,s+1}, \nu=1,2; \\ p_{i(k)}=\rho_{i(k)}^{(\nu)}, i(k)\in I_k^{(3-\nu)}, k=\overline{1,s}, \nu=1,2; \\ q_{i(k)}=(-1)^{\nu}, i(k)\in I_k^{(\nu)}, k=\overline{1,s+1}, \nu=1,2. \end{cases} \quad (9)$$

Розглянемо ГЛД

$$b_0-1+d_0+\sum_{i_1=1}^{N_0}\frac{c'_{i(1)}}{q_{i(1)}}+\frac{p_{i(1)}}{d_{i(1)}}+\ldots+\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{c'_{i(k)}}{q_{i(k)}}+\frac{p_{i(k)}}{d_{i(k)}}+\ldots \quad (10)$$

і позначимо через $\tilde{f}^{(s)}$ його s -й підхідний дріб. Із подання (8) випливає, що $f^{(s)}=\tilde{f}^{(2s+1)}$, $s=0,1,2,\ldots$. Тому дослідження збіжності ГЛД (1) зводиться до дослідження збіжності непарної частини ГЛД (10).

Залишки $(2s+1)$ -го підхідного дробу ГЛД (10) позначимо так:

$$U_{i(p)}^{(2s+1)}=d_{i(p)}+\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\frac{c'_{i(p+1)}}{W_{i(p+1)}^{(2s+1)}} \quad \left(i(p)\in I_p, p=\overline{0,s}\right),$$

$$W_{i(p)}^{(2s+1)}=q_{i(p)}+\frac{p_{i(p)}}{U_{i(p)}^{(2s+1)}} \quad \left(i(p)\in I_p, p=\overline{1,s}\right),$$

де $W_{i(s+1)}^{(2s+1)}=q_{i(s+1)}$, $i(s+1)\in I_{s+1}$. Між залишками підхідного дробу $f^{(s)}$ ГЛД (1) та $\tilde{f}^{(2s+1)}$ ГЛД (10) існують такі залежності:

$$U_{i(p)}^{(2s+1)}=(-1)^{\nu}\left(\rho_{i(p)}^{(\nu)}-Q_{i(p)}^{(s)}\right), \quad W_{i(p)}^{(2s+1)}=(-1)^{\nu}\left(\frac{\rho_{i(p)}^{(\nu)}}{Q_{i(p)}^{(s)}}-1\right)^{-1}, \quad (11)$$

$i(p)\in I_p^{(3-\nu)}$, $p=\overline{1,s}$, $\nu=1,2$.

Для різниці між двома підхідними дробами ГЛД (10) справджується формула $\tilde{f}^{(2m+1)} - \tilde{f}^{(2l+1)} =$

$$\sum_{i_1=1}^{N_{i(0)}} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} \cdots \sum_{i_l=1}^{N_{i(l-1)}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{l} c'_{i(k)} p_{i(k)}}{\prod\limits_{k=1}^{l} W_{i(k)}^{(2m+1)} W_{i(k)}^{(2l+1)} U_{i(k)}^{(2m+1)} U_{i(k)}^{(2l+1)}} \left(U_{i(l)}^{(2m+1)} - U_{i(l)}^{(2l+1)} \right), m > l. \tag{12}$$

Оскільки $\mathbf{c}_{i(k)} \in E_{i(k)} \left(\varepsilon_{i(k)}\right)$, то для залишків $Q_{i(p)}^{(s)}$ підхідного дробу $f^{(s)}$ ГЛД (1) справджуються оцінки (7). Враховуючи позначення (9), бачимо, що елементи $c'_{i(k)} > 0$, $p_{i(k)} > 0$ $(i(k) \in I_k, k = 1, 2, \ldots)$. Із співвідношень (11) випливає, що $W_{i(p)}^{(2m+1)} > 0$, $W_{i(p)}^{(2l+1)} > 0$, $U_{i(p)}^{(2m+1)} > 0$, $U_{i(p)}^{(2l+1)} > 0$, $i(p) \in I_p, p = \overline{1, l}$. Враховуючи формули (11), маємо

$$U_{i(l)}^{(2m+1)} - U_{i(l)}^{(2l+1)} = (-1)^{\nu} \left(Q_{i(l)}^{(m)} - Q_{i(l)}^{(l)} \right) = (-1)^{\nu} \sum_{i_{l+1}=1}^{N_{i(l)}} \frac{c_{i(l+1)}}{Q_{i(l+1)}^{(m)}},$$

$i(l) \in I_l^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$. Тоді правильними будуть такі оцінки:

$$(-1)^{\nu} \sum_{i_{l+1}=1}^{N_{i(l)}} \frac{c_{i(l+1)}}{Q_{i(l+1)}^{(m)}} < (-1)^{\nu} \left(\sum_{i_{l+1}=1}^{n_{i(l)}} \frac{c_{i(l+1)}}{\rho_{i(l+1)}^{(3-\nu)}} + \sum_{i_{l+1}=n_{i(l)}+1}^{N_{i(l)}} \frac{c_{i(l+1)}}{\rho_{i(l+1)}^{(\nu)}} \right), \tag{13.1}$$

$$(-1)^{\nu} \sum_{i_{l+1}=1}^{N_{i(l)}} \frac{c_{i(l+1)}}{Q_{i(l+1)}^{(m)}} > (-1)^{\nu} \left(\sum_{i_{l+1}=1}^{n_{i(l)}} \frac{c_{i(l+1)}}{\rho_{i(l+1)}^{(\nu)}} + \sum_{i_{l+1}=n_{i(l)}+1}^{N_{i(l)}} \frac{c_{i(l+1)}}{\rho_{i(l+1)}^{(3-\nu)}} \right), \tag{13.2}$$

$i(l) \in I_l^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$.

Приймемо у формулі різниці (12) $m = 2s - 1$, $l = 2r - 1$, $s > r \geqslant 1$. Врахувавши оцінки (13.1) та умови, які визначають множини (5), бачимо, що $\tilde{f}^{(4s-1)} < \tilde{f}^{(4r-1)}$ при $\rho_{i(2r-1)}^{(\nu)} + (-1)^{3-\nu} \varepsilon_{(2r-1)} = 1$, $i(2r-1) \in I_{2r-1}^{(\nu)}$, $r = 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2$. Оскільки $\tilde{f}^{(4s-1)} = f^{(2s-1)} = b_0 - 1 + Q_0^{(2s-1)} > b_0 - 1 + \rho_0^{(1)}$, то непарна частина ГЛД (1) збігається. Прийнявши у формулі (12) $m = 2s$, $l = 2r$, $s > r \geqslant 1$ та врахувавши оцінки (13.2) і умови, які визначають множини (5), бачимо, що $\tilde{f}^{(4s+1)} > \tilde{f}^{(4r+1)}$ при $\rho_{i(2r)}^{(\nu)} + (-1)^{3-\nu} \varepsilon_{(2r)} = 1$, $i(2r) \in I_{2r}^{(3-\nu)}$, $r = 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2$. Оскільки $\tilde{f}^{(4s+1)} = f^{(2s)} = b_0 - 1 + Q_0^{(2s)} < b_0 - 1 + \rho_0^{(2)}$, то парна частина ГЛД (1) збігається. Аналогічно доводиться пункт 3 на основі нерівностей (13) та умов, які визначають множини елементів (5) ГЛД (1). У кожному випадку зі збіжності монотонної послідовності підхідних дробів випливає її абсолютна збіжність. Теорема доведена.

Розглянемо ГЛД

$$\widehat{b}_0 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{\widehat{c}_{i(k)}}{1}, \tag{14}$$

елементи якого вважатимемо збуреними до відповідних елементів ГЛД (1), а сам дріб – збуреним до ГЛД (1).

Означення. Сукупність множин елементів

$$\{E_{i(k)}\}, E_{i(k)} \subset \mathbb{R}^{N_{i(k)}} \, (i(k) \in I_k, \ k=0,1,2,\ldots)$$

назвемо послідовністю множин абсолютної стійкості ГЛД (1), якщо:

1) $\{E_{i(k)}\}$ $(i(k) \in I_k, \ k=0,1,2,\ldots)$ є множинами збіжності ГЛД (1), (14), тобто з умов $\mathbf{c}_{i(k)}$, $\widehat{\mathbf{c}}_{\,i(k)} \in E_{i(k)}$ $(i(k) \in I_k, \ k=0,1,2,\ldots)$ випливає існування скінченних границь послідовностей відповідних підхідних дробів $\lim\limits_{s\to\infty} f^{(s)}$, $\lim\limits_{s\to\infty} \widehat{f}^{(s)}$;

2) для кожного ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ існує таке δ , $\delta \in \mathbb{R}_+$, що при всіх таких $\mathbf{c}_{i(k)}$, $\widehat{\mathbf{c}}_{\,i(k)} \in E_{i(k)}$ $(i(k) \in I_k, \ k=0,1,2,\ldots)$, що $\left|\widehat{c}_{i(k)j} - c_{i(k)j}\right| < \delta$, $j = \overline{1, N_{i(k)}}$ $(i(k) \in I_k, \ k=0,1,2,\ldots)$, виконуються нерівності $\left|\widehat{f}^{(s)} - f^{(s)}\right| < \varepsilon$, $s=1,2,\ldots$.

Нехай $\Delta b_0 = \widehat{b}_0 - b_0$, $\Delta c_{i(k)} = \widehat{c}_{i(k)} - c_{i(k)}$ $(i(k) \in I_k, k=1,2,\ldots)$, $\Delta Q^{(s)}_{i(p)} = \widehat{Q}^{(s)}_{i(p)} - Q^{(s)}_{i(p)}$ $\left(i(p) \in I_p, p=\overline{0,s}\right)$ – абсолютні похибки елементів b_0 , $c_{i(k)}$ і залишків $\Delta Q^{(s)}_{i(p)}$ s-го підхідного дробу ГЛД (1) відповідно. Для похибок $\Delta Q^{(s)}_{i(p)}$ справджуються такі рекурентні формули:

$$\Delta Q^{(s)}_{i(p)} = \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{1}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p+1)}} \left(\Delta c_{i(p+1)} - \frac{c_{i(p+1)}}{Q^{(s)}_{i(p+1)}} \Delta Q^{(s)}_{i(p+1)}\right), \tag{15.1}$$

$$\Delta Q^{(s)}_{i(p)} = \sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}} \frac{1}{Q^{(s)}_{i(p+1)}} \left(\Delta c_{i(p+1)} - \frac{\widehat{c}_{i(p+1)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(p+1)}} \Delta Q^{(s)}_{i(p+1)}\right) \tag{15.2}$$

$\left(i(p) \in I_p, p=\overline{0,s-1}\right)$, де $\Delta Q^{(s)}_{i(s)} = 0$, які є аналогом формул для абсолютних похибок залишків ІЛД [3]. Почергово використовуючи для похибок $\Delta Q^{(s)}_{i(2p)}$, $\Delta Q^{(s)}_{i(2p+1)}$ – формули (15.1), (15.2) відповідно, для абсолютної похибки s -го підхідного дробу ГЛД (1) отримаємо формулу

$$\Delta f^{(s)} = \widehat{f}^{(s)} - f^{(s)} =$$

$$= \Delta b_0 + Q^{(s)}_0 \sum_{l=1}^{s} (-1)^{l+1} \sum_{i_1=1}^{N_{i(0)}} q^{(s)}_{i(1)} \sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}} q^{(s)}_{i(2)} \cdots \sum_{i_{l-1}=1}^{N_{i(l-2)}} q^{(s)}_{i(l-1)} \sum_{i_l=1}^{N_{i(l-1)}} r^{(s)}_{i(l)} \Delta c_{i(l)}, \tag{16}$$

де $q^{(s)}_{i(k)} = \begin{cases} \dfrac{c_{i(k)}}{Q^{(s)}_{i(k-1)} Q^{(s)}_{i(k)}}, & k \text{ – непарне},\\[2ex] \dfrac{\widehat{c}_{i(k)}}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(k-1)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(k)}}, & k \text{ – парне}, \end{cases}$ $\quad r^{(s)}_{i(l)} = \begin{cases} \dfrac{1}{Q^{(s)}_{i(l-1)} \widehat{Q}^{(s)}_{i(l)}}, & l \text{ – непарне},\\[2ex] \dfrac{1}{\widehat{Q}^{(s)}_{i(l-1)} Q^{(s)}_{i(l)}}, & l \text{ – парне}. \end{cases}$

Теорема 2. *Нехай модулі абсолютних похибок елементів ГЛД (1) є рівномірно обмеженими зверху*

$$\left|\Delta c_{i(k)}\right| \leqslant \Delta \quad (i(k) \in I_k, k = 1, 2, \ldots),$$

$\rho_{i(k)}^{(\nu)}$ $(i(k) \in I_k, k = 0, 1, 2, \ldots)$; $\nu = 1, 2$, *– параметри, які визначають множини* $E_{i(k)}(0)$ *(5);* $\xi_k = \max\left\{\frac{1}{\rho_{i(k)}^{(1)}} \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{1}{\rho_{i(k+1)}^{(1)}}, i(k) \in I_k\right\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\{\eta_k\}$ *– послідовність дійсних додатних сталих така, що збігається ряд*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \xi_{l-1} \prod_{k=1}^{l-1} \eta_{k-1}. \tag{17}$$

Тоді сукупність множин $\left\{E_{i(k)}^*\right\}$, $E_{i(k)}^* = E_{i(k)}(0) \cap G_{i(k)}$, *де*

$$G_{i(k)} =$$

$$= \bigcup_{\nu=1}^{2} \left[\left\{\mathbf{x}_{i(k)} \in \mathbb{R}_{n_{i(k)}}^{N_{i(k)}} : \frac{1-\eta_k}{\eta_k} \sum_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{x_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(\nu)}} - \frac{1+\eta_k}{\eta_k} \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{x_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(1)}} \leqslant 1\right\} \cap\right.$$

$$\left\{\mathbf{x}_{i(k)} = \left(x_{i(k)\left(n_{i(k)}+1\right)}, x_{i(k)\left(n_{i(k)}+2\right)}, \ldots, x_{i(k)N_{i(k)}}\right) \in \mathbb{R}_{n_{i(k)}}^{N_{i(k)}-n_{i(k)}} :\right.$$

$$\left.\left.(-1)^{\nu+1} \sum_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{x_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(1)}} \geqslant \frac{(-1)^{\nu}}{2}\right\}\right] \quad (i(k) \in I_k, k = 0, 1, 2, \ldots),$$

є послідовністю множин абсолютної стійкості ГЛД (1).

Для модуля абсолютної похибки $\Delta f^{(s)}$ *справджується оцінка*

$$\left|\Delta f^{(s)}\right| \leqslant |\Delta b_0| + \Delta \rho_0^{(2)} \sum_{l=1}^{s} \xi_{l-1} \prod_{k=1}^{l-1} \eta_{k-1}.$$

Доведення. Визначимо оцінки для величин $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \left|q_{i(k+1)}^{(s)}\right|$ $(\, i(k) \in I_k, k = \overline{0, l-1}, l = \overline{1, s}\,)$. Припустимо, що k – парне. Позначимо $u_{i(k)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}}$, $v_{i(k)} = - \sum\limits_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}}$. У цьому випадку

$$\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \left|q_{i(k+1)}^{(s)}\right| = \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \frac{\left|c_{i(k+1)}\right|}{Q_{i(k)}^{(s)} Q_{i(k+1)}^{(s)}} = \frac{u_{i(k)} + v_{i(k)}}{1 + u_{i(k)} - v_{i(k)}} = f\left(u_{i(k)}, v_{i(k)}\right)$$

і задача зводиться до знаходження максимального значення функції $f(u,v) = \frac{u+v}{1+u-v}$ в області

$$D_{i(k)} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : u_{i(k)}^{(1)} \leqslant u \leqslant u_{i(k)}^{(2)}, v_{i(k)}^{(1)} \leqslant v \leqslant v_{i(k)}^{(2)}\right\},$$

де $u_{i(k)}^{(\nu)} = \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{n_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(3-\nu)}}$, $v_{i(k)}^{(\nu)} = -\sum\limits_{i_{k+1}=n_{i(k)}+1}^{N_{i(k)}} \frac{c_{i(k+1)}}{\rho_{i(k+1)}^{(3-\nu)}}$ $(i(k) \in I_k, k = 0,1,2,\ldots)$, $\nu = 1,2$. Враховуючи умови, які визначають множини (5), доходимо висновку про правильність нерівностей

$$(-1)^\nu \left(u_{i(k)}^{(\nu)} - v_{i(k)}^{(3-\nu)}\right) \leqslant (-1)^\nu \left(\rho_{i(k)}^{(\nu)} - 1\right) \quad (i(k) \in I_k, k = 0,1,2,\ldots), \quad \nu = 1,2.$$

Використовуючи методи математичного аналізу, неважко показати, що

$$\max_{(u,v)\in D_{i(k)}} \{f(u,v)\} = \begin{cases} \dfrac{u_{i(k)}^{(1)} + v_{i(k)}^{(2)}}{1 + u_{i(k)}^{(1)} - v_{i(k)}^{(2)}}, v_{i(k)}^{(2)} > \frac{1}{2}, \\ \dfrac{u_{i(k)}^{(2)} + v_{i(k)}^{(2)}}{1 + u_{i(k)}^{(2)} - v_{i(k)}^{(2)}}, v_{i(k)}^{(2)} < \frac{1}{2}, \\ 1, v_{i(k)}^{(2)} = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$(i(k) \in I_k, k = 0,1,2,\ldots)$. Враховуючи умови, які визначають множини $G_{i(k)}$, маємо $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \left|q_{i(k+1)}^{(s)}\right| \leqslant \eta_k$.

Аналогічно доводимо правильність оцінок $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}} \left|q_{i(k+1)}^{(s)}\right| \leqslant \eta_k$ для непарних значень k , оскільки елементи збуреного дробу також належать множинам $E_{i(k)}^*$.

Для величин $\sum\limits_{i_l=1}^{N_{i(l-1)}} r_{i(l)}^{(s)}$ справджуються оцінки $\sum\limits_{i_l=1}^{N_{i(l-1)}} r_{i(l)}^{(s)} \leqslant \frac{1}{\rho_{i(l-1)}^{(1)}} \sum\limits_{i_l=1}^{N_{i(l-1)}} \frac{1}{\rho_{i(l)}^{(1)}}$, $\left(i(l-1) \in I_{l-1}, l = \overline{1,s}\right)$. З формули (16) та отриманих оцінок випливає, що збіжність ряду (17) забезпечує виконання умови 2 означення стійкості.

Зі збіжності ряду (17) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \prod\limits_{k=1}^{l-1} \eta_{k-1}$ і розбіжність добутку $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1}$. З умови $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} = 0$ і теореми про збіжність ГЛД на основі фундаментальних нерівностей [4] доходимо висновку, що множини $E_{i(k)}^*$ є множинами збіжності ГЛД (1) та збуреного ГЛД (14). Теорема доведена.

---

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т 45. – N 1. – С. 11-15.

2. *Антонова Т. М.* Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів: Дис. ... канд фіз.-мат. наук. – Львів, 1996.
3. *Одноволова (Антонова) Т. Н.* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей//Докл. АН УССР. Сер.А. – 1984. – N 7. – С. 19-22.
4. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К., 1986.
5. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости типа Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей// Укр. мат. журнал. – 1989. – Т 41. – N 11. – С. 1553-1557.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. - М., 1985.
7. *Недашковський М. О.* Збіжність і обчислювальна стійкість гіллястих ланцюгових дробів з елементами, що задовільняють умовам типу Прінгсгейма. – В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. – К., 1978. – С. 43-44.
8. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. - М., 1983.
9. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbruchen. – Stuttgart:Teubner, 1957.
10. *William B. Jones and W. J. Thron.* Numerical Stability in Evaluating Continued Fractions// Mathematics of computation. – 1974. – Vol. 28. – N.127. – P. 795-810.

SETS OF CONVERGENCE AND STABILITY OF SOME SEQUENCES OF APPROXIMANTS OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS WITH REAL ELEMENTS

Volodymyr Hladun

[1]*Lviv Polytechnic National University,*
Bandery Str., 12 79013 Lviv, Ukraine

The article is devoted to analysis of the convergence and excitations stability of branched continued fractions (BCF) with variable number of branches and real elements. The multidimensional sets of absolute convergence of sequences $\{f^{(2s+1)}\}$, $\{f^{(2s)}\}$, $\{f^{(s)}\}$ of approximants of such BCF are established. The multidimensional sets of absolute excitations stability of such BCF are established by analysis of absolute errors of approximants.

Key words: branched continued fractions.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.2004
Прийнята до друку 03.11.2004