ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.114–122

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.114–122

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ АНОМАЛЬНОЇ ДИФУЗІЇ І ЗУМОВЛЕНІ НИМИ ДИФУЗІЙНІ НАПРУЖЕННЯ

Юрій ПОВСТЕНКО, Степан ДЕРКАЧ

Інститут прикладних проблем математики і механіки
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул.Наукова, 3б 79060 Львів, Україна

На основі рівняння дифузії з дробовою похідною за часом порядку α запропоновано теорію дифузійних напружень у твердому тілі. Досліджено напруження у двовимірному середовищі, що відповідають фундаментальним розв'язкам задачі Коші для рівняння аномальної дифузії і задачі про дію джерела. Детально проаналізовано випадок $\alpha = 1/2$.

Ключові слова: рівняння дифузії з дробовою похідною, аномальна дифузія, дифузійні напруження.

У дифузійній теорії деформації твердих тіл [1, 2] концентрацію розчиненої речовини c знаходять з рівняння дифузії

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a\Delta c + Q(x,t), \tag{1}$$

$$c\big|_{t=0} = c_0(x), \tag{2}$$

де t - час, a - коефіцієнт дифузії, Δ - оператор Лапласа, $Q(x,t)$ - джерело маси, $c_0(x)$ - початкове значення концентрації. У цій праці не розглядаємо вплив деформації на процес дифузії, тому обмежилися невзаємозв'язаним рівнянням (1).

Напружено-деформований стан твердого тіла у квазістаціонарному випадку визначається з системи рівнянь

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \beta K\,\mathrm{grad}\,c, \tag{3}$$

$$\sigma = 2\mu\mathbf{e} + (\lambda\,\mathrm{tr}\,\mathbf{e} - -\beta K c)\,\mathbf{I}, \tag{4}$$

де $\mathbf{u}$ – вектор переміщення, σ – тензор напружень, $\mathbf{e}$ – тензор деформації, λ і μ – сталі Ляме, $K = \lambda + 2\mu/3$, β – коефіцієнт дифузійного розширення, $\mathbf{I}$ – одиничний тензор.

Якщо розглядають обмежене середовище, то на границі тіла задають крайові умови; для необмеженого середовища система рівнянь (1) – (4) повинна бути доповнена умовами

$$c\big|_{x\to\infty} = 0, \quad \mathbf{u}\big|_{x\to\infty} = 0.$$

Стандартний метод розв'язування системи (1) – (4) – використання подання напружень через потенціал переміщень Φ [3, 4]

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij}\Delta\right)\Phi, \tag{5}$$

де δ_{ij} – дельта-символ Кронекера. Потенціал Φ визначають з рівняння

$$\Delta\Phi = mc, \quad m = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta. \tag{6}$$

Тут ν - коефіцієнт Пуассона.

У нескінченному тілі, двовимірному за просторовими координатами, розв'язок крайової задачі (1) - (2) подається формулою Пуассона [5]

$$c(\mathbf{x},t) = \int\limits_{R^2} E\left(|\mathbf{x} - zeta|, t\right) c_0(\zeta) d\zeta + \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} E\left(|\mathbf{x} - \zeta|, t-\tau\right) Q(\zeta,\tau) d\zeta d\tau, \tag{7}$$

де фундаментальний розв'язок

$$E\left(|\mathbf{x}|, t\right) = \frac{1}{4\pi a t}\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4at}\right) \tag{8}$$

є однаковим (з точністю до функції Гевісайда) як для задачі Коші

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a\Delta c,$$
$$c\big|_{t=0} = \delta(\mathbf{x}),$$

так і для задачі про дію джерела

$$\frac{\partial c}{\partial t} = a\Delta c + \delta(\mathbf{x})\delta(t).$$

Тут $\delta(\mathbf{x})$ - дельта - функція Дірака.

Напруження, що відповідають фундаментальному розв'язку (8), можна отримати з рівняння (6) і формул (5), записаних у циліндричній системі координат

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = -2\mu\Delta\Phi,$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right). \tag{9}$$

Розв'язок цієї задачі наведено в [4]

$$\sigma_{rr} = -\frac{\mu m}{4\pi r^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right)\right],$$
$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu m}{4\pi r^2}\left[\left(1 + \frac{r^2}{2at}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{4at}\right) - 1\right].$$

У працях [6 – 9] розглянуто узагельнене рівняння дифузії (однорідне) з дробовою похідною
$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha} = a\Delta c + Q(\mathbf{x}, t), \tag{10}$$
де параметр $0 < \alpha < 2$, а дробова похідна розуміється або в сенсі Рімана - Ліувілля [10]
$$\frac{\partial^\alpha c(\mathbf{x}, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} c(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n,$$
або в сенсі Капуто [11]
$$\frac{\partial^\alpha c(\mathbf{x}, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n c(\mathbf{x}, t)}{\partial t^n} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n.$$
Ми використовуємо дробову похідну в сенсі Капуто, яку можна розглядати як регуляризацію в точці $t = 0$ дробової похідної в сенсі Рімана-Ліувілля [12].

Рівняння (10) описує так звану аномальну дифузію, причому розрізняють "субдифузію" $(0 < \alpha < 1)$ і "супердифузію" $(1 < \alpha < 2)$. Для цього рівняння задають початкові умови
$$c\big|_{t=0} = c_0(\mathbf{x}) \quad \text{для випадку} \quad 0 < \alpha < 2, \tag{11}$$
а також
$$\frac{\partial c}{\partial t}\Big|_{t=0} = c_0'(\mathbf{x}) \quad \text{для випадку супердифузії} \quad 1 < \alpha < 2. \tag{12}$$
Підкреслимо, що у випадку класичного рівняння дифузії не було початкової умови (12), яку надалі приймемо у спрощеному вигляді
$$\frac{\partial c}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{13}$$

У нескінченному середовищі розв'язок крайової задачі (10), (11), (13) можна записати у вигляді, що узагальнює формулу Пуассона (7)
$$c(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{R^2} E_1\left(|\mathbf{x}-\zeta|, t\right) c_0(\zeta) d\zeta + \int\limits_0^t \int\limits_{R^2} E_2\left(|\mathbf{x}-\zeta|, t-\tau\right) Q(\zeta, \tau) d\zeta d\tau,$$
де фундаментальний розв'язок $E_1(|\mathbf{x}|, t)$ відповідає задачі Коші, а фундаментальний розв'язок $E_2(|\mathbf{x}|, t)$ – задачі про дію джерела.

Мета цієї праці – дослідити дифузійні напруження у твердому тілі, зумовлені фундаментальними розв'язками $E_1(|\mathbf{x}|, t)$ і $E_2(|\mathbf{x}|, t)$.

Спочатку розглянемо задачу Коші
$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha} = a\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right). \tag{14}$$
$$c\big|_{t=0} = \frac{p}{2\pi r}\delta(r), \tag{15}$$

де p – інтенсивність початкового імпульсу. Крім того, у випадку супердифузії ($1 < \alpha < 2$) задається умова (13).

Застосуємо до задачі (14) - (15) інтегральне перетворення Лапласа за часом t (позначатимемо зірочкою) і перетворення Ганкеля за просторовою координатою r (позначатимемо рискою). В результаті отримаємо зображення

$$\overline{c}^* = \frac{q}{2\pi}\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a\xi^2}, \tag{16}$$

де s – параметр перетворення Лапласа, ξ – параметр перетворення Ганкеля. Ми використали формули для перетворення Лапласа дробової похідної функції

$$\mathrm{L}\left\{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t)\right\} = s^\alpha \mathrm{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} f^{(k)}\left(0^+\right), \quad n-1 < \alpha < n,$$

одержану в [11].

Позначимо через $F(\xi, t)$ обернене перетворення Лапласа зображення (16)

$$F(\xi,t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a\xi^2}\right\}.$$

Тоді

$$c = \frac{p}{2\pi}\int\limits_0^\infty F(\xi,t)J_0(r\xi)\xi d\xi, \tag{17}$$

де $J_n(r)$ - функція Бесселя першого роду порядку n.

З рівняння (6) і подання (9) отримуємо ненульові компоненти тензора напружень

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu m p}{\pi}\int\limits_0^\infty F(\xi,t)J_0(r\xi)\xi d\xi,$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu m p}{\pi}\int\limits_0^\infty F(\xi,t)J_2(r\xi)\xi d\xi. \tag{18}$$

У випадку задачі про дію джерела маси маємо

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha} = a\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{q}{2\pi r}\delta(r)\delta(t), \tag{19}$$

де q - інтенсивність джерела.

Застосувавши до рівняння (19) інтегральні перетворення Лапласа і Ганкеля, отримаємо

$$\overline{c}^* = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{s^\alpha + a\xi^2}. \tag{20}$$

Підкреслимо, що тільки для $\alpha = 1$ зображення (16) і (20) збігаються.

Позначивши через

$$G(\xi,t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha + a\xi^2}\right\},$$

прийдемо до виразів

$$c = \frac{q}{2\pi}\int\limits_0^\infty G(\xi,t)J_0(r\xi)\xi d\xi;$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu m q}{\pi}\int\limits_0^\infty G(\xi,t)J_0(r\xi)\xi d\xi;$$

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu m q}{\pi}\int\limits_0^\infty G(\xi,t)J_2(r\xi)\xi d\xi.$$

Інтенсивність початкового імпульсу p має таку саму розмірність, як у класичному випадку, на відміну від коефіцієнта дифузії a та інтенсивності джерела q. Безрозмірними величинами є

$$\frac{at^\alpha c}{p},\quad \frac{atc}{q},\quad \frac{at^\alpha}{2\mu m p}\sigma_{ij},\quad \frac{at}{2\mu m q}\sigma_{ij},$$

а також безрозмірна відстань

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{a}t^{\alpha/2}}.$$

Детальніше проаналізуємо випадок $\alpha = 1/2$. Для цього значення параметра α маємо

$$F(\xi,t) = \exp\left(a^2\xi^4 t\right)\operatorname{erfc}\left(a\xi^2\sqrt{t}\right). \tag{21}$$

Підставимо у формулу (17) вираз (21), врахуємо подання функції erfc x через інтеграл

$$\operatorname{erfc}\left(a\xi^2\sqrt{t}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a\xi^2\sqrt{t}}^\infty e^{-\omega^2}d\omega,$$

зробимо заміну $\omega = a\xi^2\sqrt{t} + u$, змінимо порядок інтегрування і використаємо інтеграли, наведені в [13, с. 731]. Остаточно одержимо

$$c = \frac{p}{4\pi^{3/2}a\sqrt{t}}\int\limits_0^\infty \exp\left(-u^2 - \frac{\rho^2}{8u}\right)\frac{du}{u}. \tag{22}$$

Схожі перетворення формул (18) приводять до таких виразів для ненульових компонент тензора напружень:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\mu m p}{2\pi^{3/2}a\sqrt{t}\rho^2}\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\left[1-\exp\left(-\frac{\rho^2}{8u}\right)\right]du,$$

(23)

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu m p}{2\pi^{3/2}a\sqrt{t}\rho^2}\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\left[\left(1+\frac{\rho^2}{u}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{8u}\right)-1\right]du.$$

У випадку задачі про дію джерела функція $G(\xi,t)$ для $\alpha = 1/2$ має вигляд

$$G(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - a\xi^2\exp\left(a^2\xi^4 t\right)\operatorname{erfc}\left(a\xi^2\sqrt{t}\right).$$

Не зупиняючись на проміжних викладках (подібних до описаних вище), наведемо остаточні вирази для концентрації

$$c = \frac{q}{8\pi^{3/2}at}\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-1/u^2}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2 u}{8}\right)\left(1-\frac{\rho^2 u}{8}\right)du \tag{24}$$

і компонент тензора напружень

$$\sigma_{rr} = -\frac{\mu m q}{8\pi^{3/2}at}\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-1/u^2}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2 u}{8}\right)du,$$

(25)

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\mu m q}{8\pi^{3/2}at}\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-1/u^2}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2 u}{8}\right)\left(1-\frac{\rho^2 u}{4}\right)du.$$

На рисунках 1 – 3 зображено графіки залежності концентрації та напружень від безрозмірної координати ρ, обчислені за формулами (22) - (25). Криві 1 відповідають класичному розв'язку ($\alpha = 1$), криві 2 – фундаментальному розв'язку задачі Коші для $\alpha = 1/2$, криві 3 – фундаментальному розв'язку задачі про дію джерела маси для $\alpha = 1/2$.

Зазначимо, що у двовимірному випадку фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння аномальної дифузії (а, отже, і відповідні компоненти тензора напружень), на відміну від класичного випадку, мають логарифмічну особливість у початку координат; фундаментальний розв'язок задачі про дію джерела маси і відповідні напруження є неперервними.

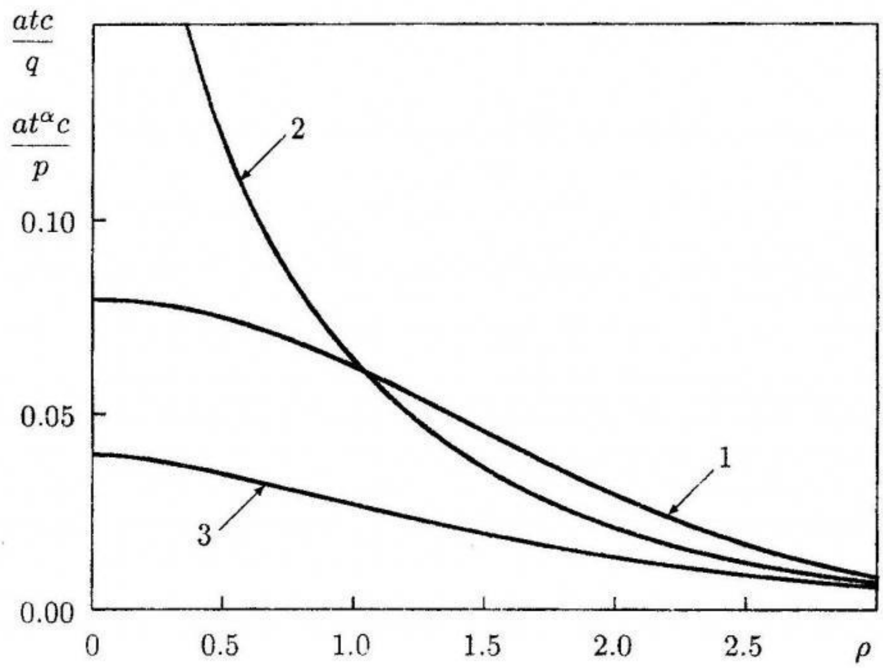
$\frac{atc}{q}$
$\frac{at^{\alpha}c}{p}$
0.10
0.05
0.00
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
ρ
1
2
3

Рис. 1.

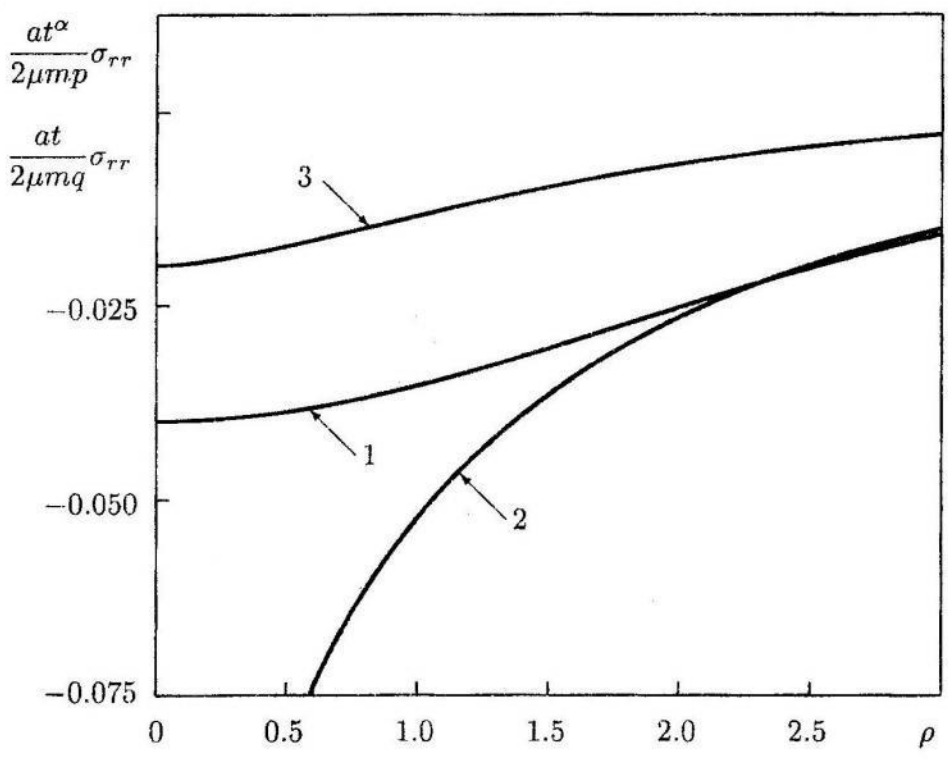
$\frac{at^{\alpha}}{2\mu mp}\sigma_{rr}$
$\frac{at}{2\mu mq}\sigma_{rr}$
−0.025
−0.050
−0.075
0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
ρ
1
2
3

Рис. 2.

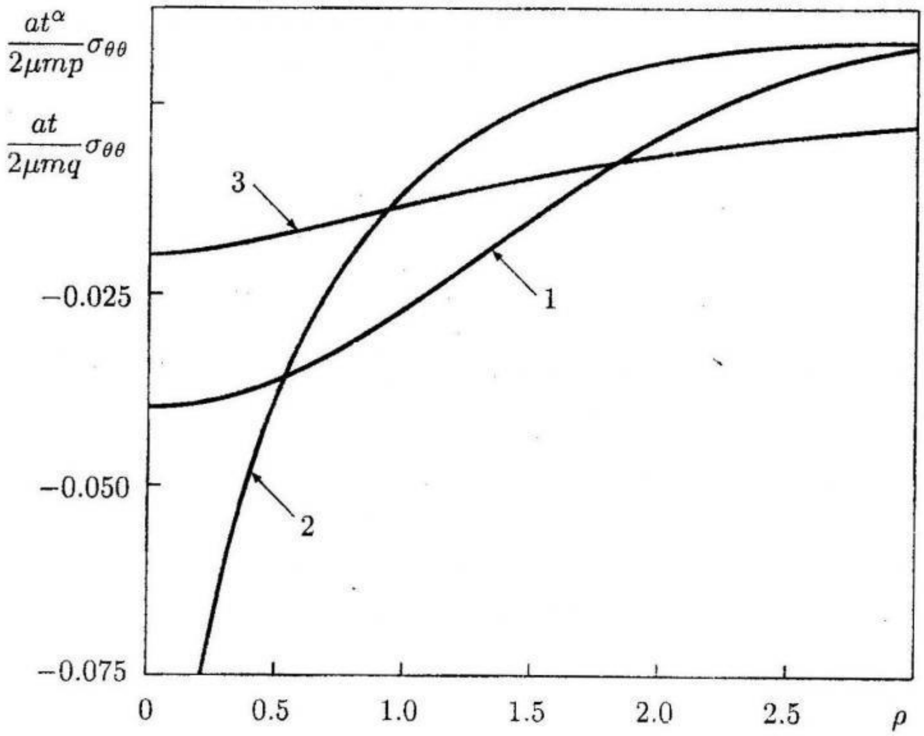

Рис. 3.

1. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому тілі // Доп. АН УРСР. – 1961. – N 2. – С. 169-172.
2. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла // Доп. АН УРСР. – 1963. – N 3. – С. 336-339.
3. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. – М., 1963.
4. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М., 1962.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математичесокй физики. – М., 1977.
6. *Nigmatullin R. R.* The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal qeometry // Phys. Stat. Sol. Ser. B. – 1986. – Vol. 133. – N 1. – P. 425-430.
7. *Wyss W.* The fractional diffusion equation // J. Math. Phys. – 1986. – Vol. 27 – N 10. – P. 2782-2785.
8. *Fujita Y.* Integrodifferential equation which interpolates the heat and the wave equation // Osaka J. Math. – 1990. – Vol. 27. – P. 309-321; 797-804.
9. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26 – С. 485-492.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Том II. Пре-

образования Бесселя. Интегралы от специальных функций. – М., 1970.

11. *Caputo V.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529-539.
12. *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus and stable probability distributions // Arch. Mech. – 1998. – Vol. 50. – N 3. – P. 377-388.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL ANOMALOUS DIFFUSION EQUATION AND DIFFUSION STRESSES ASSOSIATED TO THEM

Yuriy Povstenko, Stepan Derkach

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

The theory of diffusion stresses in a solid based on the diffusion equation with fractional time derivative of the order α has been proposed. The stresses in two-dimensional medium corresponding to fundamental solutions of Cauchy and source problems for anomalous diffusion equation. The case $\alpha = 1/2$ is analyzed in detail.

Key words: diffusion equation with fractional derivative, anomalous diffusion, diffusion stresses.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.2004
Прийнята до друку 03.11.2004