УДК 517.988.5

АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА ОДИНИЧНОМУ ДИСКУ ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ

Андрій ЗАГОРОДНЮК, Михайло МИТРОФАНОВ
*Інститут прикладних проблем математики і механіки
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна*

Досліджено простір Харді H^2 на полідиску та простір L_2 функцій, визначених на нескінченновимірному гільбертовому просторі.

Ключові слова: простір Харді, гільбертів простір, представляюча міра.

Нехай E – сепарабельний комплексний гільбертів простір з ортонормованою базою (e_n) і скалярним добутком $(\cdot \mid \cdot)$. Позначимо через D^∞ підмножину в E, визначену так: $D^\infty := \{x = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i \in E : |a_i| < 1\}$. Очевидно, що D^∞ – відкрита підмножина в E. Вважатимемо, що E вкладений в ℓ_∞простір обмежених послідовностей $\{\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\}$ за допомогою тотожного відображення. Нехай B_∞ і S_∞ відкрита одинична куля та одинична сфера в ℓ_∞ відповідно. Легко бачити, що $D^\infty = E \cap B_\infty$. Позначимо $T^\infty = \{x = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i \in S_\infty : |a_i| = 1\}$. Очевидно, що $T^\infty \cap E = \emptyset$. Множина T^∞ є нескінченновимірним тором – декартовим добутком кіл.

У праці [1] (див. також [2]) Т. Гамелін ввів і дослідив абстрактні простори Харді, визначені через зображаючу міру, яка є продовженням деякого характера на простір неперервних функцій на множині максимальних ідеалів деякої рівномірної алгебри. В [3] було досліджено абстрактні простори Харді на нескінченновимірному полідиску.

У цій праці, використовуючи гільбертові тензорні добутки, будуємо і досліджуємо гільбертів простір аналітичних функцій в D^∞, який є аналогом простору Харді H^2 у полідиску та відповідний простір $L_2(T^\infty, \mu_\infty)$, де міра μ_∞ визначена на σ-алгебрі циліндричних множин в T^∞. Цей підхід був використаний у [4,5] для побудови і вивчення аналогів простору H^2 на одиничній кулі гільбертового простору.

Простори Харді на полідиску $\mathbb{C}^n$ описано в [6]. Основні означення та результати з теорії аналітичних функцій на банахових просторах, які використовують автори, є в монографії [7].

Простір $H^2(D^\infty)$ та його передспряжений. Позначимо $\otimes^n E$ n-ий тензорний степінь простору E, поповнений у нормі Гільберта-Шмідта. Іншими словами, елементи вигляду $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}$ є ортонормованою базою в $\otimes^n E$. Замкнений підпростір $\otimes_s^n E \subset \otimes^n E$, породжений векторами

$$e_{i_1} \cdots e_{i_n} := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(n)}},$$

де S_n – група підстановок на множині $\{1, \ldots, n\}$, називається симетричним тензорним степенем простору E. При цьому

$$\|e_{i_1}^{k_1} \cdots e_{i_n}^{k_n}\|_{\otimes^n E} = \sqrt{\frac{k_1! \cdots k_n!}{(k_1 + \cdots + k_n)!}}.$$

Тут $e_i^k = \underbrace{e_i \otimes \ldots \otimes e_i}_{k}$, $i_k \neq i_j$ при $k \neq j$ і вектори $\{e_{i_1} \cdots e_{i_n}\}$ утворюють ортогональну базу в $\otimes_s^n E$ [8, с. 116].

Введемо на $\otimes_s^n E$ еквівалентну норму, прийнявши на базових векторах $\|e_{i_1}^{k_1} \cdots e_{i_n}^{k_n}\| = 1$. Позначимо через E^∞ – l_2-суму просторів $\otimes_s^n E$, $n = 0, \cdots \infty$. Тобто, якщо $w \in E^\infty$, то $w = \sum_{k=0}^\infty w_k$, де $w_k \in \otimes_s^n E$ і $\|w\| = \sqrt{\sum_{k=0}^\infty \|w_k\|^2}$. Ми вважаємо, що $\otimes_s^0 E = \mathbb{C}$.

Визначимо відображення $\eta : D^\infty \to E^\infty$ так: для кожного $x \in D^\infty$, $x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$ приймемо

$$\eta(x) = \prod_{i=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty x_i^k e_i^k,$$

де $x_i = (x, e_i)$ – координати вектора x.

Теорема 1. *Відображення η є аналітичним відображенням з D^∞ в E^∞.*

Доведення. Спочатку покажемо, що відображення η є коректно визначеним. Нехай $\langle \cdot | \cdot \rangle$ – скалярний добуток в E^∞. Внаслідок попарної ортогональності векторів e_i^k маємо

$$\|\eta(x)\|_{E^\infty}^2 = \langle \eta(x), \eta(x) \rangle = \prod_{i=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty |x_i|^{2k} = \prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1 - |x_i|^2}.$$

З іншого боку, оскільки $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty$, то

$$\ln\Big(\prod_{i=1}^\infty \frac{1}{1 - |x_i|^2}\Big) = -\ln \prod_{i=1}^\infty (1 - |x_i|^2) \leqslant -\sum_{i=1}^\infty (-|x_i|^2) = \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2.$$

Отже, $\|\eta(x)\|_{E^\infty} \leqslant e^{\|x\|^2/2} < \infty$. Тобто, відображення η є визначеним на D^∞ і обмеженим на обмежених підмножинах. Для довільних фіксованих x_0, $h \in D^\infty$

$$\eta(x_0 + th) = \prod_{i=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty (x_i^0 + th_i)^k e_i^k$$

є аналітичним відображенням при всіх $t \in \mathbb{C}$ таких, що $x_0 + th \in D^\infty$. Тому η є G-аналітичним вдображенням і локально обмеженим. Отже, згідно з [7], η є аналітичним відображенням.

Зауважимо, що за нерівністю Коші-Буняковського для довільних $z, w \in D^\infty$

$$\langle \eta(z), \eta(w) \rangle \leqslant \|\eta(z)\| \|\eta(w)\| \leqslant e^{(\|z\|^2 + \|w\|^2)/2}.$$

Розглянемо на D^∞ простір функцій $H^2(D^\infty)$, визначених так. Скажемо, що $f \in H^2(D^\infty)$, якщо $f(x) := \varphi_f(\eta(x))$ для деякого лінійного функціонала $\varphi_f \in (E^\infty)'$.

Наслідок 1. *Простір $H^2(D^\infty)$ є гільбертовим простором аналітичних функцій на D^∞ стосовно норми $\|f\| = \|\varphi_f\|$.*

Доведення. Оскільки E^∞ – гільбертів простір і $H^2(D^\infty)$ ізометричний до $(E^\infty)'$, то $H^2(D^\infty)$ є гільбертовим. З лінійності і неперервності φ_f й аналітичності η випливає аналітичність їх композиції $f = \varphi_f \circ \eta$.

Позначимо $P_{(i)}$ поліном на E, визначений формулою $P_{(i)} = \langle \eta(x), e_{i_1} \cdots e_{i_n} \rangle$, де $(i) = (i_1, \cdots, i_n)$ – мультиіндекс та $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n$. Очевидно, що $P_{(i)} \in H^2(D^\infty)$ і $\|P_{(i)}\| = \|e_{i_1} \cdots e_{i_n}\| = 1$. Поліноми $P_{(i)}$ попарно ортогональні й утворюють ортонормовану базу в $H^2(D^\infty)$.

Твердження 1. *Нехай $x \in E$, $x = \sum_{i=0}^\infty x_i e_i$. Тоді $P_{(i)}(x) = x_{i_1} \cdots x_{i_n}$.*

Доведення. Згідно з означенням

$$P_{(i)} = \langle \eta(x), e_{i_1} \cdots e_{i_n} \rangle = \left\langle \prod_{i=1}^\infty \sum_{k=0}^\infty x_i^k (e_i^k, \cdot) | e_{i_1} \cdots e_{i_n} \right\rangle =$$

$$\left\langle \sum_{k=1}^\infty \sum_{i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k} | e_{i_1} \cdots e_{i_n} \right\rangle = x_{i_1} \cdots x_{i_n},$$

що і вимагалось показати.

Наслідок 2. *Якщо $\dim E = m < \infty$, то $H^2(D^m)$ збігається з класичним простором Харді на полідиску D^m.*

Доведення. В класичному просторі Харді поліноми $q_{k_1 \cdots k_m}(z_1 \cdots z_m) = z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m}$ утворюють ортонормовану базу. Крім того, згідно з твердженням 1

$$q_{k_1 \cdots k_m}(z_1 \cdots z_m) = p_{\underbrace{1 \ldots 1}_{k_1} \ldots \underbrace{m \cdots m}_{k_m}}(z) = \langle \eta(z) | \underbrace{e_1 \cdots e_1}_{k_1} \cdots \underbrace{e_m \cdots e_m}_{k_m} \rangle,$$

де $z = z_1 e_1 + \cdots + z_m e_m$.

Простір $L_2(T^\infty)$. Розглянемо функції $Q_{(k)(m)}$ вигляду

$$Q_{(k)(m)}(x) = \langle \eta(x) | e_{k_1} \cdots e_{k_n} \rangle \langle e_{m_1} \cdots e_{m_r} | \eta(x) \rangle = P_{(k)}(x) \overline{P_{(m)}(x)},$$

де $(k) = (k_1, \cdots, k_n)$, $(m) = (m_1, \cdots, m_r)$ мультиіндекси. Розглянемо всілякі можливі формальні суми

$$f = \sum_{n+r=0}^{N} \sum_{(k)(m)} a_{(k)(m)} Q_{(k)(m)}, \tag{1}$$

де (k) і (m) пробігають множину мультиіндексів $|k| = n$, $|m| = r$.

Очевидно, що множина всіх таких сум утворює лінійний простір, який ми позначимо $\mathcal{L}_2^N(T^\infty)$. Нехай $g = \sum_{n+r=0}^{N} \sum b_{(k)(m)} Q_{(k)(m)}$. Тоді визначимо скалярний добуток у $\mathcal{L}_2^N(T^\infty)$ формулою

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n+r=0}^{N} \sum_{(k)(m)} a_{(k)(m)} b_{(k)(m)}.$$

Позначимо $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ поповнення $\mathcal{L}_2^N(T^\infty)$ стосовно норми породженої цим скалярним добутком. Очевидно, що $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ є гільбертовим простором і $H^2(D^\infty)$ – замкненим підпростором. Зауважимо, що ряди f вигляду (1) загалом не збігаються при $N \to \infty$ на елементах з T^∞. Проте для довільного $x \in T^\infty$

$$\left| \sum_{n+r=0}^{\infty} \sum_{(k)(m)} |a_{(k)(m)}|^2 Q_{(k)(m)}(x) \overline{Q_{(k)(m)}(x)} \right| \leqslant \sum_{n+r=0}^{\infty} \sum_{(k)(m)} |a_{(k)(m)}|^2 = \|f\|^2 < \infty.$$

Наше завдання – означити міру μ на T^∞ так, щоб $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ був ізометричний простору $L_2(T^\infty, \mu)$.

Множину T^∞ можна подати у вигляді декартового добутку $\prod_{k=1}^{\infty} T_k$, де $T_k = T$ – одиничне коло. Позначимо μ_k лебегову міру на T_k таку, що $\mu_k(T) = 1$. Нагадаймо, що циліндричною множиною на T^∞ називається множина Ω вигляду

$$\Omega((i), \delta) = \{\lambda(\cdot) \in T^\infty : \lambda(i_1), \ldots, \lambda(i_n) \in \delta\},$$

де $\delta \in \prod_{i=1}^{n} T_i$, $(i) = (i_1, \ldots, i_n)$. Множина всіх циліндричних підмножин $C_\sigma(T^\infty)$ є σ-алгеброю і на ній існує ймовірнісна σ-адитивна міра μ (детальніше див. [8, с. 82]). При цьому $\mu\Omega((i), \delta) = \mu_{(i)}(\delta)$, де $\mu_{(i)}(\delta) = \mu_{(i_1)} \otimes \cdots \otimes \mu_{(i_n)}(\delta)$. Зауважимо, що $C_\sigma(T^n) \subset C_\sigma(T^\infty)$, де $C_\sigma(T^n)$ – σ-алгебра циліндричних множин вигляду $\Omega(1, \ldots, n, \delta)$ для фіксованого n. Оскільки базові поліноми $P_{(i)}$ залежать лише від скінченної кількості змінних і є вимірними стосовно $C_\sigma(T^n)$, то

$$\int_{T^\infty} P_{(i)}(x) d\mu = \int_{T^n} P_{(i)}(x) d\mu_{(i)}$$

для деякого n. Отже,

$$\int_{T^\infty} P_{(i)}(x) \overline{P_{(i)}(x)} d\mu = \int_{T^n} P_{(i)}(x) \overline{P_{(i)}(x)} d\mu_{(i)} = 1 = \|P_{(i)}\|^2.$$

Аналогічно, функції $Q_{(k)(m)}$ є інтегрованими з квадратом на T^∞ за мірою μ і

$$\|Q_{(k)(m)}\|^2 = \int_{T^\infty} |Q_{(k)(m)}|^2 d\mu = 1.$$

Лема 1. *Нехай*

$$f = \sum_{n+r=0}^{\infty} \sum_{(k)(m)} a_{(k)(m)} Q_{(k)(m)} \in L_2(T^\infty) \tag{2}$$

і

$$\sum_{n+r=0}^{\infty} \sum_{(k)(m)} |a_{(k)(m)}| < \infty. \tag{3}$$

Тоді f визначає деяку функцію на T^∞ і

$$\|f\|^2 = \int_{T^\infty} |f(x)|^2 d\mu.$$

Доведення. Оскільки $T^\infty \subset l_\infty$, то для довільного $x \in T^\infty$ ряд

$$f = \sum_{n+r=0}^{\infty} \sum_{(k)(m)} a_{(k)(m)} Q_{(k)(m)}$$

абсолютно збігається. Тому

$$\int_{T^\infty} |f(x)|^2 d\mu = \int_{T^\infty} \left| \sum_{n+r=0}^{\infty} \sum_{(k)(m)} a_{(k)(m)} Q_{(k)(m)}(x) \right|^2 d\mu =$$

$$\sum_{n+r=0}^{\infty} \sum_{(k)(m)} |a_{(k)(m)}|^2 = \|f\|^2.$$

Позначимо $L_2^0(T^\infty, \mu)$ лінійний простір функцій на T^∞ вигляду (2), (3).

Твердження 2. $L_2^0(T^\infty, \mu)$ *є щільним підпростором в* $\mathcal{L}_2(T^\infty)$.

Доведення. Очевидно, що $L_2^0(T^\infty, \mu)$ є щільним підпростором в $\mathcal{L}_2(T^\infty)$, оскільки містить всі базові елементи $Q_{(k)(m)}$.

Позначимо $L_2(T^\infty, \mu)$ поповнення $L_2^0(T^\infty, \mu)$ за нормою

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{T^\infty} |f(x)|^2 d\mu.$$

Оскільки на $L_2^0(T^\infty, \mu)$ норма $\|\cdot\|_{L^2}$ збігається з нормою $\|\cdot\|$ простору $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ (лема 1), то $L_2(T^\infty, \mu)$ є ізометрично ізоморфний простору $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ і $\|f\|_{L^2} = \|f\|$. Тому для довільного $f \in \mathcal{L}_2(T^\infty)$ ми можемо записати

$$\int_{T^\infty} |f(x)|^2 d\mu = \|f\|^2.$$

Іншими словами,

$$\int_{T^\infty} |f(x)|^2 d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{T^\infty} |f_n(x)|^2 d\mu,$$

де $f_n \in L_2^0(T^n, \mu)$, $f_n \to f_0$ в $L_2^0(T^\infty, \mu)$ і границя не залежить від вибору послідовності. Отож, ми довели теорему 2.

Теорема 2. *Поповнення в $L_2(T^\infty, \mu)$ простору інтегрованих функцій вигляду (2), (3) за нормою є ізометрично ізоморфним простору $\mathcal{L}_2(T^\infty)$.*

Наслідок 3. *Простір $H^2(D^\infty)$ є замкненим підпростором в $L_2(T^\infty, \mu)$.*

Доведення. Нехай $A : \mathcal{L}_2(T^\infty) \to H^2(D^\infty)$ – лінійний оператор такий, що $A(Q_{(k)(m)}) = Q_{(k)(m)}$, якщо $m = 0$ і нулю в іншому випадку.

Очевидно, що A – ортогональний проектор з $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ в $H^2(D^\infty)$. Залишилось використати ізоморфізм $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ і $L_2(T^\infty, \mu)$.

Надалі ми ототожнюватимемо простори $\mathcal{L}_2(T^\infty)$ і $L_2(T^\infty, \mu)$. На просторі є $L_2(T^\infty, \mu)$ оператор спряження (інволюції) $f \to \bar{f}$, визначений на базових векторах так: $\overline{Q_{(k)(m)}} = Q_{(m)(k)}$. Очевидно, що це неперервний (ізометричний), антилінійний оператор з $L_2(T^\infty, \mu)$ в себе.

Наслідок 4. *Для довільних $f, g \in L_2(T^\infty, \mu)$ $\langle f|g\rangle = \langle f\bar{g}|1\rangle = \int_{T^\infty} f(x)\overline{g(x)}d\mu$, де 1 – одинична функція на T^∞.*

Теорема 3. *Для довільної функції $f \in H^2(D^\infty)$*

$$f(x) = \int_{T^\infty} \eta(x)(z) f(z) d\mu_z.$$

Доведення.

$$f(x) = (\eta(x)) = \langle f|\tilde{\eta(x)}\rangle = \langle \eta(x) f|1\rangle = \int_{T^\infty} \eta(x)(z) f(z) d\mu_z,$$

де φ_f лінійний функціонал на E^∞, що відповідає f.

Зауважимо, що в скінченновимірному випадку $\eta(x)(z)$ збігається з класичним ядром Коші в полідиску.

Нагадаймо таке: якщо A – деяка рівномірна алгебра, то A є замкненим підпростором у просторі неперервних функцій $C(M)$ на множині максимальних ідеалів алгебри A. Кажуть, що регулярна борелівська міра $\nu \in C(M)'$ є зображаючою для деякого характера ϕ на A, якщо звуження ν на A збігається з ϕ (див [2, с. 50]).

Позначимо через $A(D^\infty)$ підалгебру неперервних обмежених функцій в D^∞, які містяться в $H^2(D^\infty)$ і продовжуються до обмежених функцій на $B_\infty \subset \ell_\infty$. Нехай

$$\|f\|_A = \sup_{x \in B_\infty} |f(x)|.$$

Зауважимо, що алгебра $A(D^\infty)$ містить функції, визначені рівністю (2), (3) і, отже, є щільною в $H^2(D^\infty)$.

Теорема 4. *Міра μ на T^∞ є зображаючою мірою характера ϕ_0 на $A(D^\infty)$, визначеного як $\phi_0(f) = f(0)$.*

Доведення. Спочатку покажемо, що $A(D^\infty)$ – банахова алгебра. Для цього нам треба вивести таку нерівність:

$$\|f\|_A \geqslant \|f\|_{H^2(D^\infty)}. \tag{4}$$

У випадку, коли замість D^∞ взяти скінченновимірний полідиск, нерівність (4) є простим наслідком з теореми про середнє. Отже, завдяки наслідку 2, нерівність (4) виконується для функцій із щільного підпростору в $A(D^\infty)$, які залежать лише від скінченної кількості координат. Тому ця нерівність виконується для довільної функції з $A(D^\infty)$. Отже, простір $A(D^\infty)$ міститься в $C(M)$ і його поповнення в *sup*-нормі міститься в $H^2(D^\infty)$. З іншого боку, поповнення простору неперервних обмежених функцій в *sup*-нормі є простором неперервних обмежених функцій. Отож, $A(D^\infty)$ збігається зі своїм поповненням. Крім того, згідно з означенням кожну функцію з $A(D^\infty)$ можна продовжити до деякої функції на T^∞. Тому значення в точках T^∞ є характерами алгебри $A(D^\infty)$. Таким чином, T^∞ належить множині максимальних ідеалів $A(D^\infty)$, отож міра μ задана на множині максимальних ідеалів.

Оскільки підпростір констант в $H^2(D^\infty)$ є ортогональний до всіх однорідних поліномів, то для довільної $f \in A(D^\infty)$

$$\int_{T^\infty} f d\mu = \langle f \mid 1 \rangle = f(0) = \phi_0(f).$$

Зауважимо, що міра μ є єдиною інваріантною мірою стосовно групи ізометрій, яка переводить кожен одновимірний диск $D_k = \{\xi e_k \ : \ |\xi| < 1\}$ в себе.

---

1. *Gamelin T., Lumer D.* Theory of abstract Hardy spaces and the universal Hardy class // Advanced Math. – 1968. – Vol. 2. – N. 2. – P. 118–174.
2. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. – М., 1973.
3. *Cole B. and Gamelin T.W.* Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra // Proc. London Math. Soc. – 1986 – Vol. 53. – P. 112–142.
4. *Загороднюк А. В., Лопушанський О. В.* Класи функцій H_2 на одиничній кулі гільбертового простору //Доп. НАН України. – 2001. – N. 5. – С. 13–19.
5. *Lopushansky O., Zagorodnyuk A.* Function Hilbert space of infinitely many variables // Annales Polonici Mathematici. – 2003. – Vol. 81. – N. 2. – P. 111–122.
6. *Dineen S.* Complex Analysis on Locally Convex Spaces. – North Holland, Amsterdam: Math Studies, 57, 1981.
7. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М., 1974.
8. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. –К., 1988.

ANALYTIC FUNCTIONS ON THE UNIT DISK OF THE HILBERT SPACE

Andriy Zagorodnyuk, Mykhaylo Mytrofanov

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

An analogue of Hardy space of analytic functions on a polydisk of infinity-dimensional Hilbert space is investigated.

Key words: Hardy space, Hilbert space, representing measure.

Стаття надійшла до редколегії 24.10.2003

Прийнята до друку 03.11.2004