ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.135–142

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.135–142

УДК 517.576

ЗРОСТАННЯ У СМУГАХ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Тетяна САЛО[1], **Олег СКАСКІВ**[2]

[1] *Національний університет "Львівська політехніка", вул. Бандери, 12 79013 Львів, Україна*

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Теорема Шеремети про еквівалентність деяких характеристик зростання цілого ряду Діріхле у смузі і у всій площині зовні виняткової множини доповнена в частині описання величини цієї множини.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, центральний індекс, h-міра, h-щільність.

Нехай $H(\Lambda)$ клас цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n},$$

де $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty \ (1 \leqslant n \to +\infty)$.

Для $F \in H(\Lambda)$ і $\sigma \in \mathbb{R}$ позначимо через $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член, $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$ – центральний індекс, $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$–максимум модуля і для $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ визначимо $M(\sigma, t, a, F) = \max\{|F(\sigma + iy)| : |y - t| \leqslant a, y \in \mathbb{R}\}$.

М.М.Шеремета [1] одержав такий результат.

Теорема А. *Якщо для показників функції $F \in H(\Lambda)$ виконується умова $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$, а для коефіцієнтів $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$ – умова*

$$(\exists\theta, \gamma)(\forall n \geqslant 0) : |\theta_n - \theta| \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

то для кожного $\varepsilon > 0$ і будь-яких $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ для всіх σ зовні деякої множини скінченної міри правильна нерівність

$$\ln M(\sigma, F) < (1 + \varepsilon) \ln M(\sigma, t, a, F). \tag{2}$$

Ми доповнимо цю теорему у частині описання виняткової множини.

Нехай L клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Для $\Phi \in L$ позначимо

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \varliminf_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \Phi(\sigma)} > 0\}.$$

Через L^+ позначимо клас функцій $h \in L$, в який входять лише неперервно диференційовні функції з неспадною похідною.

Для вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$ і функції $h \in L^+$ назвемо величину

$$m_h E = \int_E dh(x)$$

h – *мірою* множини E.

Нехай скрізь нижче φ – функція обернена до Φ, $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ і $N(t) = \int_0^t \frac{n(x)-1}{x} dx$.

Позначимо $S_1 = \{z = \sigma + iy : |y - t_1| \leqslant a_1, \sigma \in \mathbb{R}\}$, $S_2 = \{z = \sigma + iy : |y - t_2| \leqslant a_2, \sigma \in \mathbb{R}\}$. В [2] на стор. 143–146 фактично доведено таке твердження, яке ми сформулюємо у вигляді леми.

Лема 1. *Нехай $F \in H(\Lambda)$, $t_j \in \mathbb{R}$ і $a_j > 0$ $(j = 1, 2)$ такі, що $S_1 \subset S_2$. Якщо існують функція $l \in L$ і необмежена множина $E_1 \subset [0; +\infty)$ такі, що для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in E_1$ виконується нерівність*

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp\left\{ -\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} l(t) N(et) dt \right\}, \tag{3}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$, то при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in E_1)$

$$\begin{aligned} &\ln M(\sigma, t_2, a_2, F) \geqslant \ln M(\sigma, t_1, a_1, F) \geqslant \\ &\geqslant \ln(M(\sigma, t_2, a_2, F) + o(M(\sigma, F))) + o(\ln M(\sigma, F)). \end{aligned} \tag{4}$$

З цієї леми легко отримати твердження.

Лема 2. *Нехай $F \in H(\Lambda)$ і для коефіцієнтів $a_n = |a_n| e^{i\theta_n}$ виконується умова (1). Якщо існують функція $l \in L$ і необмежена множина $E_1 \subset [0; +\infty)$ такі, що для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in E_1$ виконується нерівність (3), то при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \in E_1)$ правильна нерівність (2).*

Доведення леми 2. З умови (1) елементарно одержуємо нерівність (див. [1])

$$\begin{aligned} |F(\sigma)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{i(\theta_n - \theta) + \sigma \lambda_n} \right| \geqslant Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{i(\theta_n - \theta) + \sigma \lambda_n} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} Re(|a_n| e^{i(\theta_n - \theta) + \sigma \lambda_n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} \cos(\theta_n - \theta) \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} \cos \gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Використаємо лему 1, вибираючи $a_1 = a, t_1 = t$ і a_2, t_2 так, що дійсна вісь $\{z = \sigma : \sigma \in \mathbb{R}\} \subset S_2$ та $S_1 \subset S_2$. З нерівностей (5) і (4) послідовно отримуємо

$$M(\sigma, t_2, a_2, F) \geqslant |F(\sigma)| \geqslant \cos\gamma M(\sigma, F),$$

а також при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E_1)$

$$\ln M(\sigma, t, a, F) \geqslant \ln(M(\sigma, F)\cos\gamma + o(M(\sigma, F)))+ \\ + o(\ln M(\sigma, F)) = (1 + o(1)) \ln M(\sigma, F).$$

Отже, лему 2 доведено.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай $h \in L^+$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in H(\Lambda, \Phi)$, для коефіцієнтів $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$ виконується умова (1) і*

$$(\exists q > 0)\ (\forall b > 0) : \int\limits_1^{+\infty} \frac{h'(\varphi(bt) + q)}{t^2} N(t)dt < +\infty, \tag{6}$$

то для кожного $\varepsilon > 0$ і будь-яких $t \in \mathbb{R}, a > 0$ нерівність (2) справджується для всіх σ зовні деякої множини E скінченної h - міри ($m_h E < +\infty$).

Доведення теореми 1. Для $b > 0$ означимо

$$C(x) = \left(\int\limits_x^{+\infty} \frac{h'(\varphi(bt) + q)}{t^2} N(et)dt \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

З умови (6) випливає, що $C(x) \nearrow +\infty$ $(x \to +\infty)$. Крім того,

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{h'(\varphi(bt) + q)}{t^2} C(t)N(et)dt = - \int\limits_1^{+\infty} C(t)dC(t)^{-2} = \\ = 2\int\limits_1^{+\infty} \frac{dC(t)}{C(t)^2} = \frac{2}{C(1)} < +\infty. \tag{7}$$

Звідси, враховуючи умову $h \in L^+$, маємо $C \stackrel{def}{=} \int\limits_1^{+\infty} C(t)\frac{N(et)}{t^2}dt < +\infty$.

Нехай $\alpha(x) = \frac{q}{C}\int\limits_1^x C(t)\frac{N(et)}{t^2}dt$, $\alpha_n = \exp\left\{ -\int\limits_0^{\lambda_n} \alpha(t)dt \right\}$.

Розглянемо ряд Діріхле

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z\lambda_n}.$$

Оскільки $\frac{|a_n|}{\alpha_n}e^{\sigma\lambda_n} \leqslant |a_n|\exp\{(\sigma+\alpha(\lambda_n))\lambda_n\} \leqslant |a_n|\exp\{(\sigma+q)\lambda_n\}$, то $F^* \in H(\Lambda)$.

Нехай тепер (R_j) – послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma, F^*)$, тобто $\nu(\sigma, F^*) = j$ при $R_j \leqslant \sigma < R_{j+1}$ і, якщо $\nu(R_{j+1}, F^*) = j+p$, то $R_{j+1} = R_{j+2} = \dots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$. Якщо $(\sigma - \alpha(\lambda_j)) \in [R_j, R_{j+1})$, то за означенням $\mu(\sigma, F^*)$

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n}e^{(\sigma-\alpha(\lambda_j))\lambda_n} \leqslant \frac{|a_j|}{\alpha_j}e^{(\sigma-\alpha(\lambda_j))\lambda_j} \quad (n \geqslant 0)$$

і тому при $\sigma \in [R_j + \alpha(\lambda_j), R_{j+1} + \alpha(\lambda_j))$ і $n \neq j$

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j|e^{\sigma\lambda_j}} \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_j}e^{\alpha(\lambda_j)(\lambda_n-\lambda_j)} = \exp\left\{-\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n}(\alpha(t)-\alpha(\lambda_j))dt\right\} < 1.$$

Отже, для $\sigma \in [R_j + \alpha(\lambda_j), R_{j+1} + \alpha(\lambda_j))$ маємо $\nu(\sigma, F) = j$, оскільки

$$\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n}(\alpha(t)-\alpha(\lambda_j))dt = \frac{q}{C}\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n - t}{t}C(t)N(et)dt,$$

то

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F)\exp\left\{-\frac{q}{C}\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n - t}{t}C(t)N(et)dt\right\}, \tag{8}$$

для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in E_1 \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty}[R_j + \alpha(\lambda_j), R_{j+1} + \alpha(\lambda_j))$.

Приймемо $l(t) = \frac{q}{C}C(t)$ і застосуємо лему 2. Отримаємо, що нерівність (4) правильна для всіх $\sigma \in E_1$.

Позначимо $E = [R_1 + \alpha(\lambda_1), +\infty) \setminus E_1$ і доведемо, що $m_h E < +\infty$.

Оскільки при $\sigma \geqslant \sigma_0$

$$K\sigma\Phi(\sigma) \leqslant \ln\mu(\sigma, F) = \ln\mu(0, F) + \int\limits_0^{\sigma}\lambda_{\nu(t,F)}dt \leqslant 2\sigma\lambda_{\nu(\sigma-0,F)},$$

звідки при $\sigma \geqslant \sigma_0$

$$\sigma \leqslant \varphi(\frac{2}{K}\lambda_{\nu(\sigma-0,F)}), \tag{9}$$

позаяк $\nu(R_n + \alpha(\lambda_{n-1}) - 0, F) = n-1$, маємо $R_n + \alpha(\lambda_{n-1}) \leqslant \varphi(\frac{2}{K}\lambda_{n-1})$. За теоремою

Лагранжа про кінцеві прирости, враховуючи умову $h \in L^+$, отримуємо

$$m_h E \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{R_n+\alpha(\lambda_{n-1})}^{R_n+\alpha(\lambda_n)} dh(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha(\lambda_n) - \alpha(\lambda_{n-1}))h'(R_n + \alpha(\lambda_n)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha(\lambda_n) - \alpha(\lambda_{n-1}))h'(R_n + \alpha(\lambda_{n-1}) + \alpha(\lambda_n) - \alpha(\lambda_{n-1})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{q}{C} \int\limits_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} C(t) \frac{N(4t)}{t^2} dt \right) h'(\varphi(\frac{2}{K}\lambda_{n-1}) + q) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{C} \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{h'(\varphi(\frac{2}{K}t) + q)}{t^2} C(t) N(4t) dt.$$

Звідси, враховуючи (7), маємо $m_h E < +\infty$ і теорему 1 доведено.

Для вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри $\mathrm{meas} E < +\infty$ і $h \in L$ верхньою асимптотичною h – щільністю множини E назвемо

$$D_h(E) = \varlimsup_{R \to +\infty} h(R) \mathrm{meas}(E \cap [R, +\infty)).$$

Нехай L_0 – клас додатних неспадних на $[0, +\infty)$ функцій $V(t)$ таких, що $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} < +\infty$, а L_1 – клас функцій $h \in L$ таких, що $h(x + \frac{1}{h(x)}) = O(h(x))$ $(x \to +\infty)$.

У [3] доведено таку теорему.

Теорема B. *Нехай $V \in L_0$, $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in H(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0) : \lim_{n \to +\infty} h \left(\varphi(b\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} \right) \int\limits_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0, \tag{10}$$

то для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, $D_h E = 0$ правильна нерівність

$$|a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \mu(\sigma, F) \exp \left\{ - \int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dV(t) \right\}, \tag{11}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$.

За допомогою теореми B і лем 1 і 2 одержуємо теорему.

Теорема 2. *Нехай $\Phi \in L$, $h \in L_1$. Якщо $F \in H^+(\Lambda, \Phi)$, для коефіцієнтів $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$ виконується умова (1) і*

$$(\forall b > 0) : h(\varphi(bx)) \int_x^{+\infty} \frac{N(t)}{t^2} dt \to 0 \qquad (x \to +\infty), \tag{12}$$

то для кожного $\varepsilon > 0$ і будь-яких $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ нерівність (2) справджується для всіх σ зовні деякої множини E нульової верхньої асимптотичної h – щільності $(D_h E = 0)$.

Доведення теореми 2. Нехай

$$l(x) = \int_x^{+\infty} \frac{N(et)}{t^2} dt, \qquad l_1(x) = h(\varphi(bx)) l(x).$$

За умовою (12) для кожного фіксованого $b > 0$

$$l_1(x) = eh(\varphi(bx)) \int_{ex}^{+\infty} \frac{N(et)}{t^2} dt = o(1) \qquad (x \to +\infty)$$

і, отже, функція $C(x)$, визначена рівністю

$$C(x) \stackrel{def}{=} (\max\{l_1(t) : t \geqslant x\})^{-\frac{1}{2}},$$

неспадна і $C(x) \nearrow +\infty$ при $x \to +\infty$.

Зауважимо, що

$$h(\varphi(b\lambda_n)) \int_{\lambda_n}^{+\infty} t^{-2} C(t) N(et) dt \leqslant$$

$$\leqslant h(\varphi(b\lambda_n)) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{N(et)}{t^2 (h(\varphi(bt)) l(t))^{\frac{1}{2}}} dt \leqslant$$

$$\leqslant -\sqrt{h(\varphi(b\lambda_n))} \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dl(t)}{\sqrt{l(t)}} = 2\sqrt{l_1(\lambda_n)} = o(1)$$

при $n \to +\infty$, тому для

$$V(x) = \int_0^x t^{-1} C(t) N(et) dt,$$

при $n \to +\infty$ маємо

$$h\left(\varphi(b\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(x)}{x}\right) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(x)}{x} =$$
$$= o(1)\frac{h(\varphi(b\lambda_n) + \frac{1}{h(\varphi(b\lambda_n))})}{h(\varphi(b\lambda_n))},$$

що з огляду на умову $h \in L_1$ забезпечує правильність умови (10) теореми B. Застосуємо теорему B з так вибраною функцією $V(t)$. З нерівності (11) отримаємо, що для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, $D_h E = 0$ правильна нерівність (3). Застосування леми 2 завершує доведення теореми 2.

Нехай тепер L_2 клас функцій $h \in L$ таких, що $h(x + O(1)) = O(h(x))$ $(x \to +\infty)$. Для $\Phi \in L$ позначимо

$$H^*(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : \varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \Phi(\sigma)} > 0\}.$$

Для вимірної множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри meas$E < +\infty$ і функції $h \in L$ нижньою асимптотичною h – щільністю множини E назвемо

$$d_h(E) = \varliminf_{R \to +\infty} h(R)\text{meas}(E \cap [R, +\infty)).$$

У [4] доведено аналог теореми B для класу $H^*(\Lambda, \Phi)$.

Теорема C. *Нехай $V \in L_0$, $h \in L_2$, $\Phi \in L$. Якщо $F \in H^*(\Lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0) : \lim_{n \to +\infty} h\left(\varphi(b\lambda_n)\right) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0,$$

то для всіх $n \geqslant 0$ і $\sigma \in [0, +\infty)$ зовні множини E нульової нижньої асимптотичної h – щільності ($d_h E = 0$) правильна нерівність (11).

Повторюючи міркування з доведення теореми 2 на підставі теореми C і лем 1 і 2 легко одержати таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $\Phi \in L$, $h \in L_2$. Якщо $F \in H^*(\Lambda, \Phi)$, для якої виконуються умови (1) і (12), то для кожного $\varepsilon > 0$ і будь-яких $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ нерівність (2) справджується для всіх σ зовні деякої множини E нульової нижньої h-щільності ($d_h E = 0$).*

---

1. *Шеремета М. Н.* Рост в полосе целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер.матем. – 1981. – Т. 45. – №3. – С. 676–687.

2. *Шеремета М. М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.
3. *Скасків О. Б.,Сало Т. М.* Цілі ряди Діріхле швидкого зростання і нові оцінки міри виняткових множин в теоремах типу Вімана-Валірона. //Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53. – №6. – С. 830–839.
4. *Сало Т. М.* Про величину виняткової множини у асимптотичній рівності максимального члена та суми цілого ряду Діріхле. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2002. – Вип.60. – С. 115–121.

THE GROWTH O ENTIRE DIRICHLET SERIES IN STRIPS

Tetyana Salo[1], Oleh Skaskiv[2]

[1]*Lviv Polytechnic National University, Bandery Str., 12 79013 Lviv, Ukraine*
[2]*Ivan Franko National University of Lviv, Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The Sheremeta's theorem about equivalence of some growth characteristics of an entire Dirichlet series in a strip and in whole plane outside of an exeptional set is supplemented in the part of magnitude description of this set.

Key words: Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, central index, h-measure, h-density.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.2004
Прийнята до друку 03.11.2004