ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
*Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.39–43*

VISNYK LVIV UNIV.
*Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.39–43*

УДК 515.12

# ГРУБА ТОПОЛОГІЯ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

**Інна БЄЛІНСЬКА**

*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто простори грубих відображень метричних просторів. На таких просторах введено грубу топологію, яка в певному сенсі є відповідником у асимптотичній топології тонкої топології Уітні. Показано незв'язність простору класів еквівалентності грубих відображень у грубій топології.

*Ключові слова:* груба топологія, грубе відображення.

**1.** В останні кілька років інтенсивно розвивається асимтотична топологія – розділ топології і метричної геометрії, в якому досліджуються властивості метричних просторів (загальніше – грубих просторів) "на нескінченності". Основи асимптотичної топології закладено в фундаментальній статті [1]. Поняття грубої структури і пов'язані з ним поняття грубої геометрії та асимптотичної топології можна знайти в [2].

Нагадаємо, що метричний простір називають *власним*, якщо замикання кожної кулі в ньому компактне. Відображення $f\colon X \to Y$ власних метричних просторів $(X,d)$, $(Y,\rho)$ називають *грубим*, якщо виконано умови:

1) (груба рівномірність) для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для кожних $x, y \in X$ з умови $d(x,y) < \varepsilon$ випливає $\varrho(f(x), f(y)) < \delta$;

2) (метрична власність) прообраз кожної обмеженої множини обмежений.

Зауважмо, що умова 2 слугує для вираження властивості неперервності відображення $f$ у нескінченності.

Легко бачити, що власні метричні простори та грубі відображення утворюють категорію. Мета нашої праці – запровадити топологію в множині морфізмів цієї категорії. Ідеологія грубої геометрії вимагає ототожнення морфізмів, які є на скінченній відстані, тому топологія насправді означується на відповідних фактор-множинах. Розглянута топологія є відповідником тонкої топології Уітні, яку застосовують у диференціальній топології [3]. Показано незв'язність утвореного простору функцій.

**2. Груба топологія.** Нехай $(X,d)$, $(Y,\rho)$ – власні метричні простори. Позначимо через $C(X,Y)$ множину всіх грубих відображень з простору $X$ у простір $Y$.

Вводимо відношення еквівалентності $\sim$ на множині грубих відображень: $f \sim g$ тоді і тільки тоді, коли існує $C>0$ таке, що $\rho(f(x),g(x))<C$ для всіх $x\in X$ (той факт, що $\sim$ – відношення еквівалентності, можна легко перевірити і ми залишаємо це читачеві).

Позначатимемо через $[f(x)] = \{g(x) \,|\, g(x) \sim f(x)\}$ клас еквівалентності, що містить $f$, а через $\widetilde{C}(X,Y)$– множину всіх класів еквівалентності.

Нехай $f\colon X \to \mathbb{R}$ – функція, означена на власному метричному просторі. Запис $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ (або еквівалентно $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} c$ ; тут $c$ – дійсне число, або $+\infty$) означає, що для кожного $\varepsilon>0$ існує компактна підмножина $K\subset X$ така, що $|c-f(x)|<\varepsilon$ (або $f(x)>\varepsilon$ для випадку $c=+\infty$) для всіх $x \in K$.

Приймемо

$$\mathbb{E} = \{\varepsilon(x) : X \to (0,+\infty) \mid \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty\}.$$

**Теорема 1.** *Множини вигляду*

$$O([f(x)],\varepsilon(x)) = \left\{[g(x)] \,\Big|\, \frac{\rho(f(x),g(x))}{\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0,\ \varepsilon(x)\in\mathbb{E}\right\},$$

*де* $f\in\widetilde{C}(X,Y)$, $\varepsilon(x)\in\mathbb{E}$, *утворюють базу топології на* $\widetilde{C}(X,Y)$.

*Доведення.* Перевіримо, що задана сім'я множин задовольняє критерій бази.

Нехай $f(x) \in O([g_1(x)],\varepsilon_1(x)) \bigcap O([g_2(x)],\varepsilon_2(x))$.

Знайдемо $\varepsilon$ таке, що $O([f,\varepsilon]) \subset O([g_1(x)],\varepsilon_1(x)) \bigcap O([g_2(x)],\varepsilon_2(x))$. Тоді з того, що $[f] \in O([g_i],\varepsilon_i)$ випливає $\dfrac{\rho(f_i(x),g_i(x))}{\varepsilon_i(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ .

Візьмемо $\varepsilon(x) = \sqrt{\min(\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x))}$. Нехай $[h] \in O([f];\varepsilon)$. Покажемо, що $[h] \in O([g_i];\varepsilon_i), i=1,2$. Справді,

$$\frac{\rho(h(x),g_i(x))}{\varepsilon_i(x)} \leqslant \frac{\rho(h(x),f(x))+\rho(f(x),g_i(x))}{\varepsilon_i(x)} = \frac{\rho(h(x),f(x))\varepsilon(x)}{\varepsilon(x)\varepsilon_i(x)} + \frac{\rho(f(x),g_i(x))}{\varepsilon_i(x)} \leqslant$$
$$\frac{\rho(h(x),f(x))}{\varepsilon(x))}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_i(x)}}{\varepsilon_i(x)} + \frac{\rho(f(x),g_i(x))}{\varepsilon_i(x)} \leqslant \frac{\rho(h(x),f(x))}{\varepsilon(x))}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i(x)}} + \frac{\rho(f(x),g_i(x))}{\varepsilon_i(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Очевидно, що множини вигляду $O([f(x)],\varepsilon(x))$ утворюють покриття простору $\widetilde{C}(X,Y)$.

Топологію на множині $\widetilde{C}(X,Y)$, що задається теоремою 1, називаємо *грубою*.

**Твердження 1.** *Простори вигляду* $\widetilde{C}(X,Y)$ *в грубій топології є* $T_2$*-просторами.*

*Доведення.* Нехай $[f(x)], [g(x)] \in \widetilde{C}(X,Y)$ і $[f(x)] \neq [g(x)]$. Доведемо, що існує $\varepsilon \in \mathbb{E}$ таке, що $O([f(x), \varepsilon(x)]) \cap O([g(x), \varepsilon(x)]) = \emptyset$. Оскільки $[f(x)] \neq [g(x)]$, то $f(x) \not\sim g(x)$, а це означає, що вибрані функції не відрізняються на константу. Тобто, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in X$ , що $\rho(f(x_n), g(x_n)) \geqslant n$.

Виберемо $\varepsilon(x_n) = \sqrt{n}$. Функція $\varepsilon$ може бути продовжена до власної функції, означеної на всьому просторі $X$(див. доведення теореми 3.1 в [1]); продовжену функцію теж позначатимемо через $\varepsilon$.
Нехай $O([f(x)], \varepsilon(x)) = \{[h(x)] \mid \frac{\rho(f(x),h(x))}{\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\}$. Припустимо, що існує $[h(x)] \in O([f(x), \varepsilon(x)]) \cap O([g(x), \varepsilon(x)])$. Тоді з того, що

$$\frac{\rho(f(x), h(x))}{\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \quad \text{і} \quad \frac{\rho(g(x), h(x))}{\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

випливає, що

$$\frac{\rho(f(x), h(x)) + \rho(g(x), h(x))}{\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

З іншого боку,

$$\frac{\rho(f(x), h(x)) + \rho(g(x), h(x))}{\varepsilon(x)} \geqslant \frac{\rho(f(x_n), g(x_n))}{\varepsilon(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Це неможливо, тому що $\dfrac{\rho(f(x_n), g(x_n))}{\varepsilon(x)} \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$.

Отже, $O([f(x), \varepsilon(x)]) \cap O([g(x), \varepsilon(x)]) = \emptyset$, звідки випливає, що простори вигляду $\widetilde{C}(X,Y)$ у грубій топології є $T_2$-просторами.

**Твердження 2.** *Простори вигляду $\widetilde{C}(X,\mathbb{R})$ в грубій топології не є сепарабельними.*

*Доведення.* Припустимо, що $[f_i(x)|i \in \mathbb{N}]$ зліченна всюди щільна множина в $\widetilde{C}(X,\mathbb{R})$. Для кожної послідовності функцій $f_i(x)$ існує функція $f(x)$ така, що $\frac{f_i(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Знайдемо такий окіл $O([g(x)], \varepsilon(x))$ в $\widetilde{C}(X,\mathbb{R})$, який не містить елементів вибраної множини. Нехай $g(x) = f^2(x), \varepsilon(x) = f(x)$. Покажемо, що $f_i(x) \notin O([g(x)], \varepsilon(x))$ для кожного $i$

$$\frac{|g(x) - f_i(x)|}{\varepsilon(x)} = \frac{|f^2(x) - f_i(x)|}{f(x)} = |f(x) - 0| \to 0.$$

Звідси випливає, що $f_i(x) \notin O([g(x)], \varepsilon(x))$. Отже, простір $\widetilde{C}(X,\mathbb{R})$ не є сепарабельним.

*Зауваження 1.* Цей результат можна поширити і на інші простори функцій, зокрема на випадок функцій в $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+$ і т.п.

**3. Незв'язність простору функцій у грубій топології.** Основний результат цього параграфа є аналогом відповідного твердження для топології Уітні (див. [4]).

**Теорема 2.** *Нехай $X$ – власний некомпактний метричний простір, тоді множина $\widetilde{C}(X) = \widetilde{C}(X,\mathbb{R})$ незв'язна.*

*Доведення.* Вибираємо базисну точку $x_0 \in X$ і розглянемо функцію $f(x) = d(x, x_0)$. Легко бачити, що $f$ – грубе відображення з $X$ в $\mathbb{R}$. Нехай $\varepsilon(x) = d(x, x_0)$, тоді $O([f(x)], \varepsilon(x)) = \{[g(x)] \Big| \dfrac{|f(x) - g(x)|}{\varepsilon(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0\}$.

Оскільки $[f(x)] \in O([f(x)], \varepsilon(x))$, то $O([f(x)], \varepsilon(x))$ – непорожня відкрита множина в $\widetilde{C}(X)$.

Покажемо, що доповнення до $O([f(x)], \varepsilon(x))$ в $\widetilde{C}(X)$ непорожнє і відкрите.

1. Доведемо, що $\widetilde{C}(X) \backslash O([f(x)], \varepsilon(x)) \neq \emptyset$. Нехай $h(x) = (f(x))^2 = (d(x, x_0))^2$, тоді

$$\frac{|f(x) - h(x)|}{\varepsilon(x)} = \frac{|\varepsilon(x) - (\varepsilon(x))^2|}{\varepsilon(x)} = |1 - \varepsilon(x)| = |\varepsilon(x) - 1| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,$$

тобто $[h] \in \widetilde{C}(X) \backslash O([f(x), \varepsilon(x)]$.

2. Покажемо, що множина $\widetilde{C}(X) \backslash O([f(x)], \varepsilon(x))$ відкрита.

Нехай $[g(x)] \in \widetilde{C}(X) \backslash O([f(x)], \varepsilon(x))$, тоді $\dfrac{|f(x) - g(x)|}{\varepsilon(x)} \not\to 0$ при $x \to \infty$. В $X$ існує послідовність $x_i$ така, що

$$\frac{|f(x_i) - g(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} \to C > 0,$$

або

$$\frac{|f(x_i) - g(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} \to +\infty.$$

Тобто, шукаємо таке $\eta(x) \in \mathbb{E}$, що для кожного $g\prime(x) \in O([g(x)], \eta(x))$ маємо

$$\frac{|f(x_i) - g\prime(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} \to C > 0,$$

або

$$\frac{|f(x_i) - g(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} \to +\infty,$$

і

$$\frac{|g(x_i) - g\prime(x_i)|}{\eta(x_i)} \to 0.$$

Нехай $\eta(x) = \varepsilon(x)$. Тоді

$$\frac{|f(x_i) - g\prime(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} = \frac{|f(x_i) - g(x_i)| + |g(x_i) - g\prime(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} =$$

$$\frac{|f(x_i) - g(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} + \frac{|g(x_i) - g\prime(x_i)|}{\varepsilon(x_i)} \to C \text{ або до } +\infty.$$

Звідси випливає, що $g\prime(x) \notin O([f(x)], \varepsilon(x))$.

Отже, ми довели, що доповнення до $O([f(x)], \varepsilon(x)$ – відкрита і непорожня множина, а це означає, що простір $\widetilde{C}(X, \mathbb{R})$ можна зобразити у вигляді диз'юнктного об'єднання двох непорожних відкритих множин. Звідси випливає, що простір $\widetilde{C}(X, \mathbb{R})$ – незв'язний.

**4. Зауваження та відкриті питання.** Означення грубої топології на множині $\widetilde{C}(X, Y)$ легко сформулювати для випадку, коли $X$ – грубий простір (множина, наділена грубою структурою), $Y$ – власний метричний простір. Задачу адекватного означення грубої топології на множині $\widetilde{C}(X, Y)$, де $X$, $Y$ – грубі простори, залишається відкритою. І. Протасов висловив припущення, що в цьому випадку на множині $\widetilde{C}(X, Y)$ може існувати природна груба структура. До поняття грубої структури близьким є поняття кульової структури, введене І.Протасовим [5]. Залишаємо відкритим питання введення кульової структури на множині відображень, узгоджених з кульовими структурами.

---


1. *Dranishnikov A.* Asymptotic topology // Russian Math, Surveus. – 2000. – Vol. 55. – N 6. – P. 71-116.
2. *Roe J.* Coars cohomology and index theory for complete Riemannian manifolds // Memoirs Amer. Math. Soc. – 1993. – N 497.
3. *Хирш М.* Дифференциальная топология. – М., 1979.
4. *Rudin M. E.* The box product of countably many metric spaces // Gren. Top. Appl. – 1972. – Vol .2. – N 4. – P. 293-298.
5. *Protasov I., Banakh T.* Ball structures and coloring of graphs and groups. – Lviv, 2003.


## COARSE TOPOLOGY ON FUNCTIONAL SPACES


**Inna Belins'ka**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*



Spaces of coarse maps of metric are considered. We introduce a coarse topology on these spaces, which, in some sense, is a counterpart of the fine Whitney topology. We show that the space of equivalence classes of coarse maps in coarse topology is not connected.



*Key words:* coarse topology, coarse map.

Стаття надійшла до редколегії 06.06.2005

Прийнята до друку 19.10.2005