ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.93–98

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.93–98

УДК 512.558

НАПІВКІЛЬЦЯ З АНУЛЯТОРНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНИХ КОНГРУЕНЦІЙ

Мирослава ІВАСЮК
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено некомутативні напівкільця S з одиничним елементом. Напівмодулі над ними вважаємо правими й унітарними. Введено поняття напівкільця з ануляторною умовою для правих максимальних конгруенцій. Доведено, що кожне таке напівкільце є напівкільцем, в якому кожна первинна конгруенція міститься в єдиній максимальній. Зокрема, напівкільце $B(n,i)$ є напівкільцем з ануляторною умовою для максимальних конгруенцій тоді і тільки тоді, коли $B(n,i)$ має єдину максимальну конгруенцію.

Ключові слова: напівкільце, *pm*–напівкільце, напівмодуль, простий напівмодуль, конгруенція, первинна конгруенція.

Поняття напівкільця вперше формально ввів Вандівер у праці [6] 1934 р., хоча раніше алгебричні структури, еквівалентні напівкільцям, вже вивчав Дедекінд при дослідженні арифметики ідеалів кілець цілих алгебричних чисел. Термін "напівкільце" (semiring) теж належить Вандіверу, проте в літературі часто трапляються й інші англомовні слова для позначення таких структур: hemiring, rig та ін. Важливими модельними прикладами напівкілець є сукупність двосторонніх ідеалів кільця стосовно звичайних операцій додавання і множення ідеалів та числові напівкільця натуральних, невід'ємних цілих, невід'ємних раціональних чисел. З огляду на те, що алгебру все частіше застосовують до комп'ютерних наук, почали досліджувати напівкільця. Опубліковано багато монографій і оглядових статей, надруковано путівник по літературі з напівкілець, К. Глазека [5]. Розробляються нові напрями в абстрактній теорії, відкрито нові цікаві приклади, цілі важливі класи напівкілець. Важливий для застосування приклад напівкільця сконструював Голан [4]. Це множина всіх напередрадикальних фільтрів довільного (але фіксованого) кільця стосовно операцій перетину і множення фільтрів, визначеного Габріелем у дисертації [7]. Зрозуміло, що кожне кільце є напівкільцем, зокрема, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ є скінченним комутативним напівкільцем при будь-якому цілому $n > 1$. Ширший і природний клас комутативних скінченних напівкілець ввели Аларкон і Андерсон в [1]. Це напівкільця $B(n,i)$, де $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < n$, носій яких збігається з носієм кільця, але операції додавання і множення суміжних класів, запропоновані Аларконом і Андерсоном, суттєво залежать не тільки від n, а й від i (формальне означення наводиться нижче).

Напівкільця $B(n,i)$ мають властивості відмінні від властивостей $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Наприклад, Аларкон і Андерсон одержали критерій того, щоб ґратка ідеалів напівкільця $B(n,i)$ була ланцюгом. Зокрема, з їх результату випливає, що при $n=7$ і $i=1$ ця ґратка не є ланцюгом. Інші відомі результати щодо напівкілець $B(n,i)$ стосуються цілком первинності, цілком ідемпотентності заданих напівкілець (див, наприклад, [2]). У теорії кілець і в теорії напівкілець важливу роль відіграють функціональні напівкільця. Інтенсивні дослідження таких напівкілець розпочала група російських математиків. Серед них виділяється спільна праця В. Варанкіної, Є. Вєчтомова та І. Семенової [3], в якій досліджуються напівкільця, які є природними узагальненнями класичних кілець неперервних функцій зі значеннями в топологічних тілах. Мета цієї праці – виявити відповідність між браткою ідеалів кільця $C(X)$ і граткою ідеалів напівкільця $C^+(X)$. Як добре відомо, кільце $C(X)$ є модельним прикладом кільця Гельфанда. Природно виникає запитання: чи зберігається роль умови гельфандовості і для напівкілець неперервних функцій. Щоб відповісти на це запитання, треба було ввести абстрактне поняття напівкільця Гельфанда і вивчити деякі властивості таких напівкілець. Як відомо, термін "напівкільце Гельфанда" вже давно використовують у зовсім іншому сенсі, тому ми вибираємо іншу назву для таких напівкілець. Вибираючи, використаємо те, що умова гельфандовості для кілець формулюється (в певному розумінні) як ануляторна умова. Тому аналогом поняття кільця Гельфанда буде напівкільце з ануляторною умовою Гельфанда.

Нагадаємо, що непорожна множина S називається напівкільцем, якщо на ній визначено дві бінарні алгебричні операції, додавання і множення, то:

1) S - комутативний моноїд стосовно операції додавання;
2) S - моноїд стосовно операції множення;
3) $\forall r,s,t \in S, r(s+t)=rs+rt,(s+t)r=sr+tr$;
4) $\forall r \in S, r0=0r=0$;
5) $0 \neq 1$.

Правим напівмодулем називається множина M з однією бінарною операцією додавання + і унарною операцією $x \to xs$, $s \in S$ такими, що $M(+)$– комутативна напівгрупа і $(x+y)s = xs+ys, x(s+r) = xs+xr$,$x \cdot sr = xs \cdot r$, $\forall x,y \in M$ і $s,r \in S$. Відношення еквівалентності $\equiv$ на M називається правою конгруенцією, якщо з того $m \equiv m'$ і $n \equiv n'$ на M випливає, що $m+n = m'+n'$ і $\forall s \in S$ $ms = m's$. Аналогічно визначаються ліві та двосторонні конгруенції. Простий напівмодуль M-напівмодуль, на якому існує саме дві конгруенції id_M і $M \times M$. Правий (лівий) піднапівмодуль I напівкільця S називається правим (лівим) ідеалом. Поняття первинного, власного і максимального ідеалів визначаються аналогічно як і у випадку кілець. Кажемо, що напівкільце S є правим pm-напівкільцем, якщо кожна первинна права конгруенція на S міститься в єдиній правій максимальній конгруенції. Напівкільце S називається квазілокальним, якщо має єдиний максимальний ідеал. Якщо $\lambda \in S$ і Q двостороння конгруенція на S, то введемо позначення

$$[Q:\lambda] = \{(x,y) \in Q \,|(\lambda x, \lambda y) \in Q\}.$$

Лема 1. *Нехай Q максимальна права конгруенція напівкільця S і $\hat{Q}$ найбільша двостороння конгруенція, яка міститься в Q. Тоді $\hat{Q} = \bigcap\limits_{\lambda \in S} [Q:\lambda]$.*

Доведення. З рівності $\hat{Q} = \{(x,y)\,|\forall\lambda\ (\lambda x, \lambda y) \in Q\}$ видно, що $\hat{Q}$ двостороння конгруенція. З означення маємо включення $\hat{Q} \subseteq Q$. Нехай ρ двостороння конгруенція, $\rho \subseteq Q$ і $(x,y) \in \rho$. Для $\forall\lambda(\lambda x, \lambda y) \in \rho \subseteq Q$, отож, $(x,y) \in \hat{Q}$. Тому $\rho \subseteq \hat{Q}$ і $\hat{Q}$ найбільша двостороння конгруенція в Q. Лема доведена.

Лема 2. *Нехай Q - максимальна права конгруенція напівкільця S. Тоді $\hat{Q}$ - первинна конгруенція.*

Доведення. Нехай P та T - дві двосторонні конгруенції на напівкільці S . Припустимо, що $PT \subseteq \hat{Q}$ Якщо $(x_1,y_1) \in P\backslash\hat{Q}$ і $(x_2,y_2) \in T\backslash\hat{Q}$, то існують такі елементи λ_1 і λ_2 з S, що $\lambda_1(x_1,y_1) \notin Q$ і $\lambda_2(x_2,y_2) \notin Q$. Завдяки масимальності Q маємо $Q + \lambda_1(x_1,y_1)(S,S) = (S,S)$ і $Q + \lambda_2(x_2,y_2)(S,S) = (S,S)$. Тепер маємо $(S,S) = [\,Q + \lambda_1(x_1,y_1)(S,S)\,][\,Q + \lambda_2(x_2,y_2)(S,S)\,] \subseteq$

$\subseteq Q^2 + QT + PQ + PT \subseteq Q$

що неможливо. Отже, або $P \subseteq Q$, або $T \subseteq Q$. Лема доведена.

Лема 3. *Нехай S напівкільце. S/Q простий правий напівмодуль тоді і тільки тоді, коли Q максимальна права конгруенція.*

Доведення. $(\Rightarrow)$ Нехай N правий піднапівмодуль S/Q. Повним прообразом ρ правого піднапівмодуля N при гомоморфізмі $S \to S/Q$ є права конгруенція Q на напівкільці S така, що $\rho \supset Q$. Оскільки Q максимальна права конгруенція і $\rho \supset Q$, тоді $\rho = Q$. Звідси отримуємо, що будь-який правий піднапівмодуль N в S/Q складається лише з нульового елемента. Отже, S/Q простий правий напівмодуль.

$(\Leftarrow)$ Припустимо, що Q не максимальна права конгруенція на S , тоді існує права конгруенція $\rho \neq Q$, $\rho \supset Q$. Образом правої конгруенціїρ при $S \to S/Q$ є правий піднапівмодуль $N \neq 0$, але тоді S/Q не простий правий напівмодуль. Лема доведена.

Лема 4. *Нехай Q максимальна права конгруенція напівкільця S і простий правий напівмодуль S/Q ізоморфний напівмодулю $S/[Q:\lambda]$. Тоді $S/[Q:\lambda]$ простий напівмодуль.*

Доведення. Припустимо, що існує піднапівмодуль N' напівмодуля $S/[Q:\lambda]$, який відмінний від 0 і $S/[Q:\lambda]$. Тоді при ізоморфізмі $\varphi : S/Q \to S/[Q:\lambda]$ повним прообразом піднапівмодуля N' є піднапівмодуль N в напівмодулі S/Q такий, що $N \neq 0$ і $N \neq S/Q$. Звідси отримуємо, що S/Q не є простим напівмодулем. Лема доведена.

Наслідок 5. *Нехай Q максимальна конгруенція напівкільця S. Тоді $[Q:\lambda]$ максимальна конгруенція.*

Означення. *Кажемо, що в напівкільці S виконується ануляторна умова для максимальних правих конгруенцій, якщо для двох різних максимальних правих конгруенцій Q_1,$Q_2, Q_1 \neq Q_2$ існують елементи $a \neq_{Q_1} 0, b \neq_{Q_2} 0$ такі, що $ab = 0$.*

Теорема 6. *Кожне напівкільце S з ануляторною умовою для правих максимальних конгруенцій є правим $pm-$ напівкільцем.*

Доведення. Нехай ρ первинна права конгруенція, яка міститься в двох різних максимальних конгруенціях Q_1 і Q_2 ,$\rho \subseteq Q_1$, $\rho \subseteq Q_2$. За ануляторною умовою існують елементи $a \neq_{Q_1} 0$ і $b \neq_{Q_2} 0$ такі, що $ab = 0$. З умови $(a,0)\cdot(b,0) = (ab,0) = (0,0) \in \rho$ випливає $(a,0) \in \rho$ або $(b,0) \in \rho$, а це означає, що $(a \underset{Q_1}{\equiv} 0$ і $a \underset{Q_2}{\equiv} 0)$ або $(b \underset{Q}{\equiv} 0$

і $b \underset{Q_2}{\equiv} 0$) . Отримали суперечність. Теорема доведена.

Твердження 7. *Нехай Q максимальна права конгруенція в напівкільці з ануляторною умовою для правих максимальних конгруенцій. Тоді* $Q = [Q : \lambda]$ для кожного $\lambda \in S$.

Доведення. Згідно з лемою 1 $\hat{Q} = \bigcap\limits_{\lambda \in S} [Q : \lambda]$, а звідси $\hat{Q} \subseteq [Q : \lambda]$ і $[Q : \lambda]$ максимальна конгруенція за наслідком 5. Але $\hat{Q}$ первинна конгруенція згідно з лемою 2 і $\hat{Q} \subseteq Q$, отож, $Q = [Q : \lambda]$ за теоремою 6. Твердження доведене.

Твердження 8. *В напівкільці з ануляторною умовою для правих максимальних конгруенцій будь-яка максимальна права конгруенція є двосторонньою.*

Доведення. Нехай Q максимальна права конгруенція і $\lambda \in S$. За твердженням 7 $Q = [Q : \lambda]$ і отримаємо, що $(x, y) \in Q \Rightarrow (x, y) \in [Q : \lambda] \Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in Q$. Твердження доведене.

Теорема 9. *Нехай S напівкільце з ануляторною умовою для правих і лівих максимальних конгруенцій. Тоді кожна максимальна права конгруенція є максимальною лівою конгруенцією, більше того, кожну максимальну ліву конгруенцію отримуємо з деякої максимальної правої зазначеним способом.*

Доведення. Нехай Q максимальна права конгруенція в напівкільці з ануляторною умовою для правих і лівих максимальних конгруенцій S. Тоді Q є двосторонньою (за твердженням 8). Тому існує максимальна ліва конгруенція $\overline{Q}$ така, що $Q \subset \overline{Q}, Q \neq \overline{Q}$. Оскільки S напівкільце з ануляторною умовою для правих і лівих максимальних конгруенцій, то $\overline{Q}$ також двостороння конгруенція. Тоді існує максимальна права конгруенція Q', що $\overline{Q} \subset Q', \overline{Q} \neq Q'$. Звідси випливає, що $Q \subset \overline{Q} \subset Q'$. Оскільки Q і Q' максимальні праві конгруенції, то $Q = Q'$, а отже, $\overline{Q} = Q$. Теорема доведена.

Приклад. Нехай $2 \leqslant n, 0 \leqslant i < n$, $m = n - i$ і $B(n,i) = \{0, 1, ..., i, ...n-1\}$. Визначимо операції додавання та множення так:

$$x +_{B(n,i)} y = \begin{cases} x + y, & x + y \leqslant n - 1 \\ l, & x + y \geqslant n, 1\ l = (x + y) \bmod m\ i \leqslant l \leqslant n - 1 \end{cases},$$

$$x \cdot_{B(n,i)} y = \begin{cases} x \cdot y, & x \cdot y \leqslant n - 1 \\ l, & x \cdot y \geqslant n,\ l = (x \cdot y) \bmod m\ i \leqslant l \leqslant n - 1 \end{cases}.$$

Тоді $\langle B(n,i),\ +_{B(n,i)},\ \cdot_{B(n,i)} \rangle$ є комутативним напівкільцем, але не кільцем при $i > 0$. При $i = 0$ це напівкільце збігається з кільцем лишків $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

У праці [1] доведена така теорема.

Теорема. 1. $B(n,i)$ – квазілокальне тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:

a) $i = 0$ і $n = p^l$ $(l \geqslant 1)$; b) $i = 1$ і $n - l = p^l$ $(l \geqslant 0)$; c) $i \geqslant 2$, де p – просте число;

d) для $i \geqslant 6$, $L(B(n,i))$ не є модулярна;

e) для $i \leqslant 5$, $L(B(n,i))$ дистрибутивна;

f) $L(B(n,i))$ – ланцюг $\Leftrightarrow 0 \leqslant i \leqslant 2$ і $n - i = p^l$, де p – просте число, або $i = 3$, а n – непарне;

g) кожен ідеал $B(n,i)$ первинний $\Leftrightarrow 0 \leqslant i \leqslant 2$ або $i = 3$ і n – непарне.

Теорема 10 описує напівкільця вигляду $B(n,i)$.

Теорема 10. *Нехай $i \geqslant 1$. $B(n,i)$ є напівкільцем зануляторною умовою для максимальних конгруенцій тоді і тільки тоді, коли $B(n,i)$ має єдину максимальну конгруенцію.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай Q_1, Q_2 дві максимальні конгруенції напівкільця $B(n,i)$, причому $Q_1 \neq Q_2$. Тоді за ануляторною умовою існують $x \neq_{Q_1} 0, y \neq_{Q_2} 0$ такі, що $xy = 0$. Але $xy = 0$ в $B(n,i)$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$ або $y = 0$. Отримана суперечність свідчить про те, що $B(n,i)$ має єдину максимальну конгруенцію.

($\Leftarrow$) Нехай $B(n,i)$ має єдину максимальну конгруенцію. Тоді ануляторна умова для максимальних конгруенцій виконується очевидно. Теорема доведена.

Проте не всі напівкільця вигляду $B(n,i)$ є напівкільцями з ануляторною умовою для максимальних конгруенцій.

Приклад. Розглянемо напівкільце $B(7,1) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Очевидно, всі ідеали напівкільця вичерпуються множинами $\{0\}$, $\{0,6\}$, $\{0,3,6\}$, $\{0,2,4,6\}$, $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Серед них максимальними є $M_1 = \{0,3,6\} = (3)$, $M_2 = \{0,2,4,6\} = (2)$. Відповідно максимальними конгруенціями є

$$Q_1 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1),(2,5),(5,2),(3,6),$$
$$(6,3),(0,6),(6,0),(0,3),(3,0)\},$$
$$Q_2 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(0,2),(2,0),(2,4),(4,2),(4,6),$$
$$(6,4),(0,4),(4,0),(2,6),(6,2),(0,6),(6,0)\}.$$

Очевидно, що не існує $x \neq_{Q_1} 0, y \neq_{Q_2} 0$ таких, що $x \cdot y = 0$, оскільки $\forall x \neq_{Q_1} 0$, $y \neq_{Q_2} 0$ $x \cdot y \neq 0$. Отже, $B(7,1)$ не є напівкільцем з ануляторною умовою для максимальних конгруенцій.

1. *Alarcon F. E., Anderson D. D.* Commutative semiring and their lattices of ideals // Houston journal of mathematics. – 1994. – Vol. 20. – N 4.
2. *Alarcon F. E., Polkowska D.* Fully prime semirings// Kyungpook Math. J. – 2000. – Vol. 40. – P. 239-245.
3. *Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А.* Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции// Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4. – N 2. – С. 493-510.
4. *Golan J. S.* The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science. – Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.
5. *Glazek K.* A Short Guide through the Literature on Semirings. - Mathematical Institute, University of Wroclaw, Poland, 1985.
6. *Vandiver H. S.* Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold// Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – Vol. 40. – P. 914-920.
7. *Gabriel P.* Des categories abeliennes// Bull. Soc. Math. France. – 1962. – Vol. 90. – P. 323-348.

SEMIRINGS WITH ANNIHILATOR PROPERTY FOR MAXIMAL CONGRUENCES

Myroslava Ivasyuk

Ivan Franko National University of Lviv
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

The noncommutative semirings with identity are investigated. The semimodules are right and unital. A notion of a semiring with annihilator property for right maximal congruences is introduced and it is proved that such a semiring is the semiring in which every prime congruence is contained in unique maximal congruence. In particular, semiring $B(n,i)$ is the semiring with the annihilator property for right maximal congruences if and only if $B(n,i)$ has unique maximal congruence.

Key words: semiring, *pm*-semiring, semimodule, prime semimodule, congruence, prime congruence.

Стаття надійшла до редколегії 01.11.2003
Прийнята до друку 03.11.2004