УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Галина БАРАБАШ

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано певні умови існування та єдиності розв'язку мішаної задачі для гіперболічного рівняння

$$u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\,u_{x_i}\right)_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,u_{x_it}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\,u_{x_i}+c(x,t)\,u+g(x,t)|u|^{p-2}\,u=f(x,t)$$

у необмеженій за просторовими змінними області.

Ключові слова: напівлінійне гіперболічне рівняння.

Слабко нелінійні гіперболічні рівняння другого порядку вигляду

$$u_{tt}-\Delta\,u+\alpha u_t+\beta|u|^{p-2}u=f(x,t) \tag{1}$$

виникають, зокрема, в релятивістській квантовій механіці (див. [1, с. 16]). В останні два десятиліття задачу Коші та мішані задачі в необмежених областях для рівняння (1) та деяких його узагальнень досліджували багато авторів [2–20]. Значна частина цих праць присвячена вивченню випадку $\beta<0$ (див., наприклад, [2, 3] та бібліографію у цих працях). Проте недостатньо вивченим залишається випадок, коли $\beta>0$. Зокрема, цікавим є запитання, чи для рівняння (1) зберігається властивість скінченності області залежності розв'язку.

Ми одержали деякі нові результати існування та єдиності розв'язку мішаної задачі в необмеженій за просторовими змінними області для певного узагальнення рівняння (1). Доведено, що для певних значень параметра p існування та єдиність розв'язку не залежить від поведінки при $|x| \to +\infty$ початкових даних і правої частини рівняння.

Нехай Ω – необмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$. Припускатимемо, що область Ω володіє такою властивістю: існує $R^0 > 0$ таке, що область $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < R\}$ регулярна в сенсі Кальдерона [21, с. 45] для всіх $R > R^0$. Нехай $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_\tau = \partial\Omega \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $0 < T < +\infty$.

В області Q_T розглядаємо рівняння

$$\begin{aligned} A(u) \quad &\equiv \quad u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, u_{x_i t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\, u_{x_i} + \\ &+ \quad c(x,t)\, u + g(x,t)|u|^{p-2}\, u = f(x,t) \end{aligned} \tag{2}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad (x,y) \in \Omega \tag{3}$$

і крайовою умовою

$$u\,|_{S_T} = 0. \tag{4}$$

Введемо простори

$$H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \{u \,:\, u \in H^1(\Omega^R),\ u|_{\partial\Omega\cap\partial\Omega^R} = 0\ \forall R > R^0\},$$

$$H^2_{loc}(\overline{\Omega}) = \{u \,:\, u \in H^2(\Omega^R)\ \forall R > R^0\},$$

$$L^r_{loc}(\overline{\Omega}) = \{u \,:\, u \in L^r(\Omega^R)\ \forall R > R^0\}, \quad r \in (1, +\infty].$$

Теорема. *Нехай виконуються умови:* $a_{ij}, a_i \in C(\overline{Q}_T) \cap L^\infty(Q_T)$, $a_{ij,x_s}, a_{i,x_i} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \Omega$, i, j, $s \in \{1, ..., n\}$;

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geqslant a_0|\xi|^2$$

для всіх $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, *де* $a_0 > 0$; $b_i, b_{it}, c, c_t, g, g_t \in L^\infty((0,T); L^\infty_{loc}(\overline{\Omega}))$, $i \in \{1, ..., n\}$; $f, f_t \in L^2((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$; $u_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^p_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\overline{\Omega})$; $u_1 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$; $c(x,t) \geqslant c_0 \geqslant 0$, $g(x,t) \geqslant g_0 > 0$ *майже для всіх* $(x,t) \in Q_T$; $2 < p \leqslant \dfrac{2n-2}{n-2}$, *якщо* $n > 2$ *і* $p > 2$, *якщо* $n = 1, 2$. *Тоді існує єдиний розв'язок* u *(в сенсі розподілів) задачі (2)–(4) такий, що*

$$u \in L^2\left((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})\right) \cap L^p\left((0,T); L^p_{loc}(\overline{\Omega})\right);$$
$$u_t \in L^2\left((0,T); H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})\right); \quad u_{tt} \in L^2\left((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega})\right).$$

Доведення. В області $Q_T^R = \Omega^R \times (0,T)$, $R > R^0 + 1$ розглядаємо допоміжну задачу

$$A(u) = f^R(x,t) \tag{5}$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0^R(x), \quad u_t(x,0) = u_1^R(x), \quad x \in \Omega^R \tag{6}$$

і крайовою умовою

$$u|_{S_T^R} = 0, \tag{7}$$

де $S_T^R = \partial\Omega^R \times (0,T)$,

$$f^R(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_T^R, \\ 0, & (x,t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases}$$

$u_0^R(x) = u_0(x)\zeta(x)$, $u_1^R(x) = u_1(x)\zeta(x)$, $\zeta \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\zeta(x) = 1$ при $|x| \leqslant R-1$, $\zeta(x) = 0$ при $|x| \geqslant R$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Нехай $\{\omega^k\}$ – база простору $\overset{o}{H}{}^1(\Omega^R) \cap L^p(\Omega^R) \cap H^2(\Omega^R)$, ортонормована в $L^2(\Omega^R)$. Розглянемо множину функцій вигляду

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\,\omega^k(x), \quad N \in \mathbb{N},$$

де c_k^N, $(k = 1,\dots,N)$ розв'язки такої задачі Коші $(k = 1,\dots,N)$:

$$\int\limits_{\Omega^R} \Bigg[u_{tt}^N \omega^k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i}^N {\omega^k}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_t^N\, {\omega^k}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_{i x_i}(x) u_t^N \omega^k +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i}^N \omega^k + c(x,t)\, u^N \omega^k + g(x,\, t)|u^N|^{p-2} u^N \omega^k - f(x,\, t)\omega^k \Bigg] dx = 0, \tag{8}$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^{R,N}, \quad \text{де} \quad u_0^{R,N}(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0,k}^{R,N}\, \omega^k(x) \ \to u_0^R$$
$$\text{в} \quad \overset{o}{H}{}^1(\Omega^R) \cap L^p(\Omega^R) \cap H^2(\Omega^R) \ \text{при} \ N \to \infty; \tag{9}$$

$$c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^{R,N}, \quad \text{де} \quad u_1^{R,N}(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1,k}^{R,N}\, \omega^k(x) \ \to u_1^R$$
$$\text{в} \quad \overset{o}{H}{}^1(\Omega^R) \ \text{при} \ \ N \to \infty. \tag{10}$$

Зазначимо, що на підставі теореми Каратеодорі [22, с. 54] задача (8)–(10) має неперервно диференційовний розв'язок, визначений на деякому проміжку $[0, t_0]$, причому похідна цього розв'язку абсолютно неперервна. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $t_0 = T$.

Помножимо кожне рівняння системи (8) відповідно на функцію $c_{kt}^N(t)$. підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_{\Omega^R} \Bigg[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}^N u_{t\,x_j}^N + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_t^N\ u_{t\,x_i}^N + \sum_{i=1}^n a_{i x_i}(x) (u_t^N)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,t) u_{x_i}^N u_t^N + c(x,t)\, u^N u_t^N + g(x,t) |u^N|^{p-2} u^N\, u_t^N - f(x,t) u_t^N \Bigg] dx = 0. \quad (11)$$

Нехай $\Omega_\tau^R = Q_T^R \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. Інтегруючи частинами в (11), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[(u_t^N)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i}^N u_{x_j}^N + c(x,\tau)\,(u^N)^2 + \frac{2}{p} g(x,\tau) |u^N|^p \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^R} \left[\sum_{i=1}^n a_{i,x_i}(x) (u_t^N)^2 - c_t(x,t)\,(u^N)^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i(x,t) u_{x_i}^N u_t^N - \frac{2}{p}\, g_t(x,t) |u^N|^p \right] dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega^R} \left[(u_1^{R,N})^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{0,x_i}^{R,N} u_{0,x_j}^{R,N} + c(x,0)\,(u_0^{R,N})^2 + \frac{2}{p} g(x,0) |u_0^{R,N}|^p \right] dx +$$

$$+2 \int\limits_{Q_\tau^R} f(x,t) u_t^N\, dx\, dt. \quad (12)$$

Згідно з умовами теореми існують такі сталі α_1, α_2, $\beta(R)$, $c_1(R)$, $c_2(R)$, $g_1(R)$, $g_2(R)$, що

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \alpha_1 |\xi|^2 \ \forall x \in \Omega\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T^R} \sum_{i=1}^n b_i^2(x,t) = \beta, \ \ \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T^R} \sum_{i=1}^n |a_{i,x_i}(x,t)| = \alpha_2,$$

$$c(x,t) \leqslant c_1, \ \ |c_t(x,t)| \leqslant c_2, \ \ g(x,t) \leqslant g_1, \ |g_t(x,t)| \leqslant g_2 \ \text{ майже всюди в } Q_T^R.$$

Тоді з рівності (12) легко одержати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[(u_t^N)^2 + a_0 \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 + c_0 (u^N)^2 + \frac{2\,g_0}{p}\ |u^N|^p \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_0^R} \left[(u_1^N)^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^n (u_{0,x_i}^{R,N})^2 + c_1 (u_0^{R,N})^2 + \frac{2\,g_1}{p}\ |u_0^{R,N}|^p \right] dx + \quad (13)$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^R} \left[f^2(x,t) + (2+\alpha_2)\,(u_t^N)^2 + \beta \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 + c_2 (u^N)^2 + \frac{2\,g_2}{p}\,|u^N|^p \right] dx\, dt.$$

Позначимо $M_1 = \min\{1;\ a_0;\ \frac{2g_0}{p}\}$; $M_2 = \max\{1;\ \alpha_1;\ c_1;\ \frac{2g_1}{p}\}$; $M_3 = \max\{2 + \alpha_2;\ \beta;\ c_2;\ \frac{2g_2}{p}\}$. Враховуючи (9), (10) і нерівність Пуанкаре [21, с. 50]

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[a_0 \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^N)^2 + c_0 (u^N)^2 \right] dx \geqslant \alpha_3 \int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[\sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^N)^2 + (u^N)^2 \right] dx, \quad \alpha_3 > 0, \tag{14}$$

з (13) одержимо оцінку

$$y(\tau) \leqslant M_4 + M_5 \int\limits_0^\tau y(t)\,dt, \tag{15}$$

де

$$y(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[(u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^N)^2 + (u^N)^2 + |u^N|^p \right] dx,$$

а сталі M_4, M_5 не залежать від N. На підставі леми Гронуолла-Белмана з (15) випливає оцінка

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} \left[(u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^N)^2 + (u^N)^2 + |u^N|^p \right] dx \leqslant\ M_6, \quad \tau \in [0, T], \tag{16}$$

причому стала M_6 не залежить від N.

Зазначимо, що на підставі умов теореми систему (8) можна диференціювати за змінною t

$$\int\limits_{\Omega^R} \Bigg[u_{ttt}^N \omega^k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i t}^N {\omega^k}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{tt}^N\ {\omega^k}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_{i x_i}(x) u_{tt}^N \omega^k +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_{it}(x,t) u_{x_i}^N \omega^k + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i t}^N \omega^k + c_t(x,t)\, u^N \omega^k + c(x,t)\, u_t^N \omega^k +$$
$$+ g_t(x,\,t) |u^N|^{p-2} u^N \omega^k + g(x,\,t)(p-1)|u^N|^{p-2} u_t^N \omega^k - f_t(x,t)\omega^k \Bigg] dx = 0, \tag{17}$$

$1 \leqslant k \leqslant N$. Помножимо кожне рівняння (17) відповідно на функцію $c_{ktt}^N(t)$, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $[0,\tau]$, $\tau \in (0,T]$. Тоді одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[u_{ttt}^N u_{tt}^N + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, {u_t^N}_{x_i} {u_{tt}^N}_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_{tt}^N\ {u_{tt}^N}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_{i x_i} (u_{tt}^N)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_{it} u_{x_i}^N u_{tt}^N + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i t}^N u_{tt}^N + c_t\, u^N u_{tt}^N + c\, u_t^N u_{tt}^N +$$
$$+ g_t\, |u^N|^{p-2}\, u^N\, u_{tt}^N + (p-1)\, g\, |u^N|^{p-2}\, u_t^N\, u_{tt}^N - f_t\, u_{tt}^N \Bigg] dx = 0. \tag{18}$$

Після елементарних перетворень рівності (18) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R}\left[(u_{tt}^N)^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_it}^Nu_{x_jt}^N+c(x,\tau)\,(u_t^N)^2\right]dx=$$
$$=\int\limits_{\Omega_0^R}\left[(u_{tt}^N)^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{1,x_i}^{R,N}u_{1,x_j}^{R,N}+c(x,0)\,(u_1^{R,N})^2\right]dx+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[-2\sum_{i=1}^{n}a_{ix_i}(x)(u_{tt}^N)^2-c_t(x,t)\,(u_t^N)^2-2c_t(x,t)\,u^Nu_{tt}^N-$$
$$-2\sum_{i=1}^{n}(b_{it}(x,t)u_{x_i}^Nu_{tt}^N+b_i(x,t)u_{x_it}^Nu_{tt}^N)+2f_t(x,t)u_{tt}^N-$$
$$-2(p-1)\,g(x,t)\,|u^N|^{p-2}\,u_t^N\,u_{tt}^N-2g_t(x,t)\,|u^N|^{p-2}\,u^N\,u_{tt}^N\Big]dx\,dt. \qquad (19)$$

На підставі умов теореми існує така стала $\beta_1(R)$, що

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T^R}\sum_{i=1}^{n}b_{it}^2(x,t)=\beta_1.$$

Використовуючи умови теореми, з рівності (19) легко отримати нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R}\left[(u_{tt}^N)^2+a_0\sum_{i=1}^{n}(u_{x_it}^N)^2+c_0(u_t^N)^2\right]dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\Omega_0^R}\left[(u_{tt}^N)^2+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}(u_{1,x_i}^{R,N})^2+c_1(u_1^{R,N})^2\right]dx+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\Big[(\alpha_2+c_2+3)(u_{tt}^N)^2+c_2(u_t^N)^2+c_2(u^N)^2+\beta_1\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^N)^2+\beta\sum_{i=1}^{n}(u_{x_it}^N)^2+$$
$$+f_t^2(x,t)+2(p-1)\,g_1|u^N|^{p-2}\,|u_t^N|\,|u_{tt}^N|+2\,g_2|u^N|^{p-1}\,|u_{tt}^N|\,\Big]dx\,dt. \qquad (20)$$

На підставі нерівності Гельдера, теореми вкладення і (16) матимемо оцінки

$$\int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^{p-2}\,|u^N|\,|u_{tt}^N|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau \left(\int\limits_{\Omega^R} (|u^N|^{p-2})^n dx\right)^{1/n} \left(\int\limits_{\Omega^R} |u^N|^q dx\right)^{1/q} \left(\int\limits_{\Omega^R} |u_{tt}^N|^2 dx\right)^{1/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant M_7 \int_0^\tau \left(\int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega^R} |u_{tt}^N|^2 dx\right)^{1/2} dt,$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} |u^N|^{p-2}\,|u_t^N|\,|u_{tt}^N|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau \left(\int\limits_{\Omega^R} (|u^N|^{p-2})^n dx\right)^{1/n} \left(\int\limits_{\Omega^R} |u_t^N|^q dx\right)^{1/q} \left(\int\limits_{\Omega^R} |u_{tt}^N|^2 dx\right)^{1/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant M_7 \int_0^\tau \left(\int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^N)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega^R} |u_{tt}^N|^2 dx\right)^{1/2} dt,$$

де $q = \dfrac{2n}{n-2}$ при $n > 2$, стала M_7 з теореми вкладення Соболєва [21, с. 47] не залежить від N.

Згідно з одержаними оцінками, умовами теореми, нерівністю (14) для функції u_t^N, а також (10) і (16) з (20) випливає нерівність

$$z(\tau) \leqslant M_8 \int\limits_0^\tau z(t)\,dt + M_8 + M_8 \int\limits_{\Omega^R} (u_{tt}^N(x,0))^2\,dx, \tag{21}$$

де

$$z(\tau) = \int\limits_{\Omega^R} \left[(u_{tt}^N)(x,\tau)^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^N(x,\tau))^2 + (u_t^N(x,\tau))^2\right] dx,$$

а стала M_8 не залежить від N.

Помножимо рівності (8) відповідно на функції $c_{k,tt}^N(0)$ і підсумуємо за k від 1 до N

$$\int\limits_{\Omega^R}\Big[(u_{tt}^N(x,0))^2-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{0,x_i}^{R,N})_{x_j}u_{tt}^N(x,0)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u_{1,x_i}^{R,N}u_{tt}^N(x,0)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,0)u_{0,x_i}^{R,N}u_{tt}^N(x,0)+$$

$$+c(x,0)u_0^{R,N}+g(x,0)|u_0^{R,N}|^{p-2}u_0^{R,N}u_{tt}^N(x,0)-f^R(x,0)u_{tt}^N(x,0)\Big]\,dx=0. \quad (22)$$

Використовуючи умови теореми щодо функцій u_0, u_1, f, коефіцієнтів рівняння і теорему вкладення (див. умову на p), з (22) легко одержати оцінку

$$\int\limits_{\Omega^R}(u_{tt}^N(x,0))^2\,dx\leqslant M_9, \quad (23)$$

причому стала M_9 не залежить від N. Прийнявши до уваги (23) і застосувавши до (21) лему Гронуолла-Белмана, отримаємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega^R}\left[(u_{tt}^N(x,\tau))^2+\sum_{i=1}^{n}(u_{x_it}^N(x,\tau))^2+(u_t^N(x,\tau))^2\right]dx\leqslant M_{10},\quad \tau\in[0,T], \quad (24)$$

де стала M_{10} не залежить від N.

Оцінки (16) і (24) означають, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^\infty((0,T);\overset{o}{H}{}^1(\Omega^R)\cap L^p(\Omega^R))$, послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^\infty((0,T);\overset{o}{H}{}^1(\Omega^R)$, послідовність $\{u_{tt}^N\}$ обмежена в $L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))$. Тоді існує така підпослідовність $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$, що

$$u^{N_k}\to u^R \;*-\text{слабко в}\; L^\infty((0,T);\overset{o}{H}{}^1(\Omega^R)\cap L^p(\Omega^R)),$$
$$u_t^{N_k}\to u_t^R\;*-\text{слабко в}\; L^\infty((0,T);\overset{o}{H}{}^1(\Omega^R)),$$
$$u_{tt}^{N_k}\to u_{tt}^R\;*-\text{слабко в}\; L^\infty((0,T);L^2(\Omega^R))$$

при $N_k\to+\infty$. Оскільки $H^1(Q_T^R)\subset L^2(Q_T^R)$ компактно, то, не обмежуючи загальності, можемо вважати, що

$$u^{N_k}\to u^R\;\text{сильно в}\; L^2(Q_T)\;\text{ і майже всюди в}\; Q_T^R.$$

Крім того, $|u^N|^{p-2}u^N$ обмежені в $L^\infty((0,T);L^{p'}(\Omega))$, тому можна стверджувати, що

$$|u^{N_k}|^{p-2}u^{N_k}\to\chi^R\;*-\text{слабко в}\; L^\infty((0,T);L^{p'}(\Omega^R)),\quad p'=\frac{p}{p-1}.$$

На підставі леми 1.3 [1, с. 25] одержимо, що $\chi^R(x,t)=|u^R(x,t)|^{p-2}u^R(x,t)$ майже скрізь в Q_T^R.

Тоді, прийнявши в (8) $N = N_k$, легко одержати рівність

$$\int\limits_{\Omega^R} \Big[u^R_{tt} v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u^R_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (a_i(x) u^R_{x_i t} v + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) u^R_{x_i} v +$$

$$+ c(x,t)\, u^R\, v + g(x,t)\, |u^R|^{p-2} u^R\, v - f(x,t)\, v \Big]\, dx = 0, \qquad (25)$$

правильну для довільної $v \in \overset{o}{H}{}^1(\Omega^R) \cap L^p(\Omega^R)$ і майже всіх $t \in (0,T)$.

Отже, u^R задовольняє рівняння (5) і вкладення $u^R \in L^\infty((0,T); \overset{o}{H}{}^1(\Omega^R) \cap L^p(\Omega^R)$, $u^R_t \in L^\infty((0,T); \overset{o}{H}{}^1(\Omega^R))$, $u^R_{tt} \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega^R))$. Тому згідно з лемою 1.2 [1, с. 20] $u^R \in C([0,T]; \overset{o}{H}{}^1(\Omega^R))$, $u^R_t \in C([0,T]; L^2(\Omega^R))$.

Використовуючи (25), цілком аналогічно як в [1, с. 26] доводимо, що u^R задовольняє початкові умови (6).

Зазначимо, що згідно з умовами теореми рівняння (22) гіперболічне в Q_T. Нехай $R_1 = R^0 + 1$. Позначимо через $\mathcal{K}(R_1, x)$ перетин характеристичного конуса рівняння (22) з вершиною у точці $(x,T) \in \Omega^{R_1}_T$ з областю Q_T, $D(R_1) = \bigcap\limits_{(x,T)\in\Omega^{R_1}_T} \mathcal{K}(R_1, x)$, через $S(R_1)$ – частину межі області $D(R_1)$, яка лежить всередині області Q_T. Очевидно існує таке R_2, $R_2 \geqslant R_1 + 1$, яке залежить від a_{ij}, a_i, що $D(R_1) \in Q^{R_2-1}_T$. Позначимо через $\mathcal{K}(R_2, x)$ перетин характеристичного конуса рівняння (22) з вершиною у точці $(x,T) \in \Omega^{R_2}_T$ з областю Q_T, $D(R_2) = \bigcap\limits_{(x,T)\in\Omega^{R_2}_T} \mathcal{K}(R_2, x)$, а через $S(R_2)$ – частину межі області $D(R_2)$, яка лежить всередині області Q_T. Очевидно існує таке R_3, $R_3 \geqslant R_2 + 1$, яке залежить від a_{ij}, a_i, що $D(R_2) \in Q^{R_3-1}_T$. Продовжуючи цей процес, одержимо послідовність областей $\{D(R_k)\}$ і поверхонь $\{S(R_k)\}$, кожна з яких є характеристичною для рівняння (22).

Продовжимо кожну функцію $u^{R_{k+1}}$ нулем в область $Q_T \setminus Q^{R_{k+1}}_T$ і позначимо $u^k(x,t) = u^{R_{k+1}}(x,t)$, $k \in \mathbb{N}$. Доведемо, що $u^k(x,t) = u^m(x,t)$ майже всюди в області $D(R_k)$ при $m > k$. Позначимо $u^{m,k}(x,t) = u^m(x,t) - u^k(x,t)$. Зазначимо, що $u^{m,k}(x,0) = 0$ майже всюди в $D_0(R_k) = D(R_k) \cap \{t = 0\}$ і $f^{R_{m+1}}(x,t) - f^{R_{k+1}}(x,t) = 0$ майже всюди в $D(R_k)$. Враховуючи це, підставимо функції u^m і u^k у рівняння (22), віднімемо від першого друге, різницю помножимо на $u^{m,k}_t e^{-\gamma t}$ і проінтегруємо по області $D_{0,\tau}(R_k) = D(R_k) \cap Q^{R_{k+1}}_\tau$, $\tau \in (0,T]$. Після виконання цих дій одержимо рівність

$$\int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} \Big[u^{m,k}_{tt} u^{m,k}_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, u^{m,k}_{x_i} u^{m,k}_{tx_j} - \sum_{i=1}^n a_i(x)\, u^{m,k}_{x_i t} u^{m,k}_t +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,t)\, u^{m,k}_{x_i} u^{m,k}_t + c(x,t)\, u^{m,k} u^{m,k}_t \Big]\, e^{-\gamma t} dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} g(x,t)\, (|u^k|^{p-2}\, u^k - |u^m|^{p-2}\, u^m)\, u^{m,k}_t\, e^{-\gamma t} dx\, dt. \qquad (26)$$

Праву частину рівності (26) можна оцінити зверху за абсолютною величиною виразом

$$(p-1)\, g_1(R_k) \int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} (|u^m|^{p-2} + |u^k|^{p-2})\, |u^{m,k}|\, |u_t^{m,k}|\, e^{-\gamma t} dx\, dt,$$

який на підставі нерівності Гельдера та теореми вкладення не перебільшує

$$M_{11} \int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} \left[(u_t^{m,k})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (u_{x_i}^{m,k})^2 \right] e^{-\gamma t} dx\, dt,$$

причому стала M_{11} не залежить від m.

Використовуючи оцінку правої частини (26), інтегрування частинами у лівій частині рівності (26) та умови теореми, одержимо

$$\int\limits_{D_\tau(R_k)} \left[(u_t^{m,k})^2 + c_0 (u^{m,k})^2 + a_0 \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^{m,k})^2 \right] e^{-\gamma T} dx +$$

$$+ \int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} \Bigg[(\gamma - \alpha_2 - 1 - M_{11})(u_t^{m,k})^2 +$$

$$+ (\gamma - \beta(R_k) - M_{11}) \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i}^{m,k})^2 + c_0 \gamma (u^{m,k})^2 \Bigg] e^{-\gamma t} dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{S_\tau(R_k)} \left[(u_t^{m,k})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i}^{m,k} u_{x_j}^{m,k} + c(x,t)\, (u^{m,k})^2 \right] \cos(\nu,\, t)\, e^{-\gamma t} dS -$$

$$- \int\limits_{S_\tau(R_k)} \left[2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i}^{m,k} u_t^{m,k} \cos(\nu,\, x_j) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, (u_t^{m,k})^2 \cos(\nu,\, x_i) \right] e^{-\gamma t} dS \leqslant$$

$$\leqslant c_2(R_k) \int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} (u^{m,k})^2\, dx\, dt, \tag{27}$$

де $D_\tau(R_k) = D(R_k) \cap \{t = \tau\}$, $S_\tau(R_k) = S(R_k) \cap Q_\tau^{R_{k+1}}$. Зазначимо, що використано умову $u^{m,k}(x,0) = 0$ майже всюди в $D_0(R_k)$. Виберемо $\gamma = \max\{\alpha_2(R_k) + 2 + M_{11}; \beta(R_k) + M_{11} + 1\}$, $e^{-\gamma\tau} - c_2(R_k)\tau^2 = 1/2$. Крім того, враховуючи очевидну оцінку

$$\int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} (u^{m,k})^2\, dx\, dt \leqslant \tau^2 \int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} (u_t^{m,k})^2\, dx\, dt,$$

нерівність (27) перепишемо у вигляді

$$\int\limits_{D_\tau(R_k)} \left[(u_t^{m,k})^2 + c_0(u^{m,k})^2 + a_0\sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{m,k})^2\right] e^{-\gamma\tau}\,dx +$$
$$+ \int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} \left[\frac{1}{2}(u_t^{m,k})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{m,k})^2 e^{-\gamma\tau}\right] dx\,dt +$$
$$+ \int\limits_{S_\tau(R_k)} \left[\left((u_t^{m,k})^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, u_{x_i}^{m,k} u_{x_j}^{m,k} + c(x,t)\,(u^{m,k})^2\right)\cos(\nu,\,t) - \right.$$
$$\left. -2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, u_{x_i}^{m,k} u_t^{m,k}\cos(\nu,\,x_j) - \sum_{i=1}^n a_i(x)\,(u_t^{m,k})^2\cos(\nu,\,x_i)\right] e^{-\gamma t} dS \leqslant 0. \quad (28)$$

Враховуючи умови теореми щодо функції c і характеристичність поверхні $S(R_k)$, маємо оцінку

$$\int\limits_{S_\tau(R_k)} \left[\left((u_t^{m,k})^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, u_{x_i}^{m,k} u_{x_j}^{m,k} + c(x,t)\,(u^{m,k})^2\right)\cos(\nu,\,t) - \right.$$
$$\left. -2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\, u_{x_i}^{m,k} u_t^{m,k}\cos(\nu,\,x_j) - \sum_{i=1}^n a_i(x)\,(u_t^{m,k})^2\cos(\nu,\,x_i)\right] e^{-\gamma t} dS \geqslant 0.$$

Отже, з (28) випливає нерівність

$$\int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} \left[(u_t^{m,k})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{m,k})^2\right] dx\,dt \leqslant 0, \quad (29)$$

звідки одержуємо, що

$$u^k(x,\,t) = u^m(x,\,t), \qquad (x,\,t) \in D_{0,\tau}(R_k)$$

для довільного $m > k$. Цілком аналогічно доводимо цю рівність в областях $D_{\tau,2\tau}(R_k)$, $D_{2\tau,3\tau}(R_k)$, $\ldots$. Тоді за скінчену кількість кроків одержимо цю рівність в області $D_{0,T}(R_k)$. Зазначимо, що $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_{0,T}(R_k) = Q_T$. Тоді, очевидно, функція

$$u(x,t) = u^k(x,t), \quad (x,t) \in D_{0,T}(R_k)$$

буде шуканим розв'язком задачі (2)–(4).

Для доведення єдиності припускаємо існування двох узагальнених розв'язків $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$ задачі (2)–(4). Тоді для $u = u^{(2)} - u^{(1)}$ цілком аналогічно до (29) одержуємо оцінку

$$\int\limits_{D_{0,\tau}(R_k)} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right) dx\,dt \leqslant 0 \quad (30)$$

для довільного $k \in \mathbb{N}$, звідки й одержуємо, що $u(x,t) = 0$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

---

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.

2. *Ryo Ikehata.* Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped equations// Math. Analysis and Appl. – 2005. – Vol. 301. – P. 366-377.

3. *Majdoub M.* Qualitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation// Math. Analysis and Appl. – 2005. – Vol. 301. – P. 354-365.

4. *Nakao Hayashi, Kaikina Elena I., Naumkin Pavel I.* Damped wave equation in the subcritical case// J. of Diff. Equat. – 2004. – Vol. 207. – P. 161-194.

5. *Takafumi Hosono, Takayoshi Ogawa.* Large time behaviour and $L^p - -L^q$ estimate of solutions of 2-dimensional nonlinear damped wave equations// J. of Diff. Equat. – 2004. – Vol. 203. – P. 82-118.

6. *Huicheng Yin, Ingo Witt.* Global singularity structure of weak solutions to 3-D semilinear dispersive wave equations with discontinues initial data// J. of Diff. Equat. – 2004. – Vol. 196. – P. 134-150.

7. *Ryo Ikehata.* Global existence of solutions for semilinear wave equation in 2-D exterior domain// J. of Diff. Equat. – 2004. – Vol. 200. – P. 53-68.

8. *Changxing Miao, Bo Zhang.* H^s-global well-posedness for semilinear wave equations// Math. Analysis and Appl. – 2003. – Vol. 283. – P. 645-666.

9. *Varlamov Vladimir.* Long-time asymptotic expansion of the damped semilinear wave equation// Math. Analysis and Appl. – 2002. – Vol. 276. – P. 896-923.

10. *Ryo Ikehata.* Improved decay rates for solutions to one-dimensional linear and semilinear dissipative wave equations in all space// Math. Analysis and Appl. – 2003. – Vol. 277. – P. 555-570.

11. *Ping Gao, Boling Guo.* The time-periodic solution for a 2D dissipative Klein-Gordon equation// Math. Analysis and Appl. – 2004. – Vol. 296. – P. 686-694.

12. *Ricardo Weder.* Multidimensional inverse scattering for the nonlinear Klein-Gordon equation with a potential// J. of Diff. Equat. – 2002. – Vol. 184. – P. 62-77.

13. *Nikos I. Karachalios, Nikos M. Stavrakakis.* Existence of a global attractors for semilinear dissipative wave equations on $\mathbb{R}^n$// J. of Diff. Equat. – 1999. – Vol. 157. – P. 183-205.

14. *Grozdena Todorova, Borislav Yordanov.* Critical exponent for a nonlinear wave equation with damping// J. of Diff. Equat. – 2001. – Vol. 174. – P. 464-489.

15. *Jun Kato, Tohru Ozawa.* Weighted Strichartz estimates for the wave equation in even space dimensions// Math. Z. – 2004. – Vol. 247. – P. 747-764.

16. *Hartmut Pecher.* Sharp existence results for self-similar solutions of semilinear wave equations// Nonlinear Differential Equations and Applications. – 2000. – Vol. 7. – P. 323-341.

17. *Bruno Rubino.* Weak solutions to quasilinear wave equations of Klein-Gordon or sin-Gordon type and relaxation to reaction-diffusion equations// Nonlinear Differential Equations and Applications. – 1997. Vol. 4. – P. 439-457.

18. *Isabelle Gallagher, Patrick Gérard.* Profile decomposition for the wave equation outside a convex obstacle// J. Math. Pures Appl. – 2001. – Vol. 80. – P. 1-49.

19. *Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, Luis Vega.* Global well-posedness for semi-linear wave equations// Commun. in Partial Differential Equations. – 2000. – Vol. 25. – P. 1741-1752.

20. *Choquet-Bruhat Y.* Global existence for solutions of $u_{tt} - \Delta u = A\,|u|^p$ // J. Diff. Equat. – 1989. – N 82. – P. 98-108.

21. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

22. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.

THE MIXED PROBLEM FOR ONE SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATION IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Halyna Barabash

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

There are obtained some conditions of the existence and uniqueness of a solution for the hyperbolic equation

$$u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)\,u_{x_i})_{x_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,u_{x_it}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\,u_{x_i}+c(x,t)\,u+g(x,t)|u|^{p-2}\,u=f(x,t)$$

in an unbounded domain with respect to space variables.

Key words: semilinear hyperbolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.2005

Прийнята до друку 19.10.2005