ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.77–79

VISNYK LVIV UN.V.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.77–79

УДК 512.552.12

СИМЕТРИЧНІСТЬ ПОДІЛЬНОСТІ В КІЛЬЦЯХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Богдан ЗАБАВСЬКИЙ, Андрій ГАТАЛЕВИЧ
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

К. Асано і Т. Накаяма довели для напівлокального кільця таке: якщо $Ra = bR$ – ідеал у кільці R, то $Ra = aR = bR = Rb$. Поширено цей результат на кільця елементарних дільників.

Ключові слова: кільце елементарних дільників, дуо-кільце, дуо-елемент.

Нехай R – асоціативне кільце з $1 \neq 0$, A – довільна $m \times n$ матриця над R. Тоді існують оборотні матриці P і Q відповідних розмірів такі, що

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де матриця A_1 не є дільником нуля. Загалом подальше спрощення матриці A_1 неможливе. Якщо ж R – область головних ідеалів, то матрицю A_1 можна звести до діагонального вигляду. Для подальшого викладення нам потрібне одне означення. Назвемо елемент $a \in R$ повним дільником елемента $b \in R$ (в позначеннях $a||b$), якщо $RbR \subseteq aR \cap Ra$. Зауважимо, що не кожний елемент є своїм повним дільником, $a||a$ в тому і тільки в тому випадку, коли елемент a є дуо-елементом, тобто $aR = Ra$. Якщо кільце просте, то воно не містить необоротних дуо-елементів, тому зі співвідношення $a||b$ одержуємо таке: або a – оборотний елемент, або $b = 0$.

Позначатимемо через $\operatorname{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r)$ матрицю з елементами $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ на головній діагоналі і нулями на інших місцях. Матриці A і B називаються еквівалентними, якщо $B = PAQ$, де P, Q – оборотні матриці відповідних розмірів. Якщо матриця A еквівалентна до деякої діагональної матриці $\operatorname{diag}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r)$, де $\epsilon_i||\epsilon_{i+1}$ при довільному $i = 1, 2, \dots r-1$, то кажуть, що матриця A володіє діагональною редукцією. Елементи $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r$ називають елементарними дільниками матриці A. Кільце R називається кільцем елементарних дільників, якщо довільна матриця над R володіє діагональною редукцією [1]. Зауважимо, що умова повної подільності елементарних дільників суттєво обмежує класи кілець з елементарною редукцією матриць.

У випадку правого (лівого) дуо-кільця показано, що це кільце є дуо-кільцем, що узагальнює результати праць [2 – 5].

Праве (ліве) дуо-кільце – це кільце, в якому кожний правий (лівий) ідеал є ідеалом. Кільце, яке є правим і лівим дуо-кільцем, називається дуо-кільцем. Елемент a кільця R називається правим (лівим) дуо-елементом, якщо $aR \supset Ra$ $(aR \subset Ra)$. Елемент, який є одночасно правим і лівим дуо-елементом, називається дуо-елементом.

Теорема. *Нехай R – кільце елементарних дільників і a – лівий дуо-елемент. Тоді існує такий елемент $b \in R$, що $aR = bR = Rb$.*

Доведення. Оскільки R – кільце елементарних дільників, то для елемента $a \in R$ матриця

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

володіє діагональною редукцією. Тому існують такі матриці $P = (p_{ij})$, $Q = (q_{ij})$ $P, Q \in GL_2(R)$, що

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

де $b, c \in R$ і $Rb \cap bR \supseteq RcR$. Зрозуміло, що $RaR = RbR$. З матричної рівності отримуємо, що

$$ap_{12} = q_{12}c, \; ap_{22} = q_{22}c,$$

P – оборотна матриця і тому $Rp_{12} + Rp_{22} = R$, $up_{11} + vp_{22} = 1$ і $a = aup_{12} + avp_{22}$, оскільки a – лівий дуо-елемент, то $au = \overline{u}a, av = \overline{v}a$ для деяких $\overline{u}, \overline{v} \in R$ і $a = \overline{u}ap_{12} + \overline{v}ap_{22} = \overline{u}q_{12}c + \overline{v}q_{22}c$. Звідси $aR \subseteq RcR$. Оскільки $RcR \subseteq bR \cap Rb \subseteq RbR = RaR = Rc$, то отримуємо рівність $Ra = RcR$. З включень $RcR \subseteq bR \subseteq RbR$ і $RcR \subseteq Rb \subseteq RbR$ одержуємо, що $Ra = bR = Rb$.

Теорему доведено.

З теореми отримуємо наслідки.

Наслідок 1. *Нехай R – кільце елементарних дільників і для деяких елементів $a, b \in R$ виконується $aR = Rb$. Тоді $aR = Ra = Rb = bR$.*

Наслідок 2. *Якщо R – праве (ліве) дуо-кільце елементарних дільників, то R – дуо-кільце.*

---

1. *Kaplansky I.* Elementary divisor rings and modules// Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. 66. – P. 464-491.
2. *Asano K.* Uber Hauptideal rings mit Kettensatr// Algebra Math J. – 1949. – Vol. 1. – P. 52-61.
3. *Asano K.* Uber die Quotientenbildungvou Schiefringen. J. Math.Japan. – 1949. – Vol. 1. – P. 73-79.
4. *Nakayama T.* Note on uniserial and generalized uniserial rings// Proc. Imp. Acad. Tokio. – 1940. – Vol. 16. – P. 285-289.

5. *Nakayama T.* Algebras with antiisomorphic left and right idel lattices// Proc. Imp. Acad. Tokio. – 1940. – Vol. 17. – P. 53-56.

SYMMETRY Of DIVISIBILITY IN ELEMENTARY DIVISOR RING

Bohdan Zabavs'kyy, Andriy Hatalevych

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

K. Asano and T. Nakayama proved that for semilocal ring if $Ra = bR$ is ideal of ring R, then $Ra = aR = bR = Rb$. In the paper this result is generalized for elementary divisor ring.

Key words: elementary divisor ring, duo-ring, duo-element.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.2004
Прийнята до друку 03.11.2004