ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.59–76

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.59–76

УДК 517.95

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ СИСТЕМИ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Наталія ГУЗІЛЬ
Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто задачу без початкових умов для ультрапараболічної системи

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t).$$

Одержано умови існування та єдиності розв'язку у сенсі Лакса-Філіпса незалежно від його поведінки при $t \to -\infty$.

Ключові слова: ультрапараболічна система, задача Фур'є.

Рівняння вигляду $u_t - u_{xx} + xu_y = f(t,x,y)$, введене А.Н.Колмогоровим [1], виникає при моделюванні марківських дифузійних процесів, розсіюванні електронів, кінетичній теорії, в біології, теорії ймовірності. Такі рівняння називають ультрапараболічними або рівняннями з багатьма часами.

Задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь, які узагальнюють рівняння дифузії з інерцією А.Н.Колмогорова, досліджено в [2 - 8]. Властивості фундаментальних розв'язків таких рівнянь мають багато однакових властивостей з рівняннями, параболічними за Петровським [7].

Дослідженню мішаних задач для ультрапараболічних рівнянь присвячено праці [9 - 18]. У працях [9 - 12] отримано існування єдиного розв'язку першої крайової задачі, який має похідні за просторовими змінними з простору Гельдера [10 - 12], а також за допомогою інтегральних зображень і властивостей операторів Абеля досліджено першу крайову задачу для рівняння, в якому $L = \operatorname{sgn} x\, \partial^2/\partial x^2$ в області, яка містить гіперплощину $x = 0$.

У працях [19, 20] досліджено умови коректності мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь, у [21, 22] – задач в необмежених областях для слабко нелінійних ультрапараболічних рівнянь з двома часами. Зокрема, у праці [22] розглянуто задачу без початкових умов (так звану задачу Фур'є).

Ми розглянули задачу без початкових умов для слабко нелінійної ультрапараболічної системи (у випадку багатьох часів). Одержано умови існування та єдиності розв'язку в сенсі Лакса-Філіпса [23] у класі функцій, які не залежать від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbf{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, D – обмежена область в $\mathbf{R}^l$ з межею $\partial D \in C^1$.

Розглянемо в $Q_T = \Omega \times D \times (-\infty, T)$ систему рівнянь

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n}\left(B_{ij}(x,y,t)u_{x_i}\right)_{x_j} +$$

$$+C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t), \tag{1}$$

де $u = \mathrm{col}(u_1, \dots, u_m), g = \mathrm{col}(g_1, \dots, g_m), f = \mathrm{col}(f_1, \dots, f_m)$, A_i, B_{sj}, C – матриці порядку m, $i = 1, \dots, l$, $s, j = 1, \dots, n$.

Позначимо $Q_{t_1,t_2} = \{(x,y,t) : x \in \Omega, y \in D, t_1 < t < t_2\}$, $\forall t_1, t_2$, $-\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$, через $O = \Omega \times D$, а через $O_\tau = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$.

Припускаємо, що виконуються відповідно умови:

(A): елементи матриць A_i належать до простору $C(\bar{Q}_T)$, елементи матриць A_{iy_j} належать до простору $L^\infty_{loc}((-\infty, T]; L^\infty(O))$ для всіх $i, j = 1, \dots, l$;
$A_i(x,y,t) = A_i^*(x,y,t), i = 1, \dots, l$ для всіх $(x,y,t) \in Q_T$;
$\sum\limits_{i=1}^{l}(A_{iy_i}(x,y,t)\xi, \xi) \leqslant a_1|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$, $a_1 =$ const;

(B): елементи матриць B_{ij}, B_{ijy_s} належать до простору $L^\infty_{loc}((-\infty, T]; L^\infty(O))$ для всіх $i, j = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, l$,
для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)\xi_i, \xi_j) \geqslant b_0 \sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$ для всіх $\xi_i \in \mathbf{R}^m$, де $b_0 > 0$;

(C): елементи матриці C належать до простору $L^\infty_{loc}((-\infty, T]; L^\infty(O))$,
$(C(x,y,t)\xi, \xi) \geqslant c_0|\xi|^2$ майже для всіх $(x,y,t) \in Q_T$, для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m, c_0 =$ const;
елементи матриць C_{y_i} належать до простору $L^\infty_{loc}((-\infty, T]; L^\infty(O))$, $i = 1, \dots, l$;

$(\mathbf{G}_0)$: функції $(x,t) \to g(x,t,\xi)$ є вимірними на $\Omega \times (-\infty, T)$ для всіх $\xi \in \mathbf{R}^m$;
функції $\xi \to g(x,t,\xi)$ є неперервними в $\mathbf{R}^m$ майже для всіх $(x,t) \in \Omega \times (-\infty, T)$;
існують такі додатні сталі g_0, g_1, що $\forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^m$ і майже всіх $(x,t) \in \Omega \times (-\infty, T)$ виконуються нерівності

$$|g_i(x,t,\xi)| \leqslant g_1 \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^{p-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad p > 2,$$

$$(g(x,t,\xi) - g(x,t,\eta), \xi - \eta) \geqslant g_0|\xi - \eta|^p;$$

$(\mathbf{G}_1)$: функції $\xi \to g_{\xi_i}(x,t,\xi)$ є неперервними в $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ майже для всіх $(x,t) \in \Omega \times (-\infty, T)$ і для всіх $i = 1, \dots, m$;
$(G(x,t,\eta)\xi, \xi) \geqslant 0$ для майже всіх $(x,t) \in \Omega \times (-\infty, T)$ і для всіх $\eta, \xi \subset \mathbf{R}^m$,

де

$$G(x,t,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x,t,\eta)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x,t,\eta)}{\partial \eta_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m(x,t,\eta)}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial g_m(x,t,\eta)}{\partial \eta_m} \end{pmatrix}.$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbf{R}^m$.

Позначимо через S^1_τ множину точок поверхні $S_\tau = \Omega\times\partial D\times(-\infty,\tau)$, $\tau\in(-\infty,T]$, для яких

$$\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)\xi,\xi) < 0$$

для всіх $\xi\in\mathbf{R}^m\backslash\{0\}$, через S^2_τ множину тих точок поверхні S_τ, для яких

$$\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)\xi,\xi) \geqslant 0$$

для всіх $\xi\in\mathbf{R}^m$, де ν – зовнішня нормаль до S_τ.

Позначимо через $\Sigma_\tau = \partial\Omega\times D\times(-\infty,\tau)$, $\tau\in(-\infty,T]$, а через $\Sigma_{t_1,t_2} = \partial\Omega\times D\times(t_1,t_2)$.

Задамо для системи (1) крайові умови

$$u(x,y,t) = 0 \ \text{ на } \ S^1_T, \tag{2}$$

$$u(x,y,t) = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_T. \tag{3}$$

Говоритимемо, що система (1) задовольняє умову (S), якщо

(S): $\quad S^1_T = \Omega\times\Gamma_1\times(-\infty,T),\quad S^2_T = \Omega\times\Gamma_2\times(-\infty,T),\quad \Gamma_1\cup\Gamma_2 = \partial D.$

Позначимо через $S^i_{t_1,t_2} = \Gamma_i\times(t_1,t_2)$, $\quad i=1,2,\ \ \forall t_1,t_2 \quad -\infty < t_1 < t_2 \leqslant T$. Введемо простори

$$H^1_1(O) = \{u\in H^1(O), u|_{\Gamma_1} = 0, u|_{\partial\Omega\times D} = 0\},$$

$$H^1_1(Q_{t_1,T}) = \{u\in H^1(Q_{t_1,T}), u|_{S^1_{t_1,T}} = 0, u|_{\Sigma_{t_1,T}} = 0\}, t_1\in(-\infty,T).$$

Через $L^p_{loc}(\bar{Q}_T)$ позначимо простір функцій u, які належать до $L^p(Q_{t_1,T})$ для довільного $t_1\in(-\infty,T)$, а через $L^2_{loc}(\bar{S}^1_T)$ простір функцій u, які належать до $L^2(S^1_{t_1,T})$ для довільного $t_1\in(-\infty,T)$. Позначимо через $A_\nu(x,y,t)$ матрицю $\sum\limits_{i=1}^{l}A_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)$.

Розглянемо спочатку задачу в обмеженій області. Задамо для системи (1) крайові умови (2) на $S^1_{0,T}$ і (3) на $\Sigma_{0,T}$ та початкові умови

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y)\in O. \tag{4}$$

Означення 1. Функцію $u\in(C([0,T];L^2(O))\bigcap L^2((0,T);H^1_1(O))\bigcap L^p(Q_{0,T}))^m$, яка задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[-(u,v_t) + \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,y,t)u_{y_i},v) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u_{x_i},v_{x_j}) + (C(x,y,t)u,v) +$$

$$+(g(x,t,u),v)-(f(x,y,t),v)\Big]dxdydt+\int\limits_{O_T}(u,v)dxdy-\int\limits_{O_0}(u_0,v)dxdy=0 \qquad (5)$$

для всіх $v \in (H_1^1(Q_{0,T}) \bigcap L^p(Q_{0,T}))^m$ називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1) – (4) в області $Q_{0,T}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(G$_0$)**, **(G$_1$)**, **(S)**, $u_0 \in (H_1^1(O))^m$, $f \in (L^{p'}(Q_{0,T}))^m$, $p'=p/(p-1)$, $f_{y_i} \in (L^2(Q_{0,T}))^m, i=1,\ldots,l$, $f|_{S^1_{0,T}}=0$, $2<p\leqslant \frac{2(l+n)}{l+n-2}$ *якщо* $l+n>2$ *і* $p>2$, *якщо* $l+n=2$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) – (4) в області* $Q_{0,T}$.

Доведення. Побудуємо послідовність функцій

$$u^N(x,y,t)=\sum_{s,k=1}^{N} c_{s,k}^N(t)\theta_{s,k}(x,y), \quad N\in \mathbf{N},$$

$$\theta_{s,k}(x,y)=(\theta_{s,k,1}(x,y),\ldots,\theta_{s,k,m}(x,y)), \;\; \theta_{s,k,i}(x,y)=\varphi_{s,i}(x)\psi_{k,i}(y),$$

де $\{\varphi_s(x)\}$, $\varphi_s(x)=(\varphi_{s,1}(x),\ldots,\varphi_{s,m}(x))$ – база простору $(H_0^1(\Omega))^m$, а $\{\psi_k(y)\}$, $\psi_k=(\psi_{k1},\ldots,\psi_{km})$ – система, побудована за допомогою власних функцій задачі

$$\Delta\psi=\lambda\psi, \quad y\in D,$$

$$\psi\,|_{\Gamma_1}=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,|_{\Gamma_2}=0$$

у такий спосіб. Нехай ω_j є власна функція цієї задачі, яка відповідає власному значенню λ_j. Векторні функції вигляду $\psi_s(y)=(0,\ldots,\psi_j(y),\ldots,0)$, де ψ_j записана на s-му місці, лінійно незалежні при $s=1,\ldots,m$. Сукупність таких вектор-функцій для всіх $j=1,2,\ldots$ утворює систему $\{\psi_k(y)\}$. Крім того, $c_{s,k}^N$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\int\limits_{O}\Big[(u_t^N,\theta_{s,k})+\sum_{j=1}^{l}(A_j(x,y,t)u_{y_j}^N,\theta_{s,k})+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i}^N,(\theta_{s,k})_{x_j})+$$

$$+(Cu^N,\theta_{s,k})+(g(x,t,u^N),\theta_{s,k})-(f(x,y,t),\theta_{s,k})\Big]dxdy=0, \qquad (6)$$

$$c_{s,k}^N(0)=u_{0,s,k}^N, \quad s,k=1,\ldots,N, \qquad (7)$$

причому

$$u_0^N(x,y)=\sum_{s,k=1}^{N}u_{0,s,k}^N\theta_{s,k}(x,y), \quad \lim_{N\to\infty}||u_0^N-u_0||_{(H_1^1(O))^m}=0.$$

Зазначимо, що $\{\theta_{s,k}\}$ буде базою простору $(H_1^1(O))^m$.

На підставі теореми Каратеодорі [24] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (6), (7), визначений на деякому проміжку $[0, t_0]$. На підставі оцінок, одержаних нижче, можемо стверджувати, що $t_0 = T$. Помножимо кожне рівняння системи (6) відповідно на функцію $c^N_{s,k}e^{-\alpha t}$, де додатну сталу α виберемо пізніше, додамо їх за s, k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $[0, \tau]$, $\tau \in (0, T]$.

Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[(u^N_t, u^N) + \sum_{j=1}^{l}(A_j(x,y,t)u^N_{y_j}, u^N) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^N_{x_i}, u^N_{x_j}) +$$

$$+ (C(x,y,t)u^N, u^N) + (g(x,t,u^N), u^N) - (f(x,y,t), u^N)\Big] e^{-\alpha t}dxdydt = 0. \quad (8)$$

Перетворимо й оцінимо кожний доданок рівності (8) окремо, враховуючи відповідні умови теореми:

$$I_1 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^N_t, u^N)e^{-\alpha t}dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{O_\tau} |u^N|^2 e^{-\alpha\tau}dxdy - \frac{1}{2}\int\limits_{O_0} |u^N_0|^2 dxdy +$$

$$+ \frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^N|^2 e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$I_2 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{j=1}^{l}(A_j(x,y,t)u^N_{y_j}, u^N)e^{-\alpha t}dxdydt \geqslant -\frac{a_1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^N|^2 e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$I_3 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^N_{x_i}, u^N_{x_j})e^{-\alpha t}dxdydt \geqslant b_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^2 e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$I_4 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} (C(x,y,t)u^N, u^N)e^{-\alpha t}dxdydt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^N|^2 e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$I_5 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} (g(x,t,u^N), u^N)e^{-\alpha t}dxdydt \geqslant g_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^N|^p e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$I_6 \equiv -\int\limits_{Q_{0,\tau}} (f(x,y,t), u^N)e^{-\alpha t}dxdydt \geqslant -\frac{\delta_0}{p}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^N|^p e^{-\alpha t}dxdydt -$$

$$- \frac{1}{p'\delta_0^{p'/p}}\int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^{p'} e^{-\alpha t}dxdydt,$$

$\delta_0 > 0$.

Враховуючи оцінки інтегралів $I_1, \ldots, I_6$, з рівності (8) одержимо

$$\int\limits_{O_\tau} |u^N|^2 e^{-\alpha\tau} dxdy + \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[2b_0 \sum_{i=1}^{n} |u^N_{x_i}|^2 + (\alpha - a_1 + 2c_0)|u^N|^2 + \right.$$

$$\left. + \left(2g_0 - \frac{2\delta_0}{p} \right) |u^N|^p \right] e^{-\alpha t} dxdydt \leqslant \int\limits_{O_0} |u_0^N|^2 dxdy +$$

$$+ \frac{2}{p'\delta_0^{p'/p}} \int\limits_{Q_{0,\tau}} |f|^{p'} e^{-\alpha t} dxdydt, \quad \tau \in [0, T]. \tag{9}$$

Нехай $\delta_0 = \frac{g_0 p}{2}$, $\alpha = a_1 - 2c_0 + 1$. Тоді з нерівності (9) отримуємо

$$\int\limits_{O_\tau} |u^N|^2 dxdy \leqslant \mu_1, \quad \tau \in [0, T], \tag{10}$$

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |u^N|^2 dxdydt \leqslant \mu_2, \tag{11}$$

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |u^N|^p dxdydt \leqslant \mu_2, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^N_{x_i}|^2 dxdydt \leqslant \mu_2, \tag{13}$$

де сталі μ_1, μ_2 не залежать від N.

Помножимо кожне з рівнянь системи (6) відповідно на функцію $\lambda_k c^N_{s,k} e^{-\alpha t}$, замінимо $\lambda_k \psi_k$ на $\Delta_y \psi_k$, підсумуємо за s, k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $[0, \tau]$, $\tau \in (0, T]$.

Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[(u^N_t, \Delta_y u^N) + \sum_{j=1}^{l} (A_j(x,y,t) u^N_{y_j}, \Delta_y u^N) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij} u^N_{x_i}, \Delta_y u^N_{x_j}) + \right.$$

$$\left. + (C(x,y,t)u^N, \Delta_y u^N) + (g(x,t,u^N), \Delta_y u^N) - (f(x,y,t), \Delta_y u^N) \right] e^{-\alpha t} dxdydt = 0. \tag{14}$$

Перетворимо й оцінимо кожний доданок (14) окремо, врахувавши умови теореми. Одержимо

$$I_7 \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} (u^N_t, \Delta_y u^N) e^{-\alpha t} dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{O_\tau} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{y_j}|^2 e^{-\alpha\tau} dxdy + \frac{1}{2} \int\limits_{O_0} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{0y_j}|^2 dxdy -$$

$$-\frac{\alpha}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}|u_{y_i}^N|^2e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$I_8\equiv\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{Q_{0,\tau}}(A_iu_{y_i}^N,\Delta_yu^N)e^{-\alpha t}dxdydt=\int\limits_{\partial Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^{l}\Big[(A_iu_{y_i}^N,u_{y_j}^N)\cos(\nu,y_j)-$$

$$-\frac{1}{2}(A_iu_{y_j}^N,u_{y_j}^N)\cos(\nu,y_i)\Big]e^{-\alpha t}dSdt\sum_{i,j=1}^{l}\int\limits_{Q_{0,\tau}}(A_{iy_j}u_{y_i}^N,u_{y_j}^N)e^{-\alpha t}dxdydt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^{l}(A_{iy_i}u_{y_j}^N,u_{y_j}^N)e^{-\alpha t}dxdydt=I_8^1+I_8^2+I_8^3;$$

$$|I_8^2|\leqslant a_2l\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}|u_{y_i}^N|^2e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$|I_8^3|\leqslant\frac{1}{2}la_2\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}|u_{y_i}^N|^2e^{-\alpha t}dxdydt,$$

де

$$a_2=\max_{i,j}\operatorname*{ess\,sup}_{Q_{0,T}}\|A_{iy_j}(x,y,t)\|;$$

$$I_8^1=\frac{1}{2}\int\limits_{S_{0,\tau}^1}\sum_{j=1}^{l}\Big[\sum_{i=1}^{l}(A_i\cos(\nu,y_i)u_{y_j}^N,u_{y_j}^N)\Big]e^{-\alpha t}dxdtdS;$$

$$I_9\equiv\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i}^N,\Delta_yu_{x_j}^N)e^{-\alpha t}dxdydt=-\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{s=1}^{l}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_iy_s}^N,u_{x_jy_s}^N)e^{-\alpha t}dxdydt-$$

$$-\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{s=1}^{l}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ijy_s}u_{x_i}^N,u_{x_jy_s}^N)e^{-\alpha t}dxdydt=I_9^1+I_9^2;$$

$$I_9^1\leqslant-b_0\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{s=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_iy_s}^N|^2e^{-\alpha t}dxdydt;$$

$$|I_9^2|\leqslant\sum_{s=1}^{l}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^{n}\|B_{ijy_s}\|\,|u_{x_i}^N||u_{x_jy_s}^N|e^{-\alpha t}dxdydt\leqslant$$

$$\leqslant b_1\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left(\frac{nl}{2\delta_1}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^2+\frac{n\delta_1}{2}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_iy_j}^N|^2\right)e^{-\alpha t}dxdydt,$$

де

$$b_1 = \max_{s,i,j} \operatorname*{ess\,sup}_{Q_{0,T}} \| B_{ijy_s}(x,y,t) \|, \quad \delta_1 > 0;$$

$$I_{10} \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} (Cu^N, \Delta_y u^N) e^{-\alpha t} dxdydt = -\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} (Cu^N_{y_i}, u^N_{y_i}) e^{-\alpha t} dxdydt -$$

$$-\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} (C_{y_i} u^N, u^N_{y_i}) e^{-\alpha t} dxdydt = I^1_{10} + I^2_{10};$$

$$I^1_{10} \leqslant -c_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha t} dxdydt;$$

$$|I^2_{10}| \leqslant c_1 \int\limits_{Q_{0,\tau}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{y_i}|^2 + \frac{l}{2} |u^N|^2 \right] e^{-\alpha t} dxdydt,$$

де

$$c_1 = \max_i \operatorname*{ess\,sup}_{Q_{0,T}} \| C_{y_i}(x,y,t) \|;$$

$$I_{11} \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} (g(x,t,u^N), \Delta_y u^N) e^{-\alpha t} dxdydt = \int\limits_{S_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} (g(x,t,u^N), u^N_{y_i} \cos(\nu, y_i)) e^{-\alpha t} dxdtdS -$$

$$-\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{s=1}^{l} \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial g_i}{\partial u^N_j} u^N_{jy_s}, u^N_{iy_s} \right) e^{-\alpha t} dxdydt \leqslant 0;$$

$$I_{12} \equiv \int\limits_{Q_{0,\tau}} (f, \Delta_y u^N) e^{-\alpha t} dxdydt = \int\limits_{S^1_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} (f, u^N_{y_i} \cos(\nu, y_i)) e^{-\alpha t} dxdtdS -$$

$$-\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} (f_{y_i}, u^N_{y_i}) e^{-\alpha t} dxdydt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} |f_{y_i}|^2 e^{-\alpha t} dxdydt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha t} dxdydt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_7, \dots, I_{12}$, з рівності (14) одержимо нерівність

$$\int\limits_{O_\tau} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha\tau} dxdy + (\alpha - 3a_2 l + 2c_0 - c_1 - 1) \int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} |u^N_{y_i}|^2 e^{-\alpha t} dxdydt +$$

$$+(2b_0 - b_1 n\delta_1)\int\limits_{Q_{0,\tau}} \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i y_j}|^2 e^{-\alpha t}dxdydt \leqslant \int\limits_{O_0}\sum_{i=1}^{l}|u^N_{0,y_i}|^2 dxdy+ \tag{15}$$

$$+\frac{b_1 nl}{\delta_1}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^2 dxdydt + c_1 l\int\limits_{Q_{0,\tau}}|u^N|^2 e^{-\alpha t}dxdydt + \int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}|f_{y_i}|^2 e^{-\alpha t}dxdydt.$$

Нехай $\delta_1 = \frac{b_0}{b_1 n}$, а α виберемо з рівності $\alpha - 3a_2 l + 2c_0 - c_1 - 1 = 1$. Використовуючи (11), (13), з (15) отримуємо оцінки

$$\int\limits_{O_\tau}\sum_{j=1}^{l}|u^N_{y_j}|^2 dxdy \leqslant \mu_3, \qquad \tau\in[0,T], \tag{16}$$

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\sum_{j=1}^{l}|u^N_{y_j}|^2 dxdydt \leqslant \mu_4, \tag{17}$$

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i y_j}|^2 dxdydt \leqslant \mu_4, \tag{18}$$

де сталі μ_3, μ_4 не залежать від N.

На підставі оцінок (10)-(13), (16)-(18) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$ така, що

$u^{N_k}\to u$ $\quad *-$слабко в $(L^\infty((0,T);H^1_1(O)))^m$,
$u^{N_k}\to u$ $\quad$ слабко в $(L^p(Q_{0,T}))^m$,
$u^{N_k}(\cdot,T)\to\xi$ $\quad$ слабко в $(L^2(O))^m$ при $k\to\infty$.

Крім того, згідно з умовою $(\mathbf{G}_0)$ і (12)

$$\int\limits_{Q_{0,T}}|g(x,t,u^N)|^{p'}dxdydt \leqslant \mu_5, \tag{19}$$

причому μ_5 не залежить від N.

Тоді можемо вважати, що $g(\cdot,\cdot,u^{N_k})\to z$ слабко в $(L^{p'}(Q_{0,T}))^m$ при $k\to\infty$.

Помножимо рівняння системи (6) (записані для N_k) відповідно на функції $z^{N_{k_0}}_{k,s}\in C^1([0,T])$, додамо їх за k,s від 1 до N_{k_0} і проінтегруємо по проміжку $[0,T]$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\left[(-u^{N_k}, v_t^{N_{k_0}}) + \left(\sum_{j=1}^{l}A_j u^{N_k}_{y_j} - \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^{N_k}_{x_i})_{x_j} + C(x,y,t)u^{N_k} + g(x,t,u^{N_k}) -\right.\right.$$

$$\left.\left. -f(x,y,t), v^{N_{k_0}}\right)\right]dxdydt + \int\limits_{O_T}(u^{N_k}, v^{N_{k_0}})dxdy - \int\limits_{O_0}(u_0^{N_k}, v^{N_{k_0}})dxdy = 0, \tag{20}$$

де $v^{N_{k_0}}(x,y,t)=\sum\limits_{s,k=1}^{N_{k_0}} z_{s,k}^{N_{k_0}}(t)\theta_{s,k}(x,y)$.

Зазначимо, що множина функцій $\{v^{N_{k_0}}\}$ є щільною в $(H_1^1(Q_{0,T})\bigcap L^p(Q_{0,T}))^m$. Тому, перейшовши до границі в (20), спочатку при $k\to\infty$, а потім при $k_0\to\infty$, одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[-(u,v_t)+\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,y,t)u_{y_i},v)+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i},v_{x_j})+(C(x,y,t)u,v)+$$

$$+(z,v)-(f(x,y,t),v)\Big]dxdydt+\int\limits_{O_T}(\xi,v)dxdy-\int\limits_{O_0}(u_0,v)dxdy=0 \qquad (21)$$

правильну для довільної $v\in(H_1^1(Q_{0,T})\bigcap L^p(Q_{0,T}))^m$.

З (21) випливає, що u є розв'язком системи (1) в сенсі розподілів.

Отже,

$$u_t=-\sum_{i=1}^{l}A_i(x,y,t)u_{y_i}+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j}-C(x,y,t)u-g(x,t,u)+f(x,y,t),$$

звідки $u_t\in(L^{p'}(Q_{0,T})+L^2((0,T);(H_1^1(O))^*))^m$.

Оскільки $u\in(L^p(Q_{0,T})\bigcap L^2((0,T);H_1^1(O)))^m$, то згідно з теоремою 1.17 [25] $u\in(C([0,T];L^2(O)))^m$ і правильна формула

$$\int\limits_{Q_T}(u,u_t)dxdydt=\frac{1}{2}\int\limits_{O_T}|u|^2dxdy-\frac{1}{2}\int\limits_{O_0}|u|^2dxdy.$$

З (21) випливає, що $u(x,y,T)=\xi(x,y)$. Крім того, на $S_{0,T}^1$ виконується рівність $u(x,y,t)=0$, а також $u(x,y,t)=0$ на $\Sigma_{0,T}$.

Доведемо, що $z=g(\cdot,\cdot,u)$.

Для цього розглянемо послідовність $\{\sigma_k\}$, де

$$0\leqslant\sigma_k=\int\limits_{Q_{0,T}}(g(x,t,u^{N_k})-g(x,t,v),u^{N_k}-v)e^{-\gamma t}dxdydt=$$

$$=\int\limits_{Q_{0,T}}(g(x,t,u^{N_k}),u^{N_k})e^{-\gamma t}dxdydt-\int\limits_{Q_{0,T}}(g(x,t,u^{N_k}),v)e^{-\gamma t}dxdydt-$$

$$-\int\limits_{Q_{0,T}}(g(x,t,v),u^{N_k}-v)e^{-\gamma t}dxdydt,$$

$v\in(H_1^1(Q_{0,T})\bigcap L^p(Q_{0,T}))^m,\quad\gamma>0.$

Використовуючи (6), (7), одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} (g(x,t,u^{N_k}),u^{N_k})e^{-\gamma t}dxdydt = \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[(f,u^{N_k}) - \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^{N_k}_{x_i},u^{N_k}_{x_j})+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(A_{iy_i}u^{N_k},u^{N_k}) - \frac{\gamma}{2}|u^{N_k}|^2 - (Cu^{N_k},u^{N_k})\Big]e^{-\gamma t}dxdydt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{O_T}|u^{N_k}|^2e^{-\gamma T}dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{O_0}|u_0^{N_k}|^2dxdy - \frac{1}{2}\int\limits_{S^2_{0,T}}(A_\nu u^{N_k},u^{N_k})e^{-\gamma t}dS.$$

Оскільки на підставі умов **(A)** і **(C)** елементи матриць A_{iy_i}, C належать до простору $L^\infty(Q_{0,T})$, то існують такі сталі a^0 і c_1, що $|\sum\limits_{i=1}^{l}(A_{iy_i}\eta,\eta)| \geqslant a^0|\eta|^2$, $(C\eta,\eta) \leqslant c_1|\eta|^2$ для всіх $\eta \in \mathbf{R}^m$ і майже всіх $(x,y,t) \in Q_{0,T}$.

Тоді, вибравши $\frac{\gamma}{2} \geqslant -\frac{1}{2}c_1 + a^0$, одержуємо

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty}\sup\sigma_k \leqslant \int\limits_{Q_{0,T}}\Big[(f,u) - \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i},u_{x_j}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(A_{iy_i}u,u) - \frac{\gamma}{2}(u,u)-$$

$$-(Cu,u)\Big]e^{-\gamma t}dxdydt - \frac{1}{2}\int\limits_{O_T}|u|^2e^{-\gamma T}dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{O_0}|u_0|^2dxdy- \tag{22}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{S^2_{0,T}}(A_\nu u,u)e^{-\gamma t}dS - \int\limits_{Q_{0,T}}\Big[(z,v) + (g(x,t,v),u-v)\Big]e^{-\gamma t}dxdydt.$$

Запишемо (21) для $v = ue^{-\gamma t}$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{O_T}|u|^2e^{-\gamma T}dxdy+\int\limits_{Q_{0,T}}\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}(A_{iy_i}u,u)+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u_{x_i},u_{x_j})+(Cu,u)+\frac{\gamma}{2}(u,u)+(z,v)-$$

$$-(f,u)\Big]e^{-\gamma t}dxdydt - \frac{1}{2}\int\limits_{O_0}|u_0|^2dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{S^2_{0,T}}(A_\nu u,u)e^{-\gamma t}dS = 0. \tag{23}$$

Додавши (22) і (23), одержимо нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}}(z - g(x,t,v),u-v)e^{-\gamma t}dxdydt \geqslant 0,$$

правильну $\forall v \in (L^p(Q_{0,T}))^m$.
Виберемо $v = u - \lambda w$, де $w \in (L^p(Q_{0,T}))^m$, $\lambda > 0$.
Тоді

$$\int\limits_{Q_{0,T}} (z - g(x,t,u-\lambda w), w)e^{-\gamma t}dxdydt \geqslant 0.$$

Спрямувавши $\lambda \to +0$, отримуємо, що $z = g(x,t,u)$.

Отже, існує узагальнений розв'язок задачі (1)- (4).

Доведемо єдиність розв'язку. Припустимо, що існують два розв'язки u^1 і u^2 задачі (1) - (4). Тоді функція $u = u^1 - u^2$ задовольнятиме рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-(u,v_t) + \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,y,t)u_{y_i}, v) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u_{x_i}, v_{x_j}) +$$

$$+(C(x,y,t)u,v) + (g(x,t,u^1) - g(x,t,u^2),v)\Big]dxdydt + \int\limits_{O_T}(u,v)dxdy = 0 \qquad (24)$$

для всіх $v \in (H_1^1(Q_{0,T}) \bigcap L^p(Q_{0,T}))^m$.

Виберемо в (24) $v(x,y,t) = u(x,y,t)e^{-\gamma t}$, де додатну сталу γ виберемо з умови $\gamma - a_1 + 2c_0 > 0$. Тоді, перетворивши й оцінивши кожен доданок рівності (24), враховуючи умови **(A)**, **(C)**, **(G$_0$)**, **(B)** теореми, матимемо

$$\int\limits_{O_T} |u|^2 e^{-\gamma\tau}dxdy + \int\limits_{Q_{0,T}} \Big[2b_0\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2 + (\gamma - a_1 + 2c_0)|u|^2 + 2g_0|u|^p\Big]e^{-\gamma t}dxdydt \leqslant 0.$$

З цієї нерівності випливає, що $u(x,y,t) = 0$ майже всюди в $Q_{0,T}$. Теорему доведено.

Розглянемо задачу (1) - (3) в необмеженій області Q_T. Подамо означення сильного [23] розв'язку цієї задачі.

Означення 2. Сильним розв'язком задачі (1) – (3) називатимемо функцію u, яка є границею в просторі

$$W = (C((-\infty,T];L^2(O)) \cap L^p_{loc}((-\infty,T];L^p(O)))^m$$

послідовності функцій $\{u^k\}$ таких, що для всіх $k \in \mathbf{N}$

$u^k \in (C((-\infty,T];L^2(O)) \cap L^2_{loc}((-\infty,T];H_1^1(O)) \cap L^p_{loc}((-\infty,T];L^p(O)))^m$, $i = 1,\ldots,n$,

задовольняють рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[-(u^k,v_t) + \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,y,t)u^k_{y_i}, v) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^k_{x_i}, v_{x_j}) + (C(x,y,t)u^k, v) +$$

$$+(g(x,t,u^k),v)-(f^k(x,y,t),v)\Big]dxdydt+\int\limits_{O_T}(u^k,v)dxdy-\int\limits_{O_{t_1}}(u^k,v)dxdy=0$$

для всіх $v\in(H_1^1(Q_{t_1,T})\bigcap L^p(Q_{t_1,T}))^m$, $\forall t_1\quad -\infty<t_1<T$, де послідовність $\{f^k\}$ збіжна до функції f у просторі $(L^{p'}_{loc}((-\infty,T];L^{p'}(O)))^m$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(G$_0$)**, **(G$_1$)**, **(S)**, $f\in(L^{p'}_{loc}((-\infty,T];L^{p'}(O)))^m$, $\quad 2<p\leqslant\frac{2(l+n)}{l+n-2}$, *якщо* $l+n>2$, $2c_0-a_1\geqslant 0$. *Тоді існує единий сильний розв'язок задачі (1) - (3).*

Доведення. В області $Q_{T-k,T}$ розглянемо систему

$$A(u)=F^k \tag{25}$$

з крайовими умовами

$$u|_{S^1_{T-k,T}}=0 \tag{26}$$

$$u|_{\Sigma_{T-k,T}}=0 \tag{27}$$

і початковими умовами

$$u|_{t=T-k}=0, \tag{28}$$

де

$$F^k(x,y,t)=\begin{cases} f^k(x,y,t), & (x,y,t)\in Q_{T-k,T},\\ 0, & (x,y,t)\in Q_{-\infty,T-k},\end{cases}$$

а $f^k\in(L^2_{loc}((-\infty,T];H_1^1(O)))^m$ і $\{f^k\}$ збігається до функції f у просторі $(L^{p'}_{loc}((-\infty,T];L^{p'}(O)))^m$.

На підставі теореми 1 існує узагальнений розв'язок u^k задачі (25) – (28). Продовжимо функцію u^k нулем на область $Q_{-\infty,T-k}$. Нехай k пробігає множину натуральних чисел. Розглянемо послідовність функцій u^k. Тоді ці функції задовольняють рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}}\Big[-(u^k,v_t)+\sum_{j=1}^{l}(A_ju^k_{y_j},v)+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}u^k_{x_i},v_{x_j})+(Cu^k,v)+(g(x,t,u^k),v)-$$

$$-(F^k(x,y,t),v)\Big]dxdydt+\int\limits_{O_T}(u^k,v)dxdy-\int\limits_{O_{t_1}}(u^k,v)dxdy=0 \tag{29}$$

для довільної функції $v\in(L^p_{loc}((-\infty,T];L^p(O)))^m$ і довільного t_1, $\ t_1<T$.

Розглянемо рівності (29) для u^m й u^k, віднімемо їх, позначимо $u^{m,k}=u^m-u^k$. Приймемо, що $v=(u^m-u^k)\eta$, $\ m,k\in\mathbf{N}$, де

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t_0\leqslant t\leqslant T,\\ (\frac{t-t_1}{t_0-t_1})^\alpha, & t_1\leqslant t<t_0,\\ 0, & t<t_1,\end{cases}$$

а $\alpha = \left[\frac{p}{p-2}\right] + 1$. Тоді $\forall t_1 \in (-\infty, T)$, для m, k більших від $|t_1|$, врахувавши, що $\eta(t_1) = 0$, одержуємо рівність

$$\int\limits_{O_T} (u^{m,k}, u^{m,k}\eta(t))dxdy + \int\limits_{Q_{t_1,T}} \Bigg[-(u^{m,k}, u_t^{m,k}\eta(t)) - |u^{m,k}|^2\eta'(t) +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{l} A_j u_{y_j}^{m,k}, u^{m,k}\eta(t)\right) + \left(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} u_{x_i}^{m,k}, u_{x_j}^{m,k}\eta(t)\right) + (Cu^{m,k}, u^{m,k}\eta(t)) +$$

$$+((g(x,t,u^m) - g(x,t,u^k)), u^{m,k}\eta(t))\Bigg] dxdydt = 0. \qquad (30)$$

Оцінивши кожен доданок рівності (30) окремо (цілком аналогічно як (8) з урахуванням умови $(\mathbf{G}_0)$), отримуємо нерівність

$$\int\limits_{O_T} |u^{m,k}|^2 dxdy - \int\limits_{Q_{t_1,T}} |u^{m,k}|^2\eta'(t)dxdydt + (2c_0 - a_1)\int\limits_{Q_{t_1,T}} |u^{m,k}|^2\eta(t)dxdydt +$$

$$+2b_0 \int\limits_{Q_{t_1,T}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{m,k}|^2\eta(t)dxdydt + 2g_0 \int\limits_{Q_{t_1,T}} |u^{m,k}|^p\eta(t)dxdydt \leqslant 0. \qquad (31)$$

Крім того,

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} |u^{m,k}|^2\eta'(t)dxdydt \leqslant \frac{2\delta}{p}\int\limits_{Q_{t_1,T}} |u^{m,k}|^p\eta(t)dxdydt + \mu(\delta)\int\limits_{Q_{t_1,T}} \left|\frac{\eta'(t)}{\eta(t)^{2/p}}\right|^r dxdydt,$$

де $r = \frac{p}{p-2}$.

Тоді нерівність (31) матиме такий вигляд:

$$\int\limits_{O_T} |u^{m,k}|^2 dxdy + \left(2g_0 - \frac{2\delta}{p}\right)\int\limits_{Q_{t_1,T}} |u^{m,k}|^p\eta(t)dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \mu(\delta)\int\limits_{Q_{t_1,T}} \frac{|\eta'(t)|^{p/(p-2)}}{|\eta(t)|^{2/(p-2)}} dxdydt, \qquad (32)$$

оскільки за умовою теореми $2c_0 - a_1 \geqslant 0$. Виберемо $\delta = (pg_0)/2$. Легко бачити, що права частина нерівності (32) може бути оцінена величиною $\mu_6(t_0 - t_1)^{1-\frac{p}{p-2}}$ і оскільки $\frac{p}{p-2} > 1$, то може бути зроблена як завгодно малою за рахунок вибору t_1.

Отже, послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна в просторах $(L^p(Q_{t_1,T}))^m$, $(C([t_1,T], \ L^2(O)))^m$ для довільного $t_1 \in (-\infty, T)$. Нехай функція u є границею послідовності u^k у просторі W. Оскільки послідовність F^k збіжна до функції f

у просторі $(L^{p'}_{loc}((-\infty, T]; L^{p'}(O)))^m$, то згідно з означенням функція u є сильним розв'язком задачі (1) – (3).

Доведемо єдиність сильного розв'язку задачі (1) - (3). Припустимо, що існують два сильні розв'язки u^1 і u^2 цієї задачі. Згідно з означенням сильного розв'язку u^i, $i = 1, 2$ є границею послідовності $\{u^{i,k}\}$ у просторі W при $k \to +\infty$, де $u^{i,k}$ задовольняють рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[-(u^{i,k}, v_t) + \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,y,t)u^{i,k}_{y_i}, v) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^{i,k}_{x_i}, v_{x_j}) +$$

$$+(C(x,y,t)u^{i,k}, v) + (g(x,t,u^{i,k}), v) - (f^{i,k}(x,y,t), v)\Big] dxdydt + \tag{33}$$

$$+\int\limits_{O_T}(u^{i,k}, v)dxdy - \int\limits_{O_{t_1}}(u^{i,k}, v)dxdy = 0, \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbf{N}$$

для всіх $v \in (H^1_1(Q_{t_1,T}) \cap L^p(Q_{t_1,T}))^m, \forall t_1 \quad -\infty < t_1 < T$, а послідовності $\{f^{i,k}\}$ збігаються до функції f у просторі $(L^{p'}_{loc}((-\infty, T]; L^{p'}(O)))^m$.

Віднімемо рівність (33), записану для $u^{2,k}$, від рівності (33), записаної для $u^{1,k}$. Приймемо, що $v = (u^{2,k} - u^{1,k})\eta$. Тоді матимемо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big[-|u^{2,k} - u^{1,k}|^2\eta'(t) - \sum_{i=1}^{l}(A_{iy_i}(u^{2,k} - u^{1,k}), u^{2,k} - u^{1,k})\eta(t) +$$

$$+2\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(u^{2,k} - u^{1,k})_{x_i}, (u^{2,k} - u^{1,k})_{x_j}\eta(t)) + 2(C(x,y,t)(u^{2,k} - u^{1,k}), u^{2,k} - u^{1,k})\eta(t) +$$

$$+2(g(x,t,u^{2,k}) - g(x,t,u^{1,k}), u^{2,k} - u^{1,k})\eta(t)\Big] dxdydt +$$

$$+\int\limits_{S^2_{t_1,T}}(A_\nu(x,y,t)(u^{2,k} - u^{1,k}), u^{2,k} - u^{1,k})\eta(t)dS +$$

$$+\int\limits_{O_T}|u^{2,k} - u^{1,k}|^2 dxdy = 2\int\limits_{Q_{t_1,T}}(f^{2,k} - f^{1,k}, u^{2,k} - u^{1,k})\eta(t)dxdydt. \tag{34}$$

З (34) цілком аналогічно як з (30) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{O_T}|u^{2,k} - u^{1,k}|^2 dxdy + \left(2g_0 - \frac{4\delta}{p}\right)\int\limits_{Q_{t_1,T}}|u^{2,k} - u^{1,k}|^p\eta(t)dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \mu(\delta) \int\limits_{Q_{t_1,T}} \frac{|\eta'(t)|^{p/(p-2)}}{|\eta(t)|^{2/(p-2)}} dxdydt + \mu(\delta) \int\limits_{Q_{t_1,T}} |f^{2,k} - f^{1,k}|^{p'} \eta(t) dxdydt. \quad (35)$$

Нехай $\delta = (pg_0)/4$. Задамо $\varepsilon > 0$ і виберемо t_1 таким, що

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \frac{|\eta'(t)|^{p/(p-2)}}{|\eta(t)|^{2/(p-2)}} dxdydt < \varepsilon.$$

На підставі нерівності Мінковського маємо, що

$$\|f^{2,k} - f^{1,k}\|_{(L^{p'}(Q_{t_1,T}))^m} \leqslant \|f^{2,k} - f\|_{(L^{p'}(Q_{t_1,T}))^m} + \|f^{1,k} - f\|_{(L^{p'}(Q_{t_1,T}))^m}.$$

Оскільки кожна з послідовностей $\{f^{i,k}\}$ збіжна до функції f у просторі $(L^{p'}(Q_{t_1,T}))^m$, то існує таке $k_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, що для всіх $k > k_0$

$$\|f^{i,k} - f\|_{(L^{p'}(Q_{t_1,T}))^m} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1/p'}, \quad i = 1, 2.$$

Тоді з (35) одержуємо нерівність

$$\|u^{2,k} - u^{1,k}\|_{(C([t_1,T];L^2(O)))^m} < \sqrt{\mu(\delta)\varepsilon}. \quad (36)$$

Використаємо очевидну нерівність

$$\|u^2 - u^1\|_{(C([t_1,T];L^2(O)))^m} \leqslant \|u^{2,k} - u^2\|_{(C([t_1,T];L^2(O)))^m} +$$

$$+\|u^{2,k} - u^{1,k}\|_{(C([t_1,T];L^2(O)))^m} + \|u^{1,k} - u^1\|_{(C([t_1,T];L^2(O)))^m}. \quad (37)$$

Оскільки послідовності $\{u^{i,k}\}$ збігаються відповідно до функцій u^i у просторі $(C([t_1,T]; L^2(O)))^m$, то існує таке $k_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $k_1 \geqslant k_0$, що для всіх $k > k_1$

$$\|u^{i,k} - u^i\|_{(C([t_1,T];L^2(O)))^m} < \sqrt{\mu(\delta)\varepsilon}, \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

На підставі (36) і (38) з (37) одержуємо оцінку

$$\|u^2 - u^1\|_{(C([t_1,T];L^2(O)))^m} < 3\sqrt{\mu(\delta)\varepsilon}.$$

Враховуючи довільність чисел t_1 і ε, з останньої оцінки отримуємо, що $u^1(x,t) = u^2(x,t)$ майже всюди в Q_T.

Теорему доведено.

---

1. *Kolmogorov A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – Vol. 35. – P. 116-117.

2. *Дронь В. С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Науковий вісник Чернів. ун-ту. – Сер. матем. – 2000. – Вип. 76. – С. 32-42.
3. *Малицька Г. П.* Про структуру фундаментальних розв'язків задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією //Вісник націон. ун-ту "Львівська політехніка". – Сер. прикладна матем. – 2000. – N 411. – С. 221-228.
4. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь // Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50. – N 11.– С. 1482-1496.
5. *Івасишен С. Д., Тичинська Л. М., Ейдельман С. Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь другого порядку // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та тех. науки. – 1990. – N 5. – С. 6-8.
6. *Малицкая А. П.* Построение фундаментальных решений некоторых ультрапараболических уравнений высокого порядка// Укр. матем. журн. – 1985. – Т. 37 – N 6. – С. 713-719.
7. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11. – N 7. – С. 1316-1331.
8. *Малицька Г. П.* Про принцип максимуму для ультрапараболічних рівнянь //Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – N 2. – С. 195-201.
9. *Терсенов С. А.* О предельных значениях решений ультрапараболических уравнений на многообразиях вырождения. // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 299. – N 5. – С. 1070-1075.
10. *Син Донха З.* Оценки потенциалов для ультрапараболического уравнения // Матем. моделиров. механики сплошных сред (Динамика сплошной среды). – Новосибирск, 1987. – Вып.79. – С. 108-117.
11. *Терсенов С. А.* О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения // Матем. сборник. – 1987. – Т. 133 (175). – N 4 (8). – С. 539-555.
13. *Орлова С. А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сибирск. матем. журн. – 1990. – Т. 31. – N 6. – С. 211-215.
14. *Паскалев Г. П.* Об исследовании одной краевой задачи для ультрапараболического уравнения с постоянными коэффициентами вариационным методом // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28. – N 9. – С. 1640-1642.
15. *Пятков С. Г.* Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения// Некласические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск, 1990. – С. 182-197.
16. *Амиров Ш.* Смешанная задача для ультрапараболического уравнения в ограни-

ченной области // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск, 1984. – С. 173-179.

17. *Улукназаров М. Ж.* Решение одной краевой задачи для многомерного уравнения ультрапараболического типа// Вопросы вычисл. и прикладн. матем. – Ташкент, 1986. – Вып. 80. – С. 60-67.
18. *Барабаш Г. М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння// Мат. методи та фіз-мех поля. – 2002. – Т. 45. – N 4. – С. 27-34.
19. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М., - 1972.
20. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Науковий вісник Чернів. ун-ту. – Сер. матем. – 2002. – Вип. 134. – С. 97-103.
21. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області // Укр. матем. журн. – 2000. – Т. 51. – N 8. – С. 1053 - 1066.
22. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – N 12. – С.128 - 139.
23. *Lax P. D., Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative linear differential operators// Comm. Pure and Appl. Math. – 1960. – Vol. 13. – P. 427-455.
24. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– М., 1958.
25. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

THE PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR AN ULTRAPARABOLIC SYSTEM

Nataliya Huzil'

Ivan Franko National University of Lviv
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

In the paper there is considered the problem without initial data for an ultraparabolic system

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{ij}(x,y,t)u_{x_i} \right)_{x_j} +$$
$$+C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t).$$

There are obtained some conditions of the existence and uniqueness of the solution in Lax-Phillips sense independently on its behaviour when $t \to -\infty$.

Key words: ultraparabolic system, Fourier problem.

Стаття надійшла до редколегії 19.12.2003
Прийнята до друку 03.11.2004