VISNYK LVIV UNIV.
*Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.20–38* *Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.20–38*

УДК 517.95

# ВИЗНАЧЕННЯ СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТА У ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З НЕВІДОМИМИ МЕЖАМИ

**Ірина БАРАНСЬКА**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі знаходження невідомого старшого коефіцієнта, що залежить від часу, у параболічному рівнянні в області з невідомими межами.

*Ключові слова:* обернена задача, параболічне рівняння, вільна межа.

Вивчення процесів теплопровідності – один з основних розділів сучасних інженерних досліджень у машинобудівельній, енергетичній, атомній промисловості, в технічних процесах хімічної, геологічної та інших галузях промисловості. Дослідження фізичних процесів аналогічні задачам теплопровідності і цим пояснюється бурхливий розвиток теорії теплообміну за останні десятиліття. Задачі теплопровідності та більш загальні для рівняння параболічного типу, зокрема задачі в області з рухомими по часу границями, досліджували Е. М. Карташов [3], М. І. Іванчов [1].

У цій праці розглянемо обернену задачу в області з двома невідомими межами, для знаходження яких задамо інтегральні додаткові умови.

Розглянемо в області $\Omega_T \equiv \{(x,t) \,:\, h_1(t) < x < h_2(t)\,, 0 < t < T < \infty\}$ з невідомими межами $x = h_1(t)$, $x = h_2(t)$, рівняння з невідомим коефіцієнтом $a(t)$

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)\,, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \qquad x \in [h_1(0), h_2(0)]\,, \tag{2}$$

де $h_1(0)$ – задано, крайові умови

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t), \qquad u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умови перевизначення

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)\,dx = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} x\,u(x,t)\,dx = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} x^2\,u(x,t)\,dx = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Заміною $y = \dfrac{x - h_1(t)}{h_2(t) - h_1(t)}$, $t = t$ задачу (1)-(6) зведемо до оберненої задачі стосовно невідомих $a(t)$, $h_1(t)$, $h_3(t) \equiv h_2(t) - h_1(t)$, $v(y,t) = u(yh_3(t) + h_1(t), t)$ в області з відомими межами $Q_T \equiv \{(y,t) \,:\, 0 < y < 1\,,\, 0 < t < T\}$

$$v_t = \frac{a(t)}{h_3^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh_3(t) + h_1(t),t) + h_1'(t) + yh_3'(t)}{h_3(t)} v_y +$$

$$+c(yh_3(t) + h_1(t),t)v + f(yh_3(t) + h_1(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{7}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh_3(0) + h_1(0)), \qquad y \in [0,1], \tag{8}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h_3(t)\int\limits_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$h_3^2(t)\int\limits_0^1 y\,v(y,t)\,dy + h_1(t)\,\mu_3(t) = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T], \tag{11}$$

$$h_3^3(t)\int\limits_0^1 y^2\,v(y,t)\,dy + 2h_1(t)\,\mu_4(t) - h_1^2(t)\,\mu_3(t) = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{12}$$

**Означення 1.** *Розв'язком задачі (7)-(12) назвемо функції* $(a,\, h_1,\, h_3,\, v) \in C[0,T] \times (C^1[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h_3(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *які задовольняють умови (7)-(12).*

**Теорема 1.** *При виконанні умов:*

*1)* $\varphi \in [h_1(0), +\infty)$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [h_1(0), +\infty)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{1,5}$, $t \in [0,T]$, $\varphi'(x) - \varphi'(h_2(0) + h_1(0) - x) > 0$, $x \in \left[h_1(0), \frac{h_2(0)}{2} + \frac{h_1(0)}{2}\right)$, *де* $h_2(0)$ *є розв'язком рівняння* $\int\limits_{h_1(0)}^{h_2(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_3(0)$, $|\, h_1(0) \,| \leqslant H_1$, $0 \leqslant b(x,t) \leqslant b_0$, $b_x(x,t) \leqslant b_1$, $f(x,t) \geqslant 0, c(x,t) \leqslant 0$, $c(x,t) - b_x(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in [-H_1, H_3 + H_1] \times [0,T]$, $H_1$, $H_3$- *деякі додатні сталі, значення яких зазначимо нижче,* $\mu_3'(t) \leqslant 0$, $\mu_3'(t)\mu_4(t) - \mu_4'(t)\mu_3(t) \leqslant 0$,
$\mu_5'(t) + \frac{\mu_4(t)}{\mu_3^2(t)}\left(\mu_3'(t)\mu_4(t) - 2\mu_4'(t)\mu_3(t)\right) > 0$, $t \in [0,T]$;

*2)* $\varphi \in C^2[h_1(0), h_2(0)]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = \overline{1,5}$, $b, c, f \in C^{1,0}([-H_1, H_3 + H_1] \times [0,T])$;

*3)* $\int\limits_{h_1(0)}^{h_2(0)} x\varphi(x)\,dy = \mu_4(0)$, $\int\limits_{h_1(0)}^{h_2(0)} x^2\varphi(x)\,dy = \mu_5(0)$, $\varphi(h_1(0)) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_2(0)) = \mu_2(0)$,

*можна зазначити таке число* $t_0$, $0 < t_0 \leqslant T$, *що розв'язок задачі (7)-(12) існує при* $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

*Доведення.* З умов (2), (4) та припущень $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [h_1(0), \infty)$, $\mu_3(0) > 0$ випливає, що існує єдине значення $h_2(0) \geqslant h_1(0)$, яке є розв'язком рівняння $\int\limits_{h_1(0)}^{h_2(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_3(0)$. Тоді введемо позначення $h_0 \equiv h_3(0)$. З умов теореми за принципом максимуму [4] для розв'язку задачі (7)-(9) правильна оцінка

$$v(y,t) \geqslant M_0 > 0\,, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T\,, \tag{13}$$

де $M_0$- відома величина, яка визначається через вихідні дані. Тоді з (10) випливає оцінка

$$h_3(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_0} \equiv H_3 < \infty\,, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{14}$$

З умови (11), використовуючи (10), (13) та умову теореми, отримаємо

$$|\, h_1(t) \,| \leqslant \frac{\mu_4(t)}{\mu_3(t)} + \frac{\mu_3(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)\,dy} \leqslant H_1\,, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{15}$$

За принципом максимуму [4] виконується оцінка

$$v(y,t) \leqslant M_1 < \infty\,, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_T\,, \tag{16}$$

Тут $M_1 > 0$ – стала, яку визначаємо через вихідні дані. З умови (10) одержимо оцінку знизу для $h_3(t)$

$$h_3(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_1} \equiv H_2 > 0\,, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{17}$$

Задача (7) – (9) еквівалентна рівнянню

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+h_1'(\tau)+\xi h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} v_\xi(\xi,\tau)+$$

$$+c(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]\, d\xi\, d\tau\,, \qquad (y,t)\in \overline{Q}_T\,, \tag{18}$$

де

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\xi,0)\varphi(\xi h_3(0)+h_1(0))\, d\xi + \int_0^t G_{1\xi}(y,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h_3^2(\tau)}\mu_1(\tau)\, d\tau -$$

$$-\int_0^t G_{1\xi}(y,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h_3^2(\tau)}\mu_2(\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau) f(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\, d\xi\, d\tau\,,\ (y,t)\in\overline{Q}_T\,, \tag{19}$$

$G_1(y,t,\xi,\tau)$ – функція Гріна для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h_3^2(t)} v_{yy} + f(yh_3(t)+h_1(t),t)\,, \qquad (y,t)\in Q_T \tag{20}$$

з умовами (8), (9). З (10) та (11) отримаємо

$$h_3(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int_0^1 v(y,t)\, dy}\,, \tag{21}$$

$$h_1(t) = \frac{\mu_4(t)}{\mu_3(t)} - \frac{\mu_3(t)\int_0^1 yv(y,t)\, dy}{\left(\int_0^1 v(y,t)\, dy\right)^2}\,. \tag{22}$$

Продиференціюємо (10)-(12) за $t$, використовуючи рівняння (7) та умови (9), одержимо систему рівнянь

$$a(t)(v_y(1,t)-v_y(0,t)) + h_1'(t)h_3(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)) + h_3'(t)h_3(t)\mu_2(t) =$$

$$= h_3(t)\mu_3'(t) - h_3(t)\int_0^1 b(yh_3(t)+h_1(t),t)v_y(y,t)\, dy -$$

$$-h_3^2(t)\int_0^1 c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\, dy - h_3^2(t)\int_0^1 f(yh_3(t)+h_1(t),t)\, dy\,, \tag{23}$$

$$a(t)(v_y(1,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t))+h_1'(t)h_3(t)\mu_2(t)+h_3'(t)h_3(t)\mu_2(t)=$$

$$=\mu_4'(t)-h_1(t)\mu_3'(t)-h_3(t)\int\limits_0^1 yb(yh_3(t)+h_1(t),t)v_y(y,t)\,dy-$$

$$-h_3^2(t)\int\limits_0^1 yc(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy-h_3^2(t)\int\limits_0^1 yf(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy\,, \qquad (24)$$

$$a(t)(h_3(t)v_y(1,t)-2h_3(t)\mu_2(t)+2\mu_3(t))+h_1'(t)h_3^2(t)\mu_2(t)+h_3'(t)h_3^2(t)\mu_2(t)=$$

$$=\mu_5'(t)-2h_1(t)\mu_4'(t)+h_1^2(t)\mu_3'(t)-h_3^2(t)\int\limits_0^1 y^2b(yh_3(t)+h_1(t),t)v_y(y,t)\,dy-$$

$$-h_3^3(t)\int\limits_0^1 y^2c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy-h_3^3(t)\int\limits_0^1 y^2f(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy\,. \qquad (25)$$

Помножимо (24) на $h_3(t)$ і віднімемо від (25). Провівши інтегрування частинами, отримаємо рівняння розв'язане стосовно $a(t)$

$$a(t)=\frac{1}{2\mu_3(t)-h_3(t)(\mu_2(t)+\mu_1(t))}\Big(\mu_5'(t)-2h_1(t)\mu_4'(t)-h_3(t)\mu_4'(t)+h_1^2(t)\mu_3'(t)+$$

$$+h_1(t)h_3(t)\mu_3'(t)-h_3^2(t)\int\limits_0^1(1-2y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int\limits_0^1 y(1-y)\big(c(yh_3(t)+h_1(t),t)-b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh_3(t)+h_1(t)}\big)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int\limits_0^1 y(1-y)f(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy\Big)\,. \qquad (26)$$

Використовуючи умови (9), (10), знаменник рівняння (26) зведемо до вигляду

$$2\mu_3(t)-h_3(t)(\mu_2(t)+\mu_1(t))=h_3(t)\int\limits_0^1(1-2y)v_y(y,t)\,dy=$$

$$=h_3(t)\int\limits_0^{\frac12}(1-2y)(v_y(y,t)-v_y(1-y,t))\,dy\,. \qquad (27)$$

З (18), (19) знайдемо $v_y(y,t)$

$$v_y(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+h_1'(\tau)+\xi h_3'(\tau)}{h_3(\tau)} v_\xi(\xi,\tau)+$$

$$+c(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]\, d\xi\, d\tau\,, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_T\,, \tag{28}$$

$$v_{0y}(y,t) = h_3(0)\int\limits_0^1 G_2(y,t,\xi,0)\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0))\,d\xi - \int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau) f(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\,d\xi\,d\tau\,,\ (y,t)\in\overline{Q}_T\,. \tag{29}$$

Підставимо (28), (29) в (27). Тоді всі доданки в (27) при $t=0$ дорівнюють нулю, крім першого доданка, який зведемо до вигляду

$$h_3(t)h_3(0)\int\limits_0^{\frac12}(1-2y)\,dy\int\limits_0^1 (G_2(y,t,\xi,0)-G_2(1-y,t,\xi,0))\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0))\,d\xi \;=$$

$$= h_3(t)h_3(0)\int\limits_0^{\frac12}(1-2y)\,dy\int\limits_0^{\frac12}(G_2(y,t,\xi,0)-G_2(y,t,1-\xi,0))\,\times$$

$$\times(\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0))-\varphi'((1-\xi)h_3(0)+h_1(0)))\,d\xi.$$

Тоді, використовуючи припущення теореми, робимо висновок про існування деякого числа $t_1$, $0<t_1\leqslant T$ такого, що при $0<t\leqslant t_1$ правильна оцінка

$$2\mu_3(t)-h_3(t)(\mu_2(t)+\mu_1(t)) \geqslant \frac12 h_3(t)h_3(0)\int\limits_0^{\frac12}(1-2y)\,dy\,\times$$

$$\times\int\limits_0^{\frac12}(G_2(y,t,\xi,0)-G_2(y,t,1-\xi,0))\,(\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0))-$$

$$-\varphi'((1-\xi)h_3(0)+h_1(0)))\,d\xi \;>0. \tag{30}$$

Отже, задачу (7)-(12) зведено до системи рівнянь в області $Q_{t_1}=\{(y,t)\,:\,0<y<1\,,\,0<t<t_1\}$

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+p_1(\tau)+\xi p_3(\tau)}{h_3(\tau)} w(\xi,\tau)+$$

$$+c(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]\,d\xi\,d\tau\,, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_{t_1}\,, \tag{31}$$

$$w(y,t)=v_{0y}(y,t)+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\Big[\frac{b(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+p_1(\tau)+\xi p_3(\tau)}{h_3(\tau)}w(\xi,\tau)+$$

$$+c(\xi h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]\,d\xi\,d\tau\,, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_{t_1}\,, \tag{32}$$

$$h_1(t)=\frac{\mu_4(t)}{\mu_3(t)}-\frac{\mu_3(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)\,dy}{\left(\int\limits_0^1 v(y,t)\,dy\right)^2}\,, \qquad t\in[0,t_1]\,, \tag{33}$$

$$h_3(t)=\frac{\mu_3(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)\,dy}, \qquad t\in[0,t_1]\,, \tag{34}$$

$$a(t)=\frac{1}{2\mu_3(t)-h_3(t)(\mu_2(t)+\mu_1(t))}\Big(\mu_5'(t)-2h_1(t)\mu_4'(t)-h_3(t)\mu_4'(t)+h_1^2(t)\mu_3'(t)+$$

$$+h_1(t)h_3(t)\mu_3'(t)-h_3^2(t)\int_0^1(1-2y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int_0^1 y(1-y)\big(c(yh_3(t)+h_1(t),t)-b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh_3(t)+h_1(t)}\big)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int_0^1 y(1-y)f(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy\Big)\,, \qquad t\in[0,t_1]\,, \tag{35}$$

$$a(t)(w(0,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t))+p_1(t)h_3(t)\mu_1(t)=$$

$$=\mu_4'(t)-h_3(t)\mu_3'(t)-h_1(t)\mu_3'(t)+h_3(t)\int_0^1(1-y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^2(t)\int_0^1(1-y)c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy+h_3^2(t)\int_0^1(1-y)f(yh_3(t)+$$

$$+h_1(t),t)\,dy\,, \qquad t\in[0,t_1]\,, \tag{36}$$

$$a(t)(w(1,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t))+p_1(t)h_3(t)\mu_2(t)+p_3(t)h_3(t)\mu_2(t)=$$

$$=\mu_4'(t)-h_1(t)\mu_3'(t)-h_3(t)\int_0^1 yb(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t)\,dy-$$

$$-h_3^2(t)\int_0^1 yc(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy - h_3^2(t)\int_0^1 yf(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy\,, \qquad t\in[0,t_1]\,, \tag{37}$$

де $w(y,t)\equiv v_y(y,t)$, $p_1(t)\equiv h_1'(t)$, $p_3(t)\equiv h_3'(t)$.

Застосуємо методику дослідження обернених задач. Нехай функції $(a,\ h_1,\ h_3,\ p_1,\ p_3,\ v,\ w)\in(C[0,t_1])^5\times(C(\overline{Q}_{t_1}))^2$, $a(t)>0$, $h_3(t)>0$ є розв'язком системи рівнянь (31)-(37). Покажемо, що функції $(a,\ h_1,\ h_3,\ v)$ належать до класу $C[0,t_1]\times(C^1[0,t_1])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t_1})$, $a(t)>0$, $h_3(t)>0$ і є розв'язком задачі (7)-(12). Оскільки функція $v_0(y,t)$ є розв'язком задачі (20), (8), (9), то $v_0\in C^{2,1}(\overline{Q}_{t_1})$. З (31) робимо висновок, що $v\in C^{2,1}(\overline{Q}_{t_1})$ є розв'язком рівняння

$$v_t=\frac{a(t)}{h_3^2(t)}v_{yy}+\frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)+p_1(t)+yp_3(t)}{h_3(t)}w+$$
$$+c(yh_3(t)+h_1(t),t)v+f(yh_3(t)+h_1(t),t) \tag{38}$$

і задовольняє умови (8), (9). Те, що $w(y,t)\equiv v_y(y,t)$, отримаємо, продиференціювавши (31) за $y$. З (33), (34) і того, що $v\in C^{2,1}(\overline{Q}_{t_1})$, $\mu_3\in C^1[0,T]$, $\mu_4\in C^1[0,T]$, випливає, що $h_1\in C^1[0,t_1]$, $h_3\in C^1[0,t_1]$. Продиференціюємо (33), (34) за $t$ та скористаємося (38)

$$a(t)(w(0,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t))+p_1(t)h_3(t)\mu_1(t)=$$
$$=\mu_4'(t)-h_3(t)\mu_3'(t)-h_1(t)\mu_3'(t)-2h_3(t)(h_3'(t)-p_3(t))\int_0^1 yv(y,t)\,dy+\mu_3(t)(h_3'(t)-p_3(t))+$$
$$+h_3(t)\int_0^1(1-y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t)\,dy+h_3^2(t)\int_0^1(1-y)c(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy$$
$$+h_3^2(t)\int_0^1(1-y)f(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy+\mu_3(t)(p_1(t)-h_1'(t))\,,$$
$$a(t)(w(1,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t))+p_1(t)h_3(t)\mu_2(t)+p_3(t)h_3(t)\mu_2(t)=$$
$$=\mu_4'(t)-2h_3(t)(h_3'(t)-p_3(t))\int_0^1 yv(y,t)\,dy-h_1(t)\mu_3'(t)-$$
$$-h_3(t)\int_0^1 yb(yh_3(t)+h_1(t),t)w(y,t)\,dy-$$
$$-h_3^2(t)\int_0^1 yc(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy-$$

$$-h_3^2(t)\int_0^1 yf(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy+\mu_3(t)(p_1(t)-h_1'(t))\,.$$

Від цих рівностей віднімемо відповідно (36), (37) і отримаємо

$$2h_3(t)(h_3'(t)-p_3(t))\int_0^1 yv(y,t)\,dy=\mu_3(t)(h_3'(t)-p_3(t))+\mu_3(t)(p_1(t)-h_1'(t))\,,$$

$$2h_3(t)(h_3'(t)-p_3(t))\int_0^1 yv(y,t)\,dy=\mu_3(t)(p_1(t)-h_1'(t))\,.$$

Звідси випливає, що $\mu_3(t)(h_3'(t)-p_3(t))=0$. Оскільки $\mu_3(t)>0$, то $p_3(t)\equiv h_3'(t)$, а відповідно і $p_1(t)\equiv h_1'(t)$. Враховуючи, що $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (7), з (33) та (34) одержимо виконання умов (10), (11), проінтегрувавши (35)-(37) за $t$ та використавши (33), (34), отримаємо умову (12). Отже, еквівалентність задачі (7)-(12) до системи рівнянь (31)-(37) показано.

Доведемо існування розв'язку сиситеми рівнінь (31)-(37), застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [2]. Встановимо оцінки невідомих $a(t)$, $w(y,t)$, $p_1(t)$, $p_3(t)$.

Використавши (33), (34), чисельник (35) зведемо до вигляду

$$\mu_5'(t)-2h_1(t)\mu_4'(t)-h_3(t)\mu_4'(t)+h_1^2(t)\mu_3'(t)+h_1(t)h_3(t)\mu_3'(t)-$$

$$-h_3^2(t)\int_0^1(1-2y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int_0^1 y(1-y)\big(c(yh_3(t)+h_1(t),t)-b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh_3(t)+h_1(t)}\big)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int_0^1 y(1-y)f(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy=\mu_5'(t)+\frac{\mu_4(t)}{\mu_3^2(t)}\big(\mu_3'(t)\mu_4(t)-2\mu_4'(t)\mu_3(t)\big)+$$

$$+\frac{\mu_3'(t)\mu_4(t)-\mu_4'(t)\mu_3(t)}{\left(\int_0^1 v(y,t)\,dy\right)^2}\int_0^1(1-2y)v(y,t)\,dy-\frac{\mu_3'(t)\mu_3^2(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy}{\left(\int_0^1 v(y,t)\,dy\right)^4}\int_0^1(1-y)v(y,t)\,dy-$$

$$-h_3^2(t)\int_0^1(1-2y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int_0^1 y(1-y)\big(c(yh_3(t)+h_1(t),t)-b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh_3(t)+h_1(t)}\big)v(y,t)\,dy+$$

$$+h_3^3(t)\int_0^1 y(1-y)f(yh_3(t)+h_1(t),t)\,dy\,.$$

Визначимо знак інтеграла

$$\int_0^1(1-2y)v(y,t)\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)(v(y,t)-v(1-y,t))\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)\int_{1-y}^{y}v_\eta(\eta,t)\,d\eta\,dy.$$

Поміняємо порядок інтегрування, тоді

$$\int_0^1(1-2y)v(y,t)\,dy=-\int_0^1\eta\,(1-\eta)v_\eta(\eta,t)\,d\eta.$$

Провівши міркування, аналогічні до попередніх, та враховуючи припущення, що $b(x,t)\leqslant b_0$, $b_x(x,t)\leqslant b_1$, отримаємо

$$\int_0^1(1-2y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)(b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)-$$

$$-b((1-y)h_3(t)+h_1(t),t)v(1-y,t))\,dy=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)b(yh_3(t)+h_1(t),t)\int_{1-y}^{y}v_\eta(\eta,t)\,d\eta\,dy+$$

$$+h_3\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)v(1-y,t)\int_{1-y}^{y}b_\eta(\eta h_3(t)+h_1(t),t)\,d\eta\,dy\leqslant$$

$$\leqslant -b_0\int_0^1 y\,(1-y)v_y(y,t)\,dy-h_3b_1\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)^2v(1-y,t)\,dy.$$

При $t=0$ доданки в (32) дорівнюють 0, крім доданка

$$h_3(0)\int_0^1 G_2(y,t,\xi,0)\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0))\,d\xi\geqslant h_0\min_{[0,1]}\varphi'(yh_3(0)+h_1(0))\equiv M_2>0.$$

Тоді можна зробити висновок про існування деякого числа $t_2$, $0 < t_2 \leqslant T$ такого, що

$$w(y,t) \geqslant \frac{1}{2}M_2 > 0., \qquad (y,t) \in \overline{Q}_{t_2}, \tag{39}$$

З припущень теореми та оцінок (13), (14), (15), (17), (39) отримаємо

$$a(t) \geqslant A_0 > 0, \qquad t \in [0,t_2]. \tag{40}$$

Використовуючи те, що

$$G_2(y,t,\xi,0) - G_2(y,t,1-\xi,0) > 0$$

в області $[0,\frac{1}{2}) \times [0,T]$, та оцінки (14), (16), (30), з (35) одержимо нерівність

$$\frac{a(t)}{h_3^2(t)} \leqslant C_1 \Bigg[\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)dy\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0)) - \varphi'((1-\xi)h_3(0)+$$

$$+h_1(0))(G_2(y,t,\xi,0) - G_2(y,t,1-\xi,0))d\xi\Bigg]^{-1}.$$

Помножимо на знаменник правої частини нерівності та проінтегруємо від 0 до $t$

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{h_3^2(\tau)}d\tau \int\limits_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)dy\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0)) - \varphi'((1-\xi)h_3(0)+$$

$$+h_1(0))(G_2(y,t,\xi,0) - G_2(y,t,1-\xi,0))d\xi \leqslant C_1 t.$$

Ввівши позначення

$$r(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(1-2y)dy\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\varphi'(\xi h_3(0)+h_1(0)) - \varphi'((1-\xi)h_3(0)+$$

$$+h_1(0))\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left(\exp\left(-\frac{(y-\xi+2n)^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(-\frac{(y+\xi+2n)^2}{4\sigma}\right)\right)d\xi,$$

отримаємо

$$r(\theta(t)) \leqslant C_1 t.$$

Оскільки $r(s) > 0$ і $r'(s) > 0$, то існує такий проміжок $[0,R_0]$, $R_0 = \sup\limits_{[0,+\infty)} r(s)$, на якому обернена функція $r^{-1}(\sigma)$ визначена і монотонна. Тоді

$$\theta(t) \leqslant r^{-1}(C_1 t) \leqslant C_2, \qquad t \in [0,t_3],$$

де число $t_3$, $0 < t_3 \leqslant T$ задовольняє нерівність

$$C_1 t_3 \leqslant R_0.$$

Звідси
$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \qquad t \in [0, t_3]. \tag{41}$$
Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$, тоді з (36), (37) знаходимо
$$|p_1(t)| \leqslant C_3 + C_4 W(t), \qquad t \in [0, t_3], \tag{42}$$
$$|p_3(t)| \leqslant C_5 + C_6 W(t), \qquad t \in [0, t_3]. \tag{43}$$
З (32) одержимо нерівність
$$W(t) \leqslant C_7 + C_8 \int\limits_0^t \left(1 + W(\tau) + W^2(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$
Позначимо $W_1(t) = W(t) + 1$, тоді
$$W_1(t) \leqslant C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{44}$$
Нерівність (44) розв'яжемо аналогічно до [5]. Якщо число $t_4$, $0 < t_4 \leqslant T$ задовольняє умову, визначену через відомі сталі, то отримаємо оцінку
$$|w(y,t)| \leqslant W(t) \leqslant M_3 < \infty, \qquad (y,t) \in \overline{Q}_{t_4}. \tag{45}$$
Тоді з (42), (43) приходимо до оцінок
$$|p_1(t)| \leqslant P_1 < \infty, \qquad t \in [0, t_4], \tag{46}$$
$$|p_3(t)| \leqslant P_3 < \infty, \qquad t \in [0, t_4]. \tag{47}$$
Подамо систему рівнянь (31)-(37) у вигляді рівняння $\nu = P\nu$, де $\nu = (a(t), h_1(t), h_3(t), p_1(t), p_3(t), v(y,t), w(y,t))$, а оператор $P$ визначається рівняннями (31)-(37). Позначимо множину $N = \{(a(t), h_1(t), h_3(t), p_1(t), p_3(t), v(y,t), w(y,t)) \in (C[0,t_0])^5 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^2$: $A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1$, $|h_1(t)| \leqslant H_1$, $H_2 \leqslant h_3(t) \leqslant H_3$, $|p_1(t)| \leqslant P_1$, $|p_3(t)| \leqslant P_3$, $M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1$, $\frac{1}{2}M_2 \leqslant w(y,t) \leqslant M_3\}$, де $t_0 = \min(t_1, t_2, t_3, t_4)$. З оцінок (13), (16), (14), (17), (15), (39), (40), (41), (45)-(47) випливає, що оператор $P$ відображає множину $N$ в себе. Те, що множина $N$ є компактна, доведено в [5]. За теоремою Шаудера розв'язок системи рівнянь (31)-(37) існує, а отже, існує і розв'язок задачі (7)-(12).

**Теорема 2.** *Припустимо, що виконуються умови:*

*1)* $b, c, f \in C^{1,0}\left([h_1(0), +\infty) \times [0,T]\right)$, $f(x,t) \geqslant 0$, $(x,t) \in \left([h_1(0), +\infty) \times [0,T]\right)$;

*2)* $\varphi \in C^1([h_1(0), +\infty))$, $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0$, $x \in [h_1(0), +\infty)$, $\varphi'(x) - \varphi'(h_2(0) + h_1(0) - x) > 0$, $x \in \left[h_1(0), \frac{h_2(0)}{2} + \frac{h_1(0)}{2}\right)$, $\mu_i(t) > 0$, $i = 1, 2$, $t \in [0,T]$.

*Тоді можна зазначити таке число* $t_0$, $0 < t_0 \leqslant T$, *що розв'язок задачі (7)-(12) єдиний при* $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

*Доведення.* Припустимо, що існує два розв'язки $(a_i,\ h_{1i},\ h_{3i},\ v_i)$, $i = 1,2$ задачі (7)-(12). Позначимо
$\frac{a_i(t)}{h^2_{3i}(t)} = \widetilde{a_i}(t)$, $\frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)} = q_{1i}(t)$, $\frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)} = q_{3i}(t)$. Різниці $a(t) = \widetilde{a_2}(t) - \widetilde{a_1}(t)$, $q_1(t) = q_{12}(t) - q_{11}(t)$, $q_3(t) = q_{32}(t) - q_{31}(t)$, $v(y,t) = v_2(y,t) - v_1(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \widetilde{a_2}(t)v_{yy} + \left(\frac{b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)}{h_{32}(t)} + q_{12}(t) + y\,q_{32}(t)\right)v_y + c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)v+$$

$$+a(t)v_{1yy} + q_1(t)v_{1y} + y\,q_3(t)v_{1y} + b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)\left(\frac{1}{h_{32}(t)} - \frac{1}{h_{31}(t)}\right)v_{1y}+$$

$$+\frac{1}{h_{31}(t)}\Big(b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t) - b(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)\Big)v_{1y}+$$

$$+\Big(c(yh_{32}(t)) + h_{12}(t),t) - c(yh_{31}(t)) + h_{11}(t),t)\Big)v_1+$$

$$+f(yh_{32}(t)) + h_{12}(t),t) - f(yh_{31}(t)) + h_{11}(t),t)\,, \qquad (y,t) \in Q_T \tag{48}$$

та умови

$$v(y,0) = 0\,, \qquad y \in [0,1]\,, \tag{49}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0\,, \qquad t \in [0,T]\,, \tag{50}$$

$$\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_{32}(t)} - \frac{1}{h_{31}(t)}\right)\,, \qquad t \in [0,T]\,, \tag{51}$$

$$\int_0^1 y\,v(y,t)\,dy = \mu_4(t)\left(\frac{1}{h^2_{32}(t)} - \frac{1}{h^2_{31}(t)}\right) - \mu_3(t)\left(\frac{h_{12}(t)}{h^2_{32}(t)} - \frac{h_{11}(t)}{h^2_{31}(t)}\right)\,, \qquad t \in [0,T]\,, \tag{52}$$

$$\int_0^1 y^2\,v(y,t)\,dy = \mu_5(t)\left(\frac{1}{h^3_{32}(t)} - \frac{1}{h^3_{31}(t)}\right) - 2\mu_4(t)\left(\frac{h_{12}(t)}{h^3_{32}(t)} - \frac{h_{11}(t)}{h^3_{31}(t)}\right)+$$

$$+\mu_3(t)\left(\frac{h^2_{12}(t)}{h^3_{32}(t)} - \frac{h^2_{11}(t)}{h^3_{31}(t)}\right)\,, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{53}$$

Розв'язок задачі (48)-(50) за допомогою функції Гріна подамо у вигляді

$$v(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G^*_1(y,t,\xi,\tau)\Big[a(\tau)v_{1\xi\xi} + q_1(\tau)v_{1\xi} + \xi\,q_3(\tau)v_{1\xi}+$$

$$+b(\xi h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)\left(\frac{1}{h_{32}(\tau)} - \frac{1}{h_{31}(\tau)}\right)v_{1\xi}+$$

$$+\frac{1}{h_{31}(\tau)}\Big(b(\xi h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau) - b(\xi h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau)\Big)v_{1\xi}+$$

$$+\Big(c(\xi h_{32}(\tau)) + h_{12}(\tau),\tau) - c(\xi h_{31}(\tau)) + h_{11}(\tau),\tau)\Big)v_1+$$

$$+f(\xi h_{32}(\tau)) + h_{12}(\tau),\tau) - f(\xi h_{31}(\tau)) + h_{11}(\tau),\tau)\Big]d\xi d\tau\,, \qquad (54)$$

де $G_1^*(y,t,\xi,\tau)$- функція Гріна для рівняння

$$v_t = \widetilde{a_2}(t)v_{yy} + \left(\frac{b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)}{h_{32}(t)} + q_{12}(t) + y\,q_{32}(t)\right)v_y + c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v$$

з умовами (49), (50).

Виразимо $h_{1i}(t)$, $h_{3i}(t)$ через $q_{1i}(t)$, $q_{3i}(t)$

$$h_{3i}(t) = h_0 \exp\left(\int_0^t q_{3i}(\tau)d\tau\right)\,,$$

$$h_{1i}(t) = h_1(0) + h_0\int_0^t q_{1i}(\tau)\exp\left(\int_0^\tau q_{3i}(\sigma)d\sigma\right)d\tau\,.$$

Використовуючи рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau\,,$$

отримаємо

$$\frac{1}{h_{32}^k(t)} - \frac{1}{h_{31}^k(t)} = -\frac{k}{h_0^k}\int_0^t q_3(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(-k\int_0^t (q_{31}(\tau)+\sigma q_3(\tau))d\tau\right)d\sigma\,, k=1,2,3$$

$$h_{32}(t) - h_{31}(t) = h_0\int_0^t q_3(\tau)d\tau\int_0^1 \exp\left(\int_0^t (q_{31}(\tau)+\sigma q_3(\tau))d\tau\right)d\sigma\,,$$

$$h_{12}(t) - h_{11}(t) = h_0\Bigg(\int_0^t q_1(\tau)\exp\left(\int_0^\tau q_{32}(\sigma)d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int_0^t q_{11}(\tau)\int_0^\tau q_3(\eta)d\eta\int_0^1 \exp\left(\int_0^\tau (q_{31}(\sigma)+\rho\,q_3(\sigma))d\sigma\right)d\rho d\tau\Bigg)\,,$$

$$h_{12}^2(t) - h_{11}^2(t) = 2h_1(0)h_0\Bigg(\int_0^t q_1(\tau)\exp\left(\int_0^\tau q_{32}(\sigma)d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t q_{11}(\tau)\int\limits_0^\tau q_3(\eta)d\eta\int\limits_0^1 \exp\left(\int\limits_0^\tau (q_{31}(\sigma)+\rho\, q_3(\sigma))d\sigma\right)d\rho d\tau\Bigg)+$$

$$+h_0^2\Bigg(\int\limits_0^t q_1(\tau)(q_{12}(\tau)+q_{11}(\tau))\exp\left(2\int\limits_0^\tau q_{32}(\sigma)d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t q_{11}^2(\tau)\int\limits_0^\tau 2q_3(\eta)d\eta\int\limits_0^1 \exp\left(2\int\limits_0^\tau (q_{31}(\sigma)+\rho\, q_3(\sigma))d\sigma\right)d\rho d\tau\Bigg). \tag{55}$$

Оскільки $(a_i,\, h_{1i},\, h_{3i},\, v_i)$, $i=1,2$ - розв'язки задачі (7)-(12), то для них правильні рівності, аналогічні (35)-(37). Провівши міркування аналогічні як при знаходженні оцінки (30), враховуючи припущення теореми, отримаємо, що при деякому числі $t_0$, $0<t_0\leqslant T$ виконується

$$\frac{2\mu_3(t)}{h_{32}(t)}-(\mu_2(t)+\mu_1(t))\geqslant\frac{1}{2}h_0\int\limits_0^{\frac12}(1-2y)\,dy\int\limits_0^{\frac12}(G_2(y,t,\xi,0)-$$

$$-G_2(y,t,1-\xi,0))(\varphi'(\xi h_{32}(0)+h_{12}(0))-\varphi'((1-\xi)h_{32}(0)+h_{12}(0)))\,d\xi\;>0.$$

Тоді $a(t)$, $q_1(t)$, $q_3(t)$, $v(y,t)$ задовольнятимуть рівняння

$$a(t)\left(\frac{2\mu_3(t)}{h_{32}(t)}-(\mu_2(t)+\mu_1(t))\right)=-2\widetilde{a_1}(t)\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_{32}(\tau)}-\frac{1}{h_{31}(\tau)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{h_{32}^3(\tau)}-\frac{1}{h_{31}^3(\tau)}\right)(\mu_5'(t)-2h_{11}(t)\mu_4'(t)+$$

$$+h_{11}^2(t)\mu_3'(t))-\left(\frac{1}{h_{32}^2(\tau)}-\frac{1}{h_{31}^2(\tau)}\right)(\mu_4'(t)-h_1(t)\mu_3'(t))-$$

$$-\frac{h_{12}(\tau)-h_{11}(\tau)}{h_{32}^2(t)}\left(\frac{2\mu_4'(t)}{h_{32}(t)}-\mu_3'(t)\right)+$$

$$+\left(h_{12}^2(\tau)-h_{11}^2(\tau)\right)\frac{\mu_3'(t)}{h_{32}^3(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\int\limits_0^1(1-2y)b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v(y,t)\,dy+$$

$$+\left(1-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)\int\limits_0^1(1-2y)\big(b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_1(y,t)\,dy-$$

$$-\left(\frac{1}{h_{32}(\tau)}-\frac{1}{h_{31}(\tau)}\right)\int\limits_0^1(1-2y)b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_1(y,t)\,dy+$$

$$+\int_0^1 y(1-y)\big(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-b_\eta(\eta,t)|_{\eta=yh_{32}(t)+h_{12}(t)}\big)v(y,t)\,dy+$$

$$+\int_0^1 y(1-y)\big(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_1(y,t)\,dy+$$

$$+\int_0^1 y(1-y)\big(b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_{1y}(y,t)\,dy+$$

$$+\int_0^1 y(y-1)\big(f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)\,dy\,, \qquad (56)$$

$$a(t)\left(w_1(0,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t)\right)+q_1(t)\mu_1(t)=-\widetilde{a}_2(t)w(0,t)+$$

$$+\left(\frac{1}{h_{32}^2(t)}-\frac{1}{h_{31}^2(t)}\right)\left(\mu_4'(t)-h_{12}(t)\mu_3'(t)\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{h_{32}(t)}-\frac{1}{h_{31}(t)}\right)\mu_3'(t)-\left(h_{12}(t)-h_{11}(t)\right)\frac{\mu_3'(t)}{h_{31}^2(t)}+$$

$$+\frac{1}{h_{32}(t)}\int_0^1(1-y)b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)w(y,t)\,dy+$$

$$+\frac{1}{h_{32}(t)}\int_0^1(1-y)\big(b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)w_1(y,t)\,dy+$$

$$+\left(\frac{1}{h_{32}(t)}-\frac{1}{h_{31}(t)}\right)\int_0^1(1-y)b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)w_1(y,t)\,dy+$$

$$+\int_0^1(1-y)c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v(y,t)\,dy+\int_0^1(1-y)\big(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-$$

$$-c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_1(y,t)\,dy+$$

$$+\int_0^1(1-y)\left(f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\right)\,dy\,, \qquad (57)$$

$$a(t)\left(w_1(1,t)-\mu_2(t)+\mu_1(t)\right)+q_1(t)\mu_1(t)+q_3(t)\mu_2(t)=-\widetilde{a}_2(t)w(1,t)+$$

$$+\left(\frac{1}{h_{32}^2(t)}-\frac{1}{h_{31}^2(t)}\right)\left(\mu_4'(t)-h_{12}(t)\mu_3'(t)\right)-\left(h_{12}(t)-h_{11}(t)\right)\frac{\mu_3'(t)}{h_{31}^2(t)}-$$

$$-\frac{1}{h_{32}(t)}\int\limits_0^1 yb(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)w(y,t)\,dy-$$

$$-\frac{1}{h_{32}(t)}\int\limits_0^1 y\big(b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)w_1(y,t)\,dy-$$

$$-\left(\frac{1}{h_{32}(t)}-\frac{1}{h_{31}(t)}\right)\int\limits_0^1 yb(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)w_1(y,t)\,dy-$$

$$-\int\limits_0^1 yc(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)v(y,t)\,dy-\int\limits_0^1 y\big(c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-$$

$$-c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\big)v_1(y,t)\,dy-$$

$$-\int\limits_0^1 y\left(f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\right)\,dy\,, \tag{58}$$

де $w(y,t)$ отримаємо, продиференціювавши (54) за $y$

$$w(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\xi,\tau)\Big[a(\tau)v_{1\xi\xi}+q_1(\tau)v_{1\xi}+\xi\,q_3(\tau)v_{1\xi}+$$

$$+b(\xi h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\left(\frac{1}{h_{32}(\tau)}-\frac{1}{h_{31}(\tau)}\right)v_{1\xi}+$$

$$+\frac{1}{h_{31}(\tau)}\Big(b(\xi h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)-b(\xi h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)\Big)v_{1\xi}+$$

$$+\Big(c(\xi h_{32}(\tau))+h_{12}(\tau),\tau)-c(\xi h_{31}(\tau))+h_{11}(\tau),\tau)\Big)v_1+$$

$$+f(\xi h_{32}(\tau))+h_{12}(\tau),\tau)-f(\xi h_{31}(\tau))+h_{11}(\tau),\tau)\Big]d\xi d\tau\,. \tag{59}$$

Припущення теореми забезпечують правильність таких рівностей:

$$b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)=\left(y\left(h_{32}(t)-h_{31}(t)\right)+h_{12}(t)-h_{11}(t)\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^1 b_x\left(y\left(h_{31}(t)+\sigma(h_{32}(t)-h_{31}(t))\right)+h_{11}(t)+\sigma(h_{12}(t)-h_{11}(t)),t\right)d\sigma$$

$$c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)=\left(y\left(h_{32}(t)-h_{31}(t)\right)+h_{12}(t)-h_{11}(t)\right)\times$$

$$\times \int_0^1 c_x\left(y\left(h_{31}(t)+\sigma(h_{32}(t)-h_{31}(t))\right)+h_{11}(t)+\sigma(h_{12}(t)-h_{11}(t)),t\right)d\sigma$$

$$f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)-f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)=\left(y\left(h_{32}(t)-h_{31}(t)\right)+h_{12}(t)-h_{11}(t)\right)\times$$

$$\times \int_0^1 f_x\left(y\left(h_{31}(t)+\sigma(h_{32}(t)-h_{31}(t))\right)+h_{11}(t)+\sigma(h_{12}(t)-h_{11}(t)),t\right)d\sigma\,. \qquad (60)$$

Підставивши (54), (55), (59), (60) у (56)-(58), отримаємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду стосовно невідомих $a(t)$, $q_1(t)$, $q_3(t)$. З єдиності розв'язку таких систем випливає, що $a(t)\equiv 0$, $q_1(t)\equiv 0$, $q_3(t)\equiv 0$. Тоді $a_1(t)=a_2(t)$. А з (54), (55) (59), (60) одержимо, що $h_{11}(t)=h_{12}(t)$, $h_{31}(t)=h_{32}(t)$, $v_1(y,t)=v_2(y,t)$. Отже, єдиність розв'язку задачі доведено.

---


1. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності. // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55. – №7. – С. 901-910.

2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.– М., 1977.

3. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М., 2001.

4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М., 1968.

5. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003.

# DETERMINATION OF A LEADING COEFFICIENT OF THE PARABOLIC EQUATION IN A DOMAIN WITH UNKNOWN BOUNDARIES

**Iryna Barans'ka**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

We establish conditions for the existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a parabolic equation with unknown time dependent leading coefficient in a domain with free boundary.

*Key words:* inverse problem, parabolic equation, free boundary.

Стаття надійшла до редколегії 05.07.2005

Прийнята до друку 19.10.2005