ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.123–130

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.123–130

УДК 517.5

ПРО АБСЦИСУ ЗБІЖНОСТІ ІНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА-СТІЛТЬЄСА

Олена ПОСІКО
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Отримано оцінки для абсциси збіжності інтеграла $\int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x)$, де функція f невід'ємна, функція F невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0, +\infty)$.

Ключові слова: інтеграл Лапласа, інтеграл Стілтьєса, ряд Діріхле, абсциса збіжності.

Нехай F – невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0, +\infty)$ функція, f – така невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція, що для кожних $\sigma \in \mathbb{R}$ і $A > 0$ існує інтеграл Лебега-Стілтьєса $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$. Інтегралом Лапласа-Стілтьєса називатимемо

$$I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x). \tag{1}$$

Якщо $F(x) \equiv x$, то

$$I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dx \tag{2}$$

є звичайним інтегралом Лапласа. Якщо ж (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), $F(x) = n(x)$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція цеї послідовності, f – така невід'ємна на $[0, +\infty)$ функція, що $f(\lambda_n) = a_n \geqslant 0$ для всіх $n \geqslant 0$, то

$$I(\sigma) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{\lambda_n \sigma} \tag{3}$$

є рядом Діріхле з невід'ємними показниками та коефіцієнтами.

Число $\sigma_з \in (-\infty, +\infty)$ будемо називати абсцисою збіжності інтеграла (1), якщо він збіжний для $\sigma < \sigma_з$ і розбіжний для $\sigma > \sigma_з$. Якщо інтеграл (1) збіжний для кожного $\sigma < +\infty$, то приймаємо $\sigma_з = +\infty$. Якщо інтеграл (1) розбіжний для кожного $\sigma > -\infty$, то приймаємо $\sigma_з = -\infty$.

© Посіко О., 2004

Зрозуміло таке: якщо $f(x) = 0$ для всіх $x \geqslant x_0$, то $\sigma_з = +\infty$. Надалі цей випадок ми виключимо з розгляду, тобто вважатимемо, що $f(x) \not\equiv 0$ на кожному проміжку $[x_0, +\infty)$.

Добре відомо ([1]; [2], с. 116) таке: якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \sum_{k=1}^n a_k = \beta > 0$, то для ряду Діріхле (3) $\sigma_з = -\beta$, якщо $\beta \leqslant 0$ і $\sum_{k=1}^\infty a_k < +\infty$, то $\sigma_з = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \sum_{k=n}^\infty a_k$. Подібний результат правильний для інтегралів (2). Фактично [5], $\sigma_з = -\beta$, якщо $\beta = \overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{1}{x} \ln \int_0^x f(x)dx > 0$, якщо $\beta \leqslant 0$, то $\sigma_з = -\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \dfrac{1}{x} \ln \int_x^\infty f(x)dx$.

К. Кнопп [6] дослідив збіжність інтеграла Стілтьєса

$$I(\sigma) = \int\limits_0^\infty e^{x\sigma} d\chi(x), \tag{4}$$

де χ – функція обмеженої варіації на кожному скінченному проміжку (зрозуміло, інтеграл (4) є узагальненням інтеграла (2) і частковим випадком інтеграла (1) з $f(x) \equiv 1$, звичайно, за умови, що χ – невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0, +\infty)$ функція). Він показав, що абсциса збіжності інтеграла (4)

$$\sigma_з = -\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \chi_n}{n}, \tag{5}$$

де

$$\chi_n = \sup\{|\chi(x) - \chi(n)| : n \leqslant x \leqslant n+1\}, \tag{6}$$

і зауважив, що ряд Діріхле (3) збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжний інтеграл (4), де

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \lambda_1, \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n, & \lambda_n < x \leqslant \lambda_{n+1} \end{cases}.$$

Для рядів Діріхле зручнішою у застосуванні є формула Валірона

$$\sigma_з = -\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln a_n}{\lambda_n}, \tag{7}$$

доведена ([7]; [2], с. 115) за умови $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$. О.М. Мулява [8] показала, що формула Валірона є правильною також за умови $\ln n = o(\ln a_n)$, $n \to \infty$.

Мета праці – отримати аналоги результатів Ж. Валірона та О.М. Муляви для абсциси збіжності інтеграла (1).

1. Оцінки абсциси збіжності знизу. Позначимо через V клас невід'ємних, неспадних, необмежених і неперервних справа на $[0, +\infty)$ функцій, приймемо

$$\underline{\alpha} =: \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)},$$

а для $\gamma > 0$ і $\delta \in (-\infty, +\infty)$ нехай

$$h(\gamma, \delta) =: \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{(\gamma - 1) \ln f(x) + \delta x}{\ln F(x)}.$$

Теорема 1. *Якщо* $F \in V$ *і* $h(\gamma,\delta) > 1$, *то* $\sigma_з \geqslant \gamma\underline{\alpha} - \delta$.

Доведення. Припустимо, що $\underline{\alpha} > -\infty$. Тоді для кожного $\sigma < \gamma\underline{\alpha} - \delta$ маємо

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)} > \frac{\sigma+\delta}{\gamma},$$

тобто для всіх досить великих x

$$\ln f(x) + \frac{\sigma+\delta}{\gamma}x = x\left(-\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)} + \frac{\sigma+\delta}{\gamma}\right) < 0.$$

Тому

$$f(x)e^{x\sigma} = \exp\left\{-((\gamma-1)\ln f(x) + \delta x) + \gamma\left(\ln f(x) + \frac{\sigma+\delta}{\gamma}x\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{(\gamma-1)\ln f(x)+\delta x}{\ln F(x)}\ln F(x)\right\} \leqslant \exp\{-h\ln F(x)\} = \frac{1}{F(x)^h}$$

для кожного $h \in (1, h(\gamma,\delta))$ і всіх досить великих x. Тому для будь-якого $\sigma < \gamma\underline{\alpha} - \delta$ маємо

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x) \leqslant \int_{x_0}^{\infty}\frac{dF(x)}{F(x)^h} < +\infty$$

(збіжність цього інтеграла визначив О.Б. Скасків), звідки випливає, що $\sigma_з \geqslant \gamma\underline{\alpha} - \delta$. Для $\underline{\alpha} = -\infty$ ця нерівність очевидна. Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Нехай* $F \in V$ *і* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln F(x)}{x} = \overline{\tau}$. *Тоді* $\sigma_з \geqslant \underline{\alpha} - \overline{\tau}$ *за умови, що принаймні одна з величин* $\underline{\alpha}$ *або* $\overline{\tau}$ *не дорівнює* $+\infty$.

Справді, за умови $\overline{\tau} < +\infty$ виберемо $\gamma = 1$ і $\delta = \overline{\tau} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h(\gamma,\delta) = \delta\varliminf_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln F(x)} = \frac{\overline{\tau}+\varepsilon}{\overline{\tau}} > 1$$

і за теоремою 1 $\sigma_з \geqslant \underline{\alpha} - \overline{\tau} - \varepsilon$ звідки з огляду на довільність ε випливає потрібна оцінка, яка є очевидною, якщо $\overline{\tau} = +\infty$ і $\underline{\alpha} < +\infty$.

Наслідок 2. *Нехай* $F \in V$. *Якщо* $\varliminf\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln F(x)} = \underline{h} > 0$, *то* $\sigma_з \geqslant \dfrac{\underline{h}+1}{\underline{h}}\underline{\alpha}$, *якщо* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln F(x)} = \overline{h} < -1$, *то* $\sigma_з \geqslant \dfrac{\overline{h}+1}{\overline{h}}\underline{\alpha}$.

Справді, якщо виберемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 + \varepsilon + 1/\underline{h}$, $\varepsilon > 0$, то

$$h(\gamma,\delta) = \varliminf_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\underline{h}} + \varepsilon\right)\frac{\ln f(x)}{\ln F(x)} = 1 + \varepsilon\underline{h} > 1$$

і за теоремою 1 $\sigma_з \geqslant (1+\varepsilon+1/\underline{h})\underline{\alpha}$ звідки з огляду на довільність ε випливає потрібна нерівність.

Якщо ж виберемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 + 1/(\overline{h} + \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, |\overline{h}| - 1)$, то $0 < \gamma < 1$,

$$h(\gamma, \delta) = \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{(\gamma - 1) \ln f(x)}{\ln F(x)} = (\gamma - 1) \overline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln F(x)} = (\gamma - 1)\overline{h} = \frac{\overline{h}}{\overline{h} + \varepsilon} > 1$$

і за теоремою 1 $\sigma_з \geqslant (1 + 1/(\overline{h} + \varepsilon))\underline{\alpha}$, звідки з огляду на довільність ε отримуємо потрібну нерівність.

Зауважимо, що наведені у наслідках 1 і 2 оцінки абсциси збіжності є непокращуваними [8] для рядів Діріхле (3), а отже, і для інтегралів (1). З цих оцінок випливає таке твердження.

Наслідок 3. *Нехай $F \in V$. Якщо або $\ln F(x) = o(x)$, або $\ln F(x) = o(\ln f(x))$ при $x \to +\infty$, то $\sigma_з \geqslant \underline{\alpha}$.*

Справді, якщо $\ln F(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то $\overline{\tau} = 0$ і за наслідком 1 $\sigma_з \geqslant \underline{\alpha}$.

Якщо ж $\ln F(x) = o(\ln f(x))$ при $x \to +\infty$, то або $\dfrac{\ln f(x)}{\ln F(x)} \to +\infty\ (x \to +\infty)$, або $\dfrac{\ln f(x)}{\ln F(x)} \to -\infty\ (x \to +\infty)$, або існує множина $E \subset \mathbb{R}_+$ така, що $\ln f(x) \geqslant 0\ (x \in E)$ і $\dfrac{\ln f(x)}{\ln F(x)} \to +\infty\ (x \to +\infty, x \in E)$ та $\ln f(x) < 0\ (x \in \mathbb{R}_+ \setminus E)$ і $\dfrac{\ln f(x)}{\ln F(x)} \to 0\ (x \to +\infty, x \in \mathbb{R}_+ \setminus E)$. У перших двох випадках нерівність $\sigma_з \geqslant \underline{\alpha}$ випливає з відповідних нерівностей, зазначених у наслідку 2. У третьому випадку запишемо

$$I(\sigma) = \int\limits_E f(x) e^{x\sigma} dF(x) + \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus E} f(x) e^{x\sigma} dF(x) = I_1(\sigma) + I_2(\sigma),$$

де

$$I_1(\sigma) = \int\limits_0^\infty f_1(x) e^{x\sigma} dF(x), \quad f_1(x) = \begin{cases} f(x), x \in E, \\ 0, x \in \mathbb{R}_+ \setminus E, \end{cases}$$

і

$$I_2(\sigma) = \int\limits_0^\infty f_2(x) e^{x\sigma} dF(x), \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, x \in E, \\ f(x), x \in \mathbb{R}_+ \setminus E. \end{cases}$$

Нехай $\sigma_з'$ і $\sigma_з''$ – абсциси збіжності інтегралів $I_1(\sigma)$ і $I_2(\sigma)$, а

$$\underline{\alpha}' =: \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_1(x)}, \quad \underline{\alpha}'' =: \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f_2(x)}.$$

Тоді $\sigma_з = \max\{\sigma_з', \sigma_з''\}$ і за наслідком 2

$$\sigma_з \geqslant \max\{\underline{\alpha}', \underline{\alpha}''\} = \max\left\{ \underline{\lim}_{x \to +\infty, x \in E} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}, \underline{\lim}_{x \to +\infty, x \in \mathbb{R}_+ \setminus E} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \underline{\lim}_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} = \underline{\alpha}.$$

Наслідок 3 доведено.

У зв'язку з наслідком 3 виникає запитання, наскільки умова $\ln F(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$ є необхідною для правильності нерівності $\sigma_з \geqslant \underline{\alpha}$. Для відповіді на це запитання через $LS(F)$ позначимо клас інтегралів (1) зі заданою функцією F.

Теорема 2. *Нехай $F \in V$. Для того щоб для кожного інтеграла $I \in LS(F)$ нерівність $\sigma_з \geqslant \underline{\alpha}$ для $-\infty < \underline{\alpha} < +\infty$ була правильною, необхідно і достатньо, щоб $\ln F(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$.*

Доведення. Достатність випливає з наслідку 3. Доведемо необхідність. Припустимо, що $\ln F(x) \neq o(x)$ $(x \to +\infty)$, тобто $\overline{\tau} > 0$. Тоді для $0 < \tau < \overline{\tau}$ існує послідовність $(x_k) \uparrow +\infty$ така, що $F(x_k) \geqslant e^{\tau x_k}$. Виберемо $f(x) = e^{-\underline{\alpha} x}$. Тоді для $\underline{\alpha} - \tau < \sigma < \underline{\alpha}$ маємо

$$I(\sigma) \geqslant \int_0^{x_k} f(x) e^{x\sigma} dF(x) = \int_0^{x_k} e^{x(\sigma - \underline{\alpha})} dF(x) =$$

$$= F(x) e^{x(\sigma-\underline{\alpha})}\Big|_0^{x_k} + (\underline{\alpha} - \sigma) \int_0^{x_k} F(x) e^{x(\sigma-\underline{\alpha})} dx \geqslant F(x_k) e^{x_k(\sigma - \underline{\alpha})} - F(0) \geqslant$$

$$\geqslant \exp\{x_k(\tau + \sigma - \underline{\alpha})\} - F(0) \to +\infty, \quad k \to \infty,$$

звідки випливає, що $\sigma_з \leqslant \underline{\alpha} - \overline{\tau} < \underline{\alpha}$. Теорему 2 доведено.

2. Оцінки абсциси збіжності зверху. Добре відомо (і це неважко показати), що для ряду Діріхле (3) $\sigma_з \leqslant \underline{\alpha} =: \varliminf\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{a_n}$. Для інтеграла (2) і, отже, для інтеграла (1) така нерівність може бути неправильною.

Твердження 1. *Для будь-яких $-\infty \leqslant \gamma < \beta \leqslant +\infty$ існує додатна і неперервна на $[0, +\infty)$ функція f така, що для інтеграла (2) $\sigma_з = \beta > \gamma = \underline{\alpha}$.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли $-\infty \leqslant \gamma < \beta < +\infty$.

Нехай послідовності (x_k), (t_k) і (δ_k) такі, що $0 < x_k \uparrow +\infty$, $\beta \geqslant t_k \downarrow \gamma$ при $k \to \infty$, $\delta_k > 0$, $x_k + \delta_k < x_{k+1} - \delta_{k+1}$, $\dfrac{\operatorname{sh} \beta\delta_k}{\beta} \leqslant \dfrac{\exp\{t_k - \beta\}}{2k^2}$, якщо $\beta \neq 0$, і $\delta_k \leqslant \dfrac{\exp\{t_k\}}{2k^2}$, якщо $\beta = 0$.

Нехай неперервна функція f така, що $f(x) \geqslant e^{-\beta x}$ для всіх $x \geqslant 0$, $f(x) = e^{-\beta x}$ для всіх $x \notin E =: \bigcup\limits_k (x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$ і $\max\{f(x) : |x - x_k| \leqslant \delta_k\} = f(x_k) = \exp\{-t_k x_k\}$. Тоді для інтеграла (2) маємо

$$I(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \setminus E} f(x) e^{x\sigma} dx + \int\limits_E f(x) e^{x\sigma} dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x\beta} e^{x\sigma} dx + \int\limits_E (f(x) - e^{-x\beta}) e^{x\sigma} dx = I_1(\sigma) + I_2(\sigma).$$

Зрозуміло, що абсциса збіжності інтеграла $I_1(\sigma)$ дорівнює β. Якщо $\sigma \leqslant \beta$, то для інтеграла $I_2(\sigma)$ маємо

$$0 < I_2(\sigma) < \int_E f(x)e^{x\sigma}dx = \sum_k \int_{x_k-\delta_k}^{x_k+\delta_k} f(x)e^{x\sigma}dx \leqslant \sum_k \int_{x_k-\delta_k}^{x_k+\delta_k} e^{-t_k x_k}e^{x\beta}dx =$$

$$= \sum_k e^{-t_k x_k}\begin{cases} \dfrac{\exp\{\beta(x_k+\delta_k)\} - \exp\{\beta(x_k+\delta_k)\}}{\beta}, & \beta \neq 0 \\ 2\delta_k, & \beta = 0, \end{cases} =$$

$$= \sum_k e^{-t_k x_k}\begin{cases} 2e^{\beta x_k}\dfrac{\operatorname{sh}\beta\delta_k}{\beta}, & \beta \neq 0 \\ 2\delta_k, & \beta = 0, \end{cases} = \sum_k \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Звідси випливає, що абсциса збіжності інтеграла (2) з вибраною функцією f дорівнює β, водночас

$$\underline{\alpha} = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{x_k}\ln\frac{1}{f(x_k)} = \lim_{k\to\infty} t_k = \gamma.$$

Твердження 1 для випадку $-\infty \leqslant \gamma < \beta < +\infty$ доведено. У випадку $-\infty \leqslant \gamma < \beta = +\infty$ доведення подібне. Достатньо взяти, наприклад, $f(x) = e^{-x^2}$ для всіх $x \notin E = \bigcup_k (x_k - \delta_k,\, x_k + \delta_k)$ і тоді вибрати δ_k.

Зауважимо, що побудована у твердженні 1 функція f поводиться досить нерегулярно, тобто $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$, де

$$\overline{\alpha} = \varlimsup_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}.$$

У випадку регулярного поводження функції f правильною є така теорема.

Теорема 3. *Нехай $F \in V$. Якщо $\underline{\alpha} = \overline{\alpha} = \alpha$ і або $\ln F(x) = o(x)$, або $\ln F(x) = o(\ln f(x))$ при $x \to +\infty$, то $\sigma_з = \alpha$.*

Правильність цієї теореми випливає з наслідку 3 і твердження 2.

Твердження 2. *Для абсциси збіжності інтеграла (1) правильна нерівність $\sigma_з \leqslant \overline{\alpha}$, яка б не була функція $F \in V$.*

Доведення. Якщо $\overline{\alpha} < +\infty$ і $\sigma > \overline{\alpha}$, то для будь-якого $\varepsilon \in (0, \sigma - \overline{\alpha})$ і всіх $x \geqslant x_0(\varepsilon)$ маємо $f(x) \geqslant e^{-(\overline{\alpha}+\varepsilon)x}$ і

$$\int_{x_0(\varepsilon)}^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x) \geqslant \int_{x_0(\varepsilon)}^{\infty} e^{x(\sigma-\overline{\alpha}-\varepsilon)}dF(x) \geqslant \int_{x_0(\varepsilon)}^{\infty} dF(x) = +\infty.$$

Звідси випливає, що $\sigma_з \leqslant \overline{\alpha} + \varepsilon$, а з огляду на довільність ε маємо нерівність $\sigma_з \leqslant \overline{\alpha}$, яка є очевидною, якщо $\overline{\alpha} = +\infty$. Твердження 2 доведено.

З доведення теореми 2 випливає, що у випадку скінченного α умова $\ln F(x) = o(x)$, $x \to +\infty$, є у теоремі 3 необхідною. Якщо, крім того, $\alpha \neq 0$, то й умова $\ln F(x) = o(\ln f(x))$, $x \to +\infty$ є необхідною.

Справді, якщо $\alpha > 0$ (звідси випливає, що $\ln f(x) \to -\infty$, $x \to +\infty$) і $\ln F(x_k) \geqslant q|\ln f(x_k)|$ для $(x_k) \uparrow +\infty$, $q > 0$, то для довільного $\varepsilon \in (0, \alpha)$ і $\alpha + \varepsilon > \sigma > \alpha + \varepsilon - q(\alpha - \varepsilon)$ маємо

$$\int\limits_{x_0(\varepsilon)}^{x_k} f(x)e^{x\sigma}dF(x) \geqslant \int\limits_{x_0(\varepsilon)}^{x_k} e^{x(\sigma-\alpha-\varepsilon)}dF(x) =$$

$$= F(x)e^{x(\sigma-\alpha-\varepsilon)}\Big|_{x_0(\varepsilon)}^{x_k} + (\alpha+\varepsilon-\sigma)\int\limits_{x_0(\varepsilon)}^{x_k} F(x)e^{x(\sigma-\alpha-\varepsilon)}dx \geqslant$$

$$\geqslant F(_k)e^{x_k(\sigma-\alpha-\varepsilon)} - K(\varepsilon) \geqslant \exp\{x_k(\sigma-\alpha-\varepsilon) + q\ln(1/f(x_k))\} - K(\varepsilon) \geqslant$$

$$\geqslant \exp\{x_k(\sigma-\alpha-\varepsilon+q(\alpha-\varepsilon)))\} - K(\varepsilon) \to +\infty, \quad k \to \infty,$$

звіди випливає, що $\sigma_з \leqslant \alpha + \varepsilon - q(\alpha - \varepsilon)$, тобто з огляду на довільність ε маємо $\sigma_з \leqslant \alpha - q\alpha < \alpha$.

Якщо $\alpha < 0$ (звідси випливає, що $\ln f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$) і $\ln F(x_k) \geqslant q\ln f(x_k)$ для $(x_k) \uparrow +\infty$, $q > 0$, то для довільного $\varepsilon > 0$ і $\alpha + \varepsilon > \sigma > (q+1)(\alpha+\varepsilon)$ подібно маємо

$$\int\limits_{x_0(\varepsilon)}^{x_k} f(x)e^{x\sigma}dF(x) \geqslant \exp\{x_k(\sigma-\alpha-\varepsilon) + q\ln f(x_k))\} - K(\varepsilon) \geqslant$$

$$\geqslant \exp\{x_k(\sigma-\alpha-\varepsilon-q(\alpha+\varepsilon)))\} - K(\varepsilon) \to +\infty, \quad k \to \infty,$$

звідки випливає, що $\sigma_з \leqslant \alpha + \varepsilon + q(\alpha + \varepsilon)$, тобто з огляду на довільність ε маємо $\sigma_з \leqslant \alpha + q\alpha < \alpha$.

Автор висловлює щиру подяку М.М. Шереметі, О.Б. Скасківу та П.В. Філевичу за допомогу при написанні статті.

---

1. *Cahen E.* Sur la fonctions $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues // Ann. scient. Ec. Norm. sup. – 1894. - Vol. 11. – N 3. – P. 75-164.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. - М., 1976.
3. *Shnee W.* Über die Koeffizientendarstellungsformeln in der Theorie der Dirichletschen Reihen // Gött. Nachr. – 1910. – S. 1-42.
4. *Cotton E.* Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet // Bull. Soc. Math. de France. – 1917. – Vol. 45. – P. 121-125.
5. *Landau E.* Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen // Sitzber. math.-phys. Kl. d. Kgl. Bayer. Acad. d. Wiss. – 1906. – Bd. 36. - S. 151-218.
6. *Knopp K.* Über die Kovergenzabszisse des Laplace-Integrals // Math. Z. – 1951. – Bd. 54. – Heft 3. – S. 291-296.
7. *Valiron G.* Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet // Bull. Soc. Math. de France. – 1924. – Vol. 53. – P. 142-148.

8. *Мулява О. М.* Про абсцису збіжності ряду Діріхле // Матем. студії. – 1998. – Т. 9. – N 2. – С. 171-176.

ON THE CONVERGENCE ABSCISSA OF LAPLACE-STILTJES INTEGRAL

Olena Posiko

Ivan Franko National University of Lviv
Universitetska Str., 1, 79000 Lviv, Ukraine

Estimates for the convergence abscissa of the integral $\int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ are obtained, where the function f is nonnegative and function F is nonnegative nondecreasing unbounded and continuous on the right on $[0, +\infty)$.

Key words: Laplase integral, Stiltjes integral, Dirichlet series, convergence abscissa.

Стаття надійшла до редколегії 03.02.2004
Прийнята до друку 03.11.2004