ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.143–147

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.143–147

УДК 517.53

ДО ОБМЕЖЕНОСТІ l-ІНДЕКСУ ДОБУТКУ БЛЯШКЕ

Юрій ТРУХАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Побудовано приклад добутку Бляшке B з такими нулями a_n, що $\psi(n)(1-a_n)\searrow 0$, $n\to\infty$ (де ψ – повільно зростаюча функція) і $\sum\limits_{a_n>r}(1-a_n)=O((1-r)n(r))$, $r\to 1$, але B не є обмеженого l-індексу з $l(r)\asymp n(r)\ln n(r)/(1-r)$ при $r\to 1$.

Ключові слова: добуток Бляшке, l-індекс.

Нехай (a_k) – послідовність чисел з $\mathbb{D}=\{z:|z|<1\}$, занумерованих в порядку неспадання модулів, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)<+\infty$, а $B(z)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{a_k}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}$ – добуток Бляшке. Для додатної неперевної на $[0,1)$ функції l такої, що $(1-r)l(r)>\beta>1$ для всіх $r\in[0,1)$, функція B за означенням [1, с. 71] називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що $\frac{|B^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)}\leqslant\max\left\{\frac{|B^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)}:0\leqslant k\leqslant N\right\}$ для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $z\in\mathbb{D}$. Як і в [1, с. 71] для $q\in[0,\beta)$ приймемо $\lambda_1(q)=\inf\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)}:|r-r_0|\leqslant\frac{q}{l(r_0)},0\leqslant r_0<1\right\}$ і $\lambda_2(q)=\sup\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)}:|r-r_0|\leqslant\frac{q}{l(r_0)},0\leqslant r_0<1\right\}$ і будемо говорити, що $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$, якщо $(1-r)l(r)>\beta>1$ для всіх $r\in[0,1)$ і $0<\lambda_1(q)\leqslant 1\leqslant\lambda_2(q)<+\infty$ для кожного $q\in[0,\beta)$.

У [2] доведено таке: якщо $n(1-|a_n|)\searrow 0$, $n\to\infty$, то для того щоб добуток Бляшке B був обмеженого l-індексу з такою функцією $l\in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta>1$, що $l(r)\asymp\frac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$ при $r\to 1$, достатньо, а у випадку додатних нулів і необхідно, щоб

$$\sum_{k=2n(r)}^{\infty}(1-|a_k|)=O((1-r)n(r)\ln n(r)),\quad r\to 1. \tag{1}$$

Неістотно змінюючи наведене в [2] доведення цього результату, можна показати, що умову $n(1-|a_n|)\searrow 0$, $n\to\infty$ можна замінити умовою $n^\gamma(1-|a_n|)\searrow 0$, $n\to\infty$, де число $\gamma\in(0,1]$. Виникає питання, чи можна цю умову замінити умовою

$\psi(n)(1-|a_n|) \searrow 0$, $n \to \infty$, де ψ – неперервно диференційована повільно зростаюча функція, тобто $x\psi'(x)/\psi(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Буде показано, що відповідь на це питання негативна.

Теорема. *Для кожної неперервно диференційованої на $[1, +\infty)$ повільно зростаючої функції ψ такої, що $\psi'(2x) \asymp \psi'(x)$ при $x \to \infty$, існує такий добуток Бляшке B з додатними нулями a_n, що:*

а) $\psi(n)(1-a_n) \searrow 0$, $n \to \infty$;

б) $\sum\limits_{a_n > r} (1-a_n) = O((1-r)n(r)), r \to 1$;

в) B не є обмеженого l-індексу з такою функцією $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, що $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$ при $r \to 1$.

Зауважимо, що з *б* випливає (1).

Доведення цієї теореми близьке до доведення, яке застосував І.Е. Чижиков у [3] і грунтується на одному результаті з [1]. Для $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ і $q \in (0, \beta)$ приймемо $G_q(B) = \bigcup\limits_k \left\{z : |z-a_k| \leqslant \dfrac{q}{l(|a_k|)}\right\}$ і $n(r, z_0, 1/B) = \sum\limits_{|a_k - z_0| \leqslant r} 1$. Безпосереднім наслідком теореми 2.1 з [1, с. 27] є така лема.

Лема. *Для функції $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$ добуток Бляшке B є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли:*

1) для кожного $q \in (0, \beta)$ існує таке $P(q) > 0$, що $|B'(z)/B(z)| \leqslant P(q)l(|z|)$ для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus G_q(B)$;

2) для кожного $q \in (0, \beta)$ існує таке $n^*(q) \in \mathbb{N}$, що $n(q/l(|z_0|), z_0, 1/B) \leqslant n^*(q)$ для кожного $z_0 \in \mathbb{D}$.

1. *Доведення теореми.* Без втрати загальності можемо вважати, що $\psi(1) = 1$ і $\psi(x)/x^2 \searrow 0$, $x \to +\infty$. Нехай (n_k) – послідовність натуральних чисел така, що $n_{k+1} > 4n_k$, а

$$a_m = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{m^2}, & 1 \leqslant m \leqslant n_1,\ 2n_k < m \leqslant n_{k+1}, \\ 1 - \dfrac{1}{n_k^2}\dfrac{\psi(n_k)}{\psi(m)}, & n_k < m \leqslant 2n_k. \end{cases} \tag{2}$$

Неважко побачити, що правильне твердження *а* теореми.

Для $r \in (0,1)$ приймемо $k(r) = \min\{k : a_{n_k} > r\}$. Якщо $2n_{k(r)-1} \leqslant n(r) < n_{k(r)}$, то з огляду на нерівність $n_{k+1} > 4n_k$ маємо

$$\sum_{a_m > r} (1-a_m) = \sum_{m=n(r)}^{n_k(r)} \frac{1}{m^2} + \sum_{k=k(r)}^{\infty} \left(\sum_{m=n_k+1}^{2n_k} \frac{\psi(n_k)}{n_k^2 \psi(m)} + \sum_{m=2n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{m^2} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=n(r)}^{\infty} \frac{1}{m^2} + \sum_{k=k(r)}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{n(r)} + \frac{2}{n_{k(r)}} \leqslant \frac{3}{n(r)} = \frac{3n(r)}{n(r)^2} = 3n(r)(1-a_{n(r)}) =$$
$$= 3(1+o(1))n(r)(1-a_{n(r)+1}) \leqslant 3(1+o(1))n(r)(1-r), \quad r \to 1. \tag{3}$$

Якщо ж $n_{k(r)-1} \leqslant n(r) < 2n_{k(r)-1}$, то

$$\sum_{a_m > r} (1-a_m) \leqslant \sum_{m=n_{k(r)-1}+1}^{\infty} (1-a_m) = \sum_{k=k(r)-1}^{\infty} \left(\sum_{m=n_k+1}^{2n_k} \frac{\psi(n_k)}{n_k^2 \psi(m)} + \sum_{m=2n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{m^2} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=k(r)-1}^{\infty} \frac{1}{n_k} + \sum_{m=2n_{k(r)-1}}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leqslant \frac{2}{n_{k(r)-1}} + \frac{1}{2n_{k(r)-1}} = \frac{5}{2n_{k(r)-1}} =$$
$$= \frac{5}{2} n_{k(r)-1}(1-a_{n_{k(r)-1}}) \leqslant \frac{5}{2} n(r)(1-a_{2n_{k(r)-1}}) \frac{\psi(2n_{k(r)-1})}{\psi(n_{k(r)-1})} =$$
$$= \frac{5(1+o(1))}{2} n(r)(1-a_{2n_{k(r)-1}}) \leqslant \frac{5(1+o(1))}{2} n(r)(1-r), \quad r \to 1. \tag{4}$$

З нерівностей (3) і (4) випливає, що добуток Бляшке B з нулями (2) абсолютно збіжний в $\mathbb{D}$ і для нього правильне твердження *б*.

Залишилось довести твердження *в*. Для $m \in [n_k, 2n_k - 1]$ і деякого $\xi_m \in [m, m+1]$ маємо

$$a_{m+1} - a_m = (1-a_{n_k}) \frac{\psi(n_k)(\psi(m+1) - \psi(m))}{\psi(m+1)\psi(m)} = (1-a_{n_k}) \frac{\psi(n_k)\psi'(\xi_m)}{\psi(m+1)\psi(m)} \asymp$$
$$\asymp \frac{(1-a_{n_k})\psi'(n_k)}{\psi(n_k)}, \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Якщо $\varliminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{\psi'(n_k) n_k \ln n_k}{\psi(n_k)} = 0$, то з (5) для деякої зростаючої послідовності (k_l) натуральних чисел і всіх $m \in [n_{k_l}, 2n_{k_l} - 1]$ отримуємо

$$a_{m+1} - a_m = o\left(\frac{1 - a_{n_k}}{n_k \ln n_k} \right), \quad k = k_l \to \infty,$$

звідки випливає, що умова 2 леми з функцією $l(r) \asymp \dfrac{n(r) \ln n(r)}{1-r}$, $r \to 1$ не виконується і, отже, у цьому випадку правильне твердження *в* теореми.

Нехай тепер $\varliminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{\psi'(n_k) n_k \ln n_k}{\psi(n_k)} > 0$, тобто існує $\delta > 0$ таке, що $\dfrac{\psi'(n_k)}{\psi(n_k)} \geqslant \dfrac{2\delta}{n_k \ln n_k}$, $k \geqslant k_0$. Тоді з (5) одержуємо

$$a_{m+1} - a_m \geqslant \frac{\delta(1-a_{n_k})}{n_k \ln n_k}, \quad m \in [n_k, 2n_k - 1], \; k \geqslant k_0. \tag{6}$$

Приймемо $r = r_k = a_{n_k} + \dfrac{\delta(1-a_{n_k})}{2n_k \ln n_k}$. З (6) випливає, що $r \in \mathbb{D} \setminus G_{\delta/4}(B)$. Для такого r оцінимо

$$\frac{B'(r)}{B(r)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1-a_m^2}{(r-a_m)(1-ra_m)}. \tag{7}$$

Якщо $m \leqslant 2n_{k-1}$, то $m \leqslant n_k/2$ і $1/(1-a_m) \leqslant m^2 \leqslant (n_k^2/4) = 1/(4(1-a_{n_k}))$. Тому

$$\sum_{m=1}^{n_k-1} \frac{1-a_m^2}{(r-a_m)(1-ra_m)} \leqslant 2\sum_{m=1}^{n_k-1} \frac{1}{r-a_m} = \frac{2}{1-r}\sum_{m=1}^{n_k-1} \frac{1}{(1-a_m)/(1-r)-1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{1-r}\sum_{m=1}^{n_k-1} \frac{1}{\dfrac{1-a_m}{1-a_{n_k}}-1} = \frac{2}{1-r}\left(\sum_{m=1}^{2n_{k-1}} + \sum_{m=2n_{k-1}+1}^{n_k-1}\right)\frac{1}{\dfrac{1-a_m}{1-a_{n_k}}-1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{1-r}\left(\sum_{m=1}^{2n_{k-1}}\frac{1}{3} + \sum_{m=2n_{k-1}+1}^{n_k-1}\frac{1}{n_k^2/m^2-1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{1-r}\left(\frac{n_k}{3} + n_k\sum_{m=2n_{k-1}+1}^{n_k-1}\frac{1}{n_k-m}\right) = \frac{2}{1-r}\left(\frac{n_k}{3} + n_k\sum_{j=1}^{n_k-2n_{k-1}+1}\frac{1}{j}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{1-r}\left(\frac{n_k}{3} + n_k\ln n_k\right) \leqslant \frac{3n_k\ln n_k}{1-r} = \frac{3n(r)\ln n(r)}{1-r} = O(l(r)), \quad r\to 1, \tag{8}$$

для функції $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$ такої, що $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$ при $r \to 1$.

З огляду на нерівність (6) і означення $r = r_k$ маємо

$$\left|\frac{1-a_{n_k}^2}{(r-a_{n_k})(1-ra_{n_k})} + \frac{1-a_{n_k+1}^2}{(r-a_{n_k+1})(1-ra_{n_k+1})}\right| \leqslant \frac{2}{r-a_{n_k}} + \frac{2}{a_{n_k+1}-r} =$$
$$= \frac{2}{\dfrac{\delta(1-a_{n_k})}{2n_k\ln n_k}} + \frac{2}{a_{n_k+1}-a_{n_k}-\dfrac{\delta(1-a_{n_k})}{2n_k\ln n_k}} \leqslant \frac{8n_k\ln n_k}{\delta(1-a_{n_k})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8n(r)\ln n(r)}{\delta(1-r)} = O(l(r)), \quad r\to 1. \tag{9}$$

Якщо ж $n_k+2 \leqslant m \leqslant 2n_k$, то $1-ra_m \leqslant 1-a_{n_k}^2 \leqslant 2(1-a_{n_k})$ і, позначаючи через c_j додатні сталі, одержуємо

$$\frac{1-a_m}{1-ra_m} \geqslant \frac{1-a_{2n_k}}{2(1-a_{n_k})} = \frac{\psi(n_k)}{2\psi(2n_k)} \geqslant c_1 > 0$$

і для деяких $\xi_m \in (n_k, m)$

$$\sum_{m=n_k+2}^{2n_k} \frac{1-a_m^2}{(a_m-r)(1-ra_m)} \geqslant c_1\sum_{m=n_k+2}^{2n_k}\frac{1}{a_m-a_{n_k}} =$$
$$= c_1\sum_{m=n_k+2}^{2n_k}\frac{1}{(1-a_{n_k})\left(1-\dfrac{\psi(n_k)}{\psi(m)}\right)} = \frac{c_1}{1-a_{n_k}}\sum_{m=n_k+2}^{2n_k}\frac{\psi(m)}{\psi'(\xi_m)(m-n_k)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{c_2}{1-a_{n_k}}\frac{\psi(n_k)}{\psi'(n_k)}\sum_{m=n_k+2}^{2n_k}\frac{1}{m-n_k} \geqslant \frac{c_3\psi(n_k)\ln n_k}{\psi'(n_k)(1-a_{n_k})} =$$

$$= \frac{c_3 n_k \ln n_k}{1-a_{n_k}} \frac{\psi(n_k)}{n_k\psi'(n_k)} \geqslant \beta(r)l(r), \tag{10}$$

де $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$ і $\beta(r) \to +\infty$ при $r \to 1$.

Нарешті, якщо $m \geqslant 2n_k+1$, то $1 - ra_m \geqslant (1-r)a_m \geqslant (1-r)a_{2n_k+1}$ і

$$1 - a_m \leqslant 1 - a_{2n_k+1} = \frac{1-a_{2n_k+1}}{1-a_{n_k+1}}(1-a_{n_k+1}) \leqslant \frac{n_k^2\psi(n_k+1)}{(2n_k+1)^2\psi(n_k)}(1-r) \leqslant$$
$$\leqslant (1-r)/3, \quad k \geqslant k_0,$$

тобто $a_m - r = (1-r)(1-(1-a_m)/(1-r)) \geqslant \dfrac{2}{3}(1-r)$. Тому з огляду на (3) і (4)

$$\sum_{m=2n_k+1}^{\infty} \frac{1-a_m^2}{(a_m-r)(1-ra_m)} \leqslant \frac{3}{a_{2n_k+1}(1-r)^2} \sum_{m=2n_k+1}^{\infty}(1-a_m) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{a_{2n_k+1}(1-r)^2}\sum_{a_m>r}(1-a_m) = O\left(\frac{n(r)}{1-r}\right) = o(l(r)), \quad r \to 1, \tag{11}$$

де $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{1-r}$ при $r \to 1$.

Використовуючи нерівності (8) – (11), з (7) бачимо, що $|B'(r_k)/B(r_k)|/l(r_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, тобто умова 1 леми не виконується і, отже, твердження *в* теореми доведено.

Автор висловлює щиру подяку М.М.Шереметі за формулювання задачі та цінні зауваження.

1. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. - Lviv, 1999.
2. *Trukhan Ju. S., Sheremeta M. M.* On l-index boundedness of the Blaschke product // Matematychni Studii. – 2003. – Vol.19. – N 1 – P. 106-112
3. *Чижиков І. Е., Шеремета М. М.* Обмеженість l-індексу канонічного добутку нульового роду з додатними нулями // Доп. НАН України. Сер. А (в друці).

ON l-INDEX BOUNDEDNESS OF THE BLASCHKE PRODUCT

Yuriy Trukhan

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

There is constructed an example of the Blaschke product B with such zeros a_n that $\psi(n)(1-a_n) \searrow 0$, $n \to \infty$ (where ψ is the slowly growing function) and $\sum_{a_n>r}(1-a_n) = O((1-r)n(r)), r \to 1$, but B does not bounded l-index with $l(r) \asymp n(r)\ln n(r)/(1-r)$ under $r \to 1$.

Key words: Blaschke product, l-index.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.2004
Прийнята до друку 03.11.2004