ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.2004.Вип.63.С.148–151

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2004.Vol.63.P.148–151

УДК 517.5

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ЦІЛОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Зоряна ШЕРЕМЕТА
Інститут прикладних проблем математики і механіки
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул.Наукова, 3б 79060 Львів, Україна

Досліджено обмеженість l-індексу цілого розв'язку диференціального рівняння $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$.

Ключові слова: диференціальне рівняння, ціла функція, l-індекс.

Нехай $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. С.Шах [1] подав умови на дійсні коефіцієнти $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, за яких диференціальне рівняння

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0 \tag{1}$$

має цілий розв'язок f, який разом з усіма своїми похідними є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями і $\ln M_f(r) = (1 + o(1))|\beta_0|r$, $r \to \infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Цей результат доповнено в [2] такою теоремою.

Теорема А. *Якщо $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, $\beta_1 = -\gamma_2 > -2$ і $-(2 + \beta_1) \leqslant 2\gamma_1 < 0$, то існує цілий розв'язок*

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

диференціального рівняння (1) такий, що $f, f', f'', \dots$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ функціями і $\ln M_f(r) = 2(1 + o(1))\sqrt{|\gamma_1|r}$, $r \to +\infty$.

Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [3, с. 5], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{3}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом і позначається через $N(f, l)$. Якщо $G \subset \mathbb{C}$ та існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (3) правильна для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f, l; G)$.

Мета нашої праці – довести теорему, яка вказує на обмеженість l-індексу цілого розв'язку (2) диференціального рівняння (1) за умов теореми А.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (1) задовольняють умови теореми A, то функція (2) є обмеженого l-індексу з $l(x) = (5+\beta_1)\min\{1, 1/\sqrt{x}\}$, причому $N(f,l) \leqslant \max\{N, P\}$, $N(f,l; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \leqslant 1$ і $N(f,l; \overline{\mathbb{D}}) \leqslant \max\{N, P\}$, де*

$$N = \left[\frac{\ln f(2) - \ln f(1/2)}{\ln 3}\right] + 1,$$

$$P = \left[\frac{\ln f(3) - \ln f(1/2) + \ln(5+\beta_1)^{N+1} + \ln(3e^4 N!)}{\ln(2(5+\beta_1))}\right] + 1.$$

Доведення. Якщо ціла функція f є розв'язком рівняння (1), то з огляду на те, що $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, для всіх $z \in \mathbb{C}$ маємо $\dfrac{|f''(z)|}{2!} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\left|\dfrac{\beta_1}{z}\right||f'(z)| + \left|\dfrac{\gamma_1}{z} + \dfrac{\gamma_2}{z^2}\right||f(z)|\right)$, звідки для всіх $|z| \geqslant 1$ отримуємо

$$\frac{|f''(z)|(\sqrt{|z|})^2}{2!(5+\beta_1)^2} \leqslant \frac{|\beta_1|}{2(5+\beta_1)\sqrt{|z|}}\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{5+\beta_1} + \frac{1}{2(5+\beta_1)^2}\left(|\gamma_1| + \frac{|\beta_1|}{|z|}\right)|f(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4|\beta_1| + \beta_1 + 2}{4(5+\beta_1)}\max\left\{\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}, |f(z)|\right\} \leqslant \max\left\{\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}, |f(z)|\right\}. \quad (4)$$

Підставляючи f в (1) і диференціюючи $m \geqslant 1$ раз, одержуємо

$$z^2 f^{(m+2)}(z) + (\beta_1 + 2m)zf^{(m+1)}(z) + \{(2m+\gamma_1)z + m(m-1) + m\beta_1 + \gamma_2\}f^{(m)}(z) +$$
$$+ \{m(m-1)\beta_0 + m\gamma_1\}f^{(m-1)}(z) \equiv 0,$$

звідки, як вище, для $|z| \geqslant 1$ отримаємо

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{m+2} \leqslant \frac{2m+\beta_1}{(m+2)(5+\beta_1)\sqrt{|z|}}\frac{|f^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{m+1} +$$
$$+ \left(\frac{2+\beta_1}{2(5+\beta_1)^2(m+2)(m+1)} + \frac{(m+\beta_1)(m-1)}{(5+\beta_1)^2(m+2)(m+1)|z|}\right)\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^m +$$
$$+ \frac{2+\beta_1}{2(5+\beta_1)^3(m+2)(m+1)\sqrt{|z|}}\frac{|f^{(m-1)}(z)|}{(m-1)!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{m-1} \leqslant$$
$$\leqslant Q(m)\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^j : m-1 \leqslant j \leqslant m+1\right\},$$

де

$$Q(m) \leqslant \frac{1}{m+2}\left(\frac{2m+\beta_1}{5+\beta_1} + \frac{2+\beta_1}{(5+\beta_1)^2(m+1)} + \frac{(m+\beta_1)(m-1)}{(5+\beta_1)^2(m+1)}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{(m+2)(5+\beta_1)^2}\left((14 + 8\beta_1 + \beta_1^2)m + 56 + 15\beta_1 + \beta_1^2 - \frac{12+\beta_1}{m+1}\right) < 1.$$

Звідси випливає, що для $|z| \geqslant 1$

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{m+2} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{j} : m-1 \leqslant j \leqslant m+1\right\}, \quad (5)$$

Для $n \geqslant 3$ і $|z| \geqslant 1$ з (5) отримуємо

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{n} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{j} : 0 \leqslant j \leqslant n-1\right\},$$

звідки, використовуючи (4), неважко одержуємо нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}\left(\frac{\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}\right)^{n} \leqslant \max\left\{\frac{|f'(z)|\sqrt{|z|}}{5+\beta_1}, |f(z)|\right\}.$$

для всіх $|z| \geqslant 1$ і $n \geqslant 0$, тобто $N(f,l;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \leqslant 1$.

С.Шах [4] показав таке: якщо f – ціла функція, $f(0)=0$, $R \geqslant 2$ і $|z| \leqslant R/2$, то для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$

$$M_f(1/2) \leqslant M_f(R)\left(\frac{R(|z|+1/2)}{R^2+|z|/2}\right)^{N+1} + 2e^{2R}\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant N\}.$$

Оскільки [2] коефіцієнти функції (2) додатні, то $M_f(R) = f(R)$ і, якщо приймемо $R = 2$, то звідси для $|z| \leqslant 1$ отримаємо

$$f(1/2) \leqslant f(2)\left(\frac{2|z|+1}{8+|z|}\right)^{N+1} + 2e^4\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant N\} \leqslant$$
$$\leqslant f(2)3^{-(N+1)} + 2e^4\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant N\}.$$

Припустимо, що $f(2) \leqslant 3^N f(1/2)$. Тоді з останньої нерівності одержуємо нерівність $\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant N\} \geqslant f(1/2)/(3e^4)$. Отже, приймаючи $N = [\{\ln f(2) - \ln f(1/2)\}/\ln 3] + 1$, маємо

$$\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!(5+\beta_1)^k} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\} \geqslant \frac{1}{N!(5+\beta_1)^N}\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant N\} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{f(1/2)}{3e^4 N!(5+\beta_1)^N}. \quad (6)$$

З іншого боку, за нерівністю Коші для кожного $|z| \leqslant 1$ маємо

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!(5+\beta_1)^p} \leqslant \frac{M_f(3)}{2^p(5+\beta_1)^p} \leqslant \frac{f(3)}{(2(5+\beta_1))^p}.$$

Якщо $\dfrac{f(3)}{(2(5+\beta_1))^p} \leqslant \dfrac{f(1/2)}{3e^4 N!(5+\beta_1)^N}$, то з огляду на (6)

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!(5+\beta_1)^p} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!(5+\beta_1)^k} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}$$

для всіх $|z| \leqslant 1$ і всіх $p \geqslant P = [\{\ln f(3) - \ln f(1/2) + 4 + \ln 3 + (N+1)\ln(5+\beta_1) + \ln N!\}/\ln(2(5+\beta_1))] + 1$. Отже, $N(f, 5+\beta_1; \overline{\mathbb{D}}) \leqslant \max\{N, P\}$.

Якщо приймемо $l(x) = (5+\beta_1)\min\{1, 1/\sqrt{x}\}$, то за умов теореми A функція (2) є обмеженого l-індексу, причому $N(f,l) \leqslant \max\{N, P\}$. Теорему 1 доведено.

1. *Shah S. M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation. II // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
2. *Шеремета З. М.* Про близькість до опуклості цілих розв'язків одного диференціального рівняння// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 54-56.
3. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv, 1999.
4. *Shah S. M.* Entire solutions of linear differential equations and bounds for growth and index numbers // Proc. of the Royal Soc. of Edinburg. – 1983. – Vol. A 94. – P. 49-60.

ON l-INDEX BOUNDEDNESS OF AN ENTIRE SOLUTION OF A DIFFERENTIAL EQUATION

Zoryana Sheremeta

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

It is investigated the l-index boundedness of an entire solution of the differential equation $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$.

Key words: differential equation, entire function, l-index.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.2004

Прийнята до друку 03.11.2004