ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.88–92

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.88–92

УДК 517.537.72

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Михайло ЗЕЛІСКО, Мирослав ШЕРЕМЕТА
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Нехай Φ – додатна на $(-\infty,+\infty)$ функція така, що $\Phi'(\sigma)\uparrow+\infty$ і $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$ при $\sigma\to+\infty$, а φ – функція, обернена до Φ'. Для цілого ряду Діріхле $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\}$ приймемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in\mathbb{R}\}$ і $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\geqslant 0\}$. Доведено таке: якщо $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\Phi^{-1}(\ln n)/\varphi(\lambda_n)<1$, то співвідношення $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma(1+o(1)))$ і $\ln M(\sigma,F)\leqslant\Phi(\sigma(1+o(1)))$ при $\sigma\to+\infty$ рівносильні.

Ключові слова: цілі ряди Діріхле, максимум модуля, максимальний член.

Нехай $\Lambda=(\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідованість невід'ємних чисел, а $S(\Lambda;+\infty)$ – клас цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\},\quad s=\sigma+it. \tag{1}$$

Приймемо $M(\sigma,F)=\sup\{|F(\sigma+it)|:t\in\mathbb{R}\}$, нехай $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n):n\geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1). Через $\Omega(\infty)$ позначимо клас додатних на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' додатна, неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Для $\Phi\in\Omega(\infty)$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [1] функція Ψ неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$, функція φ неперервно диференційовна і зростає до $+\infty$ на $(0,+\infty)$.

В [2] доведено таке: якщо функція $\Phi\in\Omega(\infty)$ така, що $\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\nearrow+\infty$ і $\ln\Phi'(\sigma)=o(\Phi(\sigma))$ при $\sigma_0\leqslant\sigma\to+\infty$, то для того щоб для кожної функції $F\in S(\Lambda;+\infty)$ співвідношення $\ln\mu(\sigma,F)\leqslant(1+o(1))\Phi(\sigma)$ і $\ln M(\sigma,F)\leqslant(1+o(1))\Phi(\sigma)$ при $\sigma\to+\infty$ були рівносильними, необхідно і достатньо, щоб $\ln n(t)=o(\Phi(\Psi(\varphi(t))))$, $t\to+\infty$, де $n(t)=\sum_{\lambda_n\leqslant t}1$ – лічильна функція послідовності Λ. Подібні результати отримані в [3] у випадку, коли $\Phi(\sigma)=\sigma\alpha(\sigma)$ для $\sigma\geqslant\sigma_0$, де α — така повільно зростаюча функція, що $(\sigma\alpha'(\sigma)/\alpha(\sigma))\ln\alpha(\sigma)\to 0$ $(\sigma_0\leqslant\sigma\to+\infty)$, і в [4] у випадку, коли $\Phi\in\Omega(+\infty)$ така, що $1<h\leqslant\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma)\leqslant H<+\infty$, $\sigma\in[\sigma_0,+\infty)$.

Тут подамо умову на Λ, за якої рівносильними є співвідношення

$$\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi((1+o(1))\sigma),\ \sigma \to +\infty, \tag{2}$$

і

$$\ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi((1+o(1))\sigma),\ \sigma \to +\infty. \tag{3}$$

Зауважимо таке: якщо $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) = O(1)$, $\sigma \to +\infty$, то $\Phi((1+o(1))\sigma) = (1+o(1))\Phi(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, тобто задача зводиться до задачі, розв'язаної в [4], тому надалі вважатимемо, що $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$, $\sigma \to +\infty$. Зауважимо також, що за нерівністю Коші $\mu(\sigma, F) \leqslant M(\sigma, F)$ з (3) випливає (2) для будь-якого ряду Діріхле. Отже, залишається дослідити умови на Λ, за яких з (2) випливає (3).

Для цього через $S^*(\Lambda; +\infty)$ позначимо клас формальних рядів Діріхле (1) таких, що $|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\} \to 0$, $n \to \infty$, для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$, тобто максимальний член такого ряду існує для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$, але абсциса абсолютної збіжності може не дорівнювати $+\infty$. Будемо говорити, що ряд Діріхле належить до класу $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda; +\infty)$, якщо він належить до $S^*(\Lambda; +\infty)$ і для нього виконується співвідношення (2). Нарешті, нехай $S_{M,\Phi}(\Lambda; +\infty)$ — клас цілих рядів Діріхле, для яких виконується співвідношення (3).

Теорема. *Нехай функція $\Phi \in \Omega$ така, що $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$, $\sigma_0 \leqslant \sigma \to +\infty$. Для того щоб $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda; +\infty) \subset S_{M,\Phi}(\Lambda; +\infty)$, достатньо, щоб*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \Phi^{-1}(\ln n(t))/\varphi(t) < 1, \tag{4}$$

і якщо, додатково, $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, то необхідно, щоб

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \Phi^{-1}(\ln n(t))/\varphi(t) \leqslant 1. \tag{5}$$

Доведення. З умови $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$, $\sigma_0 \leqslant \sigma \to +\infty$ випливає, що $\Psi(\sigma) \sim \sigma$ $(\sigma \to +\infty)$ і $\{(\Phi'(\sigma)+\sigma\Phi''(\sigma))\Phi(\sigma) - \sigma(\Phi'(\sigma))^2\}/(\Phi(\sigma))^2 \geqslant 0$, тобто $\sigma\Phi''(\sigma)/\Phi'(\sigma) \geqslant \sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) - 1 \to +\infty$, $\sigma \to +\infty$. Звідси $x\varphi'(x)/\varphi(x) \to 0$, $x \to +\infty$, тобто φ — повільно зростаюча функція.

Доведемо спочатку достатність умови (4). Для цього використаємо таке твердження [1]: для того щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geqslant \sigma_*$, необхідно і достатньо, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant n_*$. Оскільки $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi((1+\varepsilon)\sigma)$ для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geqslant \sigma_*(\varepsilon)$, то за цим твердженням, з огляду на зроблені зауваження, $\ln |a_n| \leqslant -(\lambda_n/(1+\varepsilon))\Psi(\varphi((\lambda_n/(1+\varepsilon)))) \leqslant -\lambda_n\varphi(\lambda_n)/(1+\varepsilon)^2$ для всіх $n \geqslant n_*(\varepsilon)$. Позначимо $N(\sigma) = \min\{n : \varphi(\lambda_n) \geqslant (1+\varepsilon)^3\sigma\}$. Тоді $n_*(\varepsilon) \leqslant N(\sigma)$ для всіх досить великих σ і

$$M(\sigma, F) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda_{N(\sigma)}} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \leqslant$$
$$\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma, F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\left\{-\frac{\lambda_n\varphi(\lambda_n)}{(1+\varepsilon)^2} + \sigma\lambda_n\right\} =$$
$$= (N(\sigma)+1)\mu(\sigma, F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\left\{-\frac{\lambda_n\varphi(\lambda_n)}{(1+\varepsilon)^2}\left(1 - \frac{(1+\varepsilon)^2\sigma}{\varphi(\lambda_n)}\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma, F) + \sum_{\lambda_n > \lambda_{N(\sigma)}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon\lambda_n\varphi(\lambda_n)}{(1+\varepsilon)^3}\right\} \tag{6}$$

Далі, завдяки умові (4), існує $q \in (0,\, 1)$ таке, що $\ln\, n(t) \leqslant \Phi(q\varphi(t))$, $t \geqslant t_0(q)$. Тому

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln\, n(t)}{t\varphi(t)} \leqslant \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\Phi(q\varphi(t))}{t\varphi(t)} \leqslant \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\Phi(\sigma)}{\sigma\Phi'(\sigma)} = 0,$$

а отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\{-\varepsilon\lambda_n\varphi(\lambda_n)/(1+\varepsilon)^3\}$ збіжний, і з (6) отримуємо нерівність $M(\sigma, f) \leqslant (N(\sigma)+1)\mu(\sigma, F) + o(1)$, $\sigma \to +\infty$, тобто

$$\ln\, M(\sigma, f) \leqslant \ln\,(N(\sigma)+1) + \ln\, \mu(\sigma, F) + o(1), \quad \sigma \to +\infty. \tag{7}$$

З означення $N(\sigma)$ випливає, що $\varphi(\lambda_{N(\sigma)-1}) < (1+\varepsilon)^3\sigma$. Тому $\lambda_{N(\sigma)-1} < \Phi'((1+\varepsilon)^3\sigma)$ і $\ln\,(N(\sigma)-1) \leqslant \ln\, n(\Phi'((1+\varepsilon)^3\sigma))$. Оскільки $\ln\, n(t) \leqslant \Phi(q\varphi(t))$ для деякого $q \in (0,\, 1)$ і всіх $t \geqslant t_0(q)$, то звідси для всіх досить великих σ одержуємо $\ln\,(N(\sigma)-1) \leqslant \Phi(q(1+\varepsilon)^3\sigma) < \Phi((1+\varepsilon)\sigma)$ за умови, що $(1+\varepsilon)^2 q \leqslant 1$. Тому з (7) для всіх досить великих σ маємо $\ln\, M(\sigma, f) \leqslant 3\Phi((1+\varepsilon)\sigma) \leqslant \Phi((1+2\varepsilon)\sigma)$, бо для деякого $\xi = \xi(\sigma) \in ((1+\varepsilon)\sigma,\, (1+2\varepsilon)\sigma)$ маємо $\ln\, \Phi((1+2\varepsilon)\sigma) - \ln\, \Phi((1+\varepsilon)\sigma) = (\Phi'(\xi)/\Phi(\xi))\varepsilon\sigma \geqslant (\xi\Phi'(\xi)/\Phi(\xi))(\varepsilon/(1+2\varepsilon)) \to +\infty$, $\sigma \to +\infty$. Достатність умови (4) доведено.

Перейдемо до доведення необхідності умови (5). Припустимо, що вона не виконується, тобто $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \Phi^{-1}(\ln\, n(t))/\varphi(t) > 1$. Оскільки $\Psi(\sigma) \sim \sigma\, (\sigma \to +\infty)$, то звідси випливає, що $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \Phi^{-1}(\ln\, n(t))/\Psi(\varphi(t)) > 1$. Тому існує $q > 1$ таке, що $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (\ln\, n)/\Phi(q\Psi(\varphi(\lambda_n))) > 1$, бо $\Phi(q_1 x) = o(\Phi(q_2 x))$, $x \to +\infty$, якщо $q_1 < q_2$. В [5] доведено таке: якщо (μ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел і $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} (\ln\, n)/\mu_n > 1$, то існує підпослідовність (μ_k^*) послідовності (μ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\mu_k^*\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\mu_{k_j}^*\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j). Тому існує підпослідовність (λ_k^*) послідовності (λ_n) така, що $k \leqslant \exp\{\Phi(q\Psi(\varphi(\lambda_k^*)))\} + 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $k_j \geqslant \exp\{\Phi(q\Psi(\varphi(\lambda_{k_j}^*)))\}$ для деякої зростаючої до $+\infty$ послідовності (k_j).

Приймемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, і $a_n = a_k^*$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-\lambda_k^*\Psi(\varphi(\lambda_k^*))\}$.

Для ряду Діріхле (1) з такими коефіцієнтами за наведеним при доведенні достатності умови (4) твердженням з [1] маємо $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ і, отже, цей ряд належить до $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda; +\infty)$.

Нехай $m_j = \left[k_j - \sqrt{k_j}\right] + 2$. Тоді

$$\lambda^*_{m_j} \geqslant \Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\ln(m_j - 1))/q)) \geqslant \Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\ln(k_j - \sqrt{k_j}))/q)) =$$
$$= \Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\ln k_j)/q)) - \{\Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\ln k_j)/q)) -$$
$$- \Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\ln(k_j - \sqrt{k_j}))/q))\} \geqslant \lambda^*_{k_j} - \delta_j,$$

де

$$\delta_j = \frac{\Phi''(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)/q))}{q\Psi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)/q))\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))} \ln(k_j/(k_j - \sqrt{k_j}) =$$
$$= \frac{\{\Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)/q))\}^2}{q\Phi'(\Phi^{-1}(\xi_j))\Phi(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)/q))} \frac{1 + \varepsilon_j}{\sqrt{k_j}}, \quad \ln(k_j - \sqrt{k_j}) \leqslant \xi_j \leqslant \ln k_j,$$

а $\varepsilon_j \to 0$ $(j \to \infty)$.

Приймемо, нарешті, $\sigma_j = \varphi(\lambda^*_{k_j})$. Тоді

$$\sum_{k=m_j}^{k_j} a^*_k \exp\{\sigma_j \lambda^*_k\} \geqslant \sum_{k=m_j}^{k_j} \exp\{-\lambda^*_{k_j} \Psi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) + \sigma_j \lambda^*_{m_j}\} \geqslant$$
$$\geqslant (k_j - m_j + 1) \exp\{-\lambda^*_{k_j} \Psi(\varphi(\lambda^*_{k_j})) + \sigma_j \lambda^*_{k_j} - \delta_j \sigma_j\} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{k_j} \exp\{\Phi(\sigma_j) - \delta_j \varphi(\lambda^*_{k_j})\},$$

якщо цей ряд Діріхле виявиться цілим, тобто $M(\sigma, F)$ існує для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, то $\ln M(\sigma_j, F) \geqslant \frac{1}{2} \ln k_j + \Phi(\sigma_j) - \delta_j \varphi(\lambda^*_{k_j}) + o(1) \geqslant \frac{1}{2}\Phi(q\Psi(\sigma_j)) + \Phi(\sigma_j) - \delta_j \varphi(\lambda^*_{k_j}) + o(1)$, $j \to \infty$. Оскільки $\Psi(\sigma) \sim \sigma\, (\sigma \to +\infty)$, то $\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j))/q) \leqslant \Phi^{-1}(\xi_j)$, і, завдяки співвідношенню $\ln \sigma = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$ й умові $\ln \Phi'(\sigma) = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$, маємо

$$q\delta_j \varphi(\lambda^*_{k_j}) \leqslant (\varphi(\lambda^*_{k_j})/\sqrt{k_j}) \Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)/q)) =$$
$$= \exp\{\ln \varphi(\lambda^*_{k_j}) + \ln \Phi'(\Psi^{-1}(\Phi^{-1}(\xi_j)/q)) - (\ln k_j)/2\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\left(\frac{\ln \varphi(\lambda^*_{k_j})}{\Phi(q\Psi(\varphi(\lambda^*_{k_j})))} + \frac{\ln \Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\Phi^{-1}(\ln k_j)/q\right)\right)}{\ln k_j} - \frac{1}{2}\right) \ln k_j\right\} =$$
$$= \exp\{(-1/2 + o(1)) \ln k_j\} \to 0, \quad j \to \infty.$$

Тому $\ln M(\sigma_j, F) \geqslant \Phi(q\Psi(\sigma_j))/2 = \Phi(q(1 + o(1))\sigma_j))$, $j \to \infty$. Отож, якщо умова (5) не виконується, то існує ряд Діріхле з класу $S^*_{\mu,\Phi}(\Lambda; +\infty)$, який не належить до $S_{M,\Phi}(\Lambda; +\infty)$. Теорему повністю доведено.

З огляду на нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \ln M(\sigma, F)$ правильне таке твердження: *якщо $\Phi \in \Omega$, $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty\, (\sigma_0 \leqslant \sigma \to +\infty)$, показники цілого ряду Діріхле (1) задовольняють умову (4) і $\ln \mu(\sigma, F) = \Phi((1 + o(1))\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, то $\ln M(\sigma, F) = \Phi((1 + o(1))\sigma)$, $\sigma \to +\infty$.*

1. *Шеремета М. Н., Федыняк С. И.* О производной ряда Дирихле // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – N 1. – С. 206-223.

2. *Шеремета М. Н.* О максимуме модуля и максимальном члене ряда Дирихле // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – N 3. – С. 437-443.

3. *Шеремета М.* Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле повільного зростання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 57-61.

4. *Шеремета М.* Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле степенвого зростання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 147-151.

5. *Шеремета М. Н.* О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57. – N 2. – С. 283-296.

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF MAXIMUM MODULUS AND MAXIMAL TERM OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Mykhaylo Zelisko, Myroslav Sheremeta

Ivan Franko National University of Lviv
Universytetska Str. 1 79000 Lviv, Ukraine

Let Φ be a positive functions on $(-\infty, +\infty)$ such that $\sigma\Phi'(\sigma)/\Phi(\sigma) \nearrow +\infty$ and $\Phi'(\sigma) \uparrow +\infty$ as $(\sigma \to +\infty)$, and φ be the inverse function to Φ'. For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ we put $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ and $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$. It is proved that if $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \Phi^{-1}(\ln n)/\varphi(\lambda_n) < 1$, then relations $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma(1 + o(1)))$ and $\ln M(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma(1 + o(1)))$ as $\sigma \to +\infty$ are equivalent.

Key words: entire Dirichlet series, maximum modulus, maximal term.

Стаття надійшла до редколегії 06.07.2004

Прийнята до друку 03.11.2004