Серія мех.-мат. 2005. Вип. 64. С. 44–61

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 2005. Vol. 64. P. 44–61

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

Олег БУГРІЙ[1], **Галина ДОМАНСЬКА**[1], **Наталія ПРОЦАХ**[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3 б 79060 Львів, Україна*

В узагальнених просторах Соболєва досліджено мішану задачу для гіперболічного рівняння, яке містить степеневі нелінійності в головній частині. Залежно від величини показника степеня нелінійностей отримано умови існування єдиного розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: мішана задача, узагальнені простори Соболєва, гіперболічне рівняння.

В останні два десятиліття увага багатьох авторів була привернута до вивчення задач для нелінійних гіперболічних рівнянь третього порядку з головною частиною вигляду

$$u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,t,\nabla u_t))_{x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t,\nabla u))_{x_i}$$

(див., наприклад [1–4], і бібліографію у працях [2,4]). Рівняння такого типу моделюють поширення хвиль у в'язко-пружному матеріалі.

У цій статті досліджено мішану задачу для часткового випадку зазначеного рівняння, коли a_{ij} – степеневі функції від ∇u_t, причому степені залежать від просторових змінних x, а b_{ij} – лінійні функції від ∇u.

Нехай $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею Γ, регулярною в сенсі Кальдерона [5, с. 45], $Q_\tau=\Omega\times(0,\tau)$, $\tau\in(0,T]$, $S_T=\Gamma\times(0,T)$, $\Omega_\tau=Q_T\cap\{t=\tau\}$, $Q_{s,\tau}=\Omega\times(s,\tau)$, $s,\tau\in[0,T]$, $s<\tau$.

Розглянемо в області Q_T рівняння

$$u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)|u_{x_it}|^{p(x)-2}u_{x_it})_{x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i} + a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t + b_0(x,t)u = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,t) \tag{1}$$

з початковими

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{2}$$

і крайовою

$$u|_{S_T} = 0 \tag{3}$$

умовами.

Припускатимемо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

(A) : $a_i \in L^\infty(Q_T)$, $\alpha_0 \leqslant a_i(x,t) \leqslant \alpha_1$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $i = 0, 1 \ldots, n$, α_0, α_1 – додатні сталі;

(B) : b_{ij}, b_{ijt}, $b_0 \in L^\infty(Q_T)$, $b_{ij}(x,t) = b_{ji}(x,t)$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, $i,j = 1, \ldots, n$;

$$\beta_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \beta^0|\xi|^2 \text{ майже для всіх } (x,t) \in Q_T$$

і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, β_0, β^0 — додатні сталі;

(C) : $c_i \in L^\infty(Q_T)$, $i = 1, \ldots, n$;

(P) : $p : \Omega \to (0, +\infty)$, $p \in L^\infty(\Omega)$, $1 < p_1 \leqslant p_2 < +\infty$, де $p_1 = \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} p(x)$, $p_2 = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} p(x)$;

(Q) : $q : \Omega \to (0, +\infty)$, $q \in L^\infty(\Omega)$, $1 < q_1 \leqslant q_2 < +\infty$, де $q_1 = \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} q(x)$, $q_2 = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} q(x)$.

Визначимо функціонал $\rho_p(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_p(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{p(x)}dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{p(x)}(\Omega)$ називають множину функцій v таких, що $\rho_p(v,\Omega) < +\infty$. У [6] доведено, що $L^{p(x)}(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $||v; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf\{\lambda > 0 : \rho_p(v/\lambda, \Omega) \leqslant 1\}$. Ввівши функціонал $\rho_p(\cdot, Q_T)$, так само визначимо простір $L^{p(x)}(Q_T)$. Нехай $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ – замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $||w; W_0^{1,p(x)}(\Omega)|| = ||w; L^{p(x)}(\Omega)|| + \sum\limits_{i=1}^{n} ||w_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)||$. Оскільки ці простори не достатньо відомі, то наведемо деякі їхні властивості, отримані в [6]. Сформулюємо їх у вигляді твердження.

Твердження 1 ([6]). *Нехай виконуються умови* **(P)**, **(Q)**.

1. Для довільних $w \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ виконується узагальнена нерівність Гельдера $\int_\Omega |v(x)w(x)|dx \leqslant r_p||v; L^{p'(x)}(\Omega)|| \cdot ||w; L^{p(x)}(\Omega)||$, де $r_p \in (0, +\infty)$ - стала, що залежить тільки від p та Ω, $1/p(x) + 1/p'(x) = 1$, $x \in \Omega$.

2. Якщо $p \leqslant q$, то $L^{q(x)}(\Omega) \circlearrowleft L^{p(x)}(\Omega)$ і $||u; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant (1 + \operatorname{mes}\Omega)||u; L^{q(x)}(\Omega)||$, де $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, а символ $\circlearrowleft$ означає неперервне вкладення.

3. $L^{p(x)}(\Omega)$ *є сепарабельним і рефлексивним простором,* $L^{p(x)}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}$, $[L^{p(x)}(\Omega)]^* = L^{p'(x)}(\Omega)$.

4. Якщо $||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant 1$, *то* $\rho_p(w,\Omega) \leqslant 1$.

Доведемо тепер низку властивостей узагальнених просторів Лебега та Соболєва, які будуть нам потрібні при доведенні теорем існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(3).

Зауваження 1. 1. Нехай $w_1 \leqslant w_2$ в області Ω, $M_1 = \{\lambda > 0 : \rho_p(w_1/\lambda, \Omega) \leqslant 1\}$, $M_2 = \{\lambda > 0 : \rho_p(w_2/\lambda, \Omega) \leqslant 1\}$. Оскільки $\rho_p(w_1/\lambda, \Omega) \leqslant \rho_p(w_2/\lambda, \Omega)$ $\forall \lambda > 0$, то $M_2 \subset M_1$. Тому $||w_1; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf M_1 \leqslant \inf M_2 = ||w_2; L^{p(x)}(\Omega)||$. Отже, функціонали $\rho_p(\cdot, \Omega)$ та $||\cdot; L^{p(x)}(\Omega)||$ - "неспадні".

2. Нехай $w \in L^{p(x)}(\Omega)$, Ω_1 – деяка підобласть Ω, $M = \{\lambda > 0 : \rho_p(w/\lambda, \Omega) \leqslant 1\}$, $M_1 = \{\lambda > 0 : \rho_p(w/\lambda, \Omega_1) \leqslant 1\}$. Оскільки $\rho_p(w/\lambda, \Omega_1) \leqslant \rho_p(w/\lambda, \Omega)$ $\forall \lambda > 0$, то $M \subset M_1$. Тому $||w; L^{p(x)}(\Omega_1)|| = \inf M_1 \leqslant \inf M = ||w; L^{p(x)}(\Omega)||$, тобто норма по "більшій області інтегрування" є більша.

3. Нехай $w \in L^{p(x)}(\Omega)$, функції w, p дорівнюють нулю поза Ω, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\Omega \subset \Omega_2$, $M = \{\lambda > 0 : \rho_p(w/\lambda, \Omega) \leqslant 1\}$, $M_2 = \{\lambda > 0 : \rho_p(w/\lambda, \Omega_2) \leqslant 1\}$. Оскільки $\rho_p(w/\lambda, \Omega_2) = \rho_p(w/\lambda, \Omega)$ $\forall \lambda > 0$, то $M = M_2$. Тому виконується рівність $||w; L^{p(x)}(\Omega)|| = \inf M = \inf M_2 = ||w; L^{p(x)}(\Omega_2)||$.

Лема 1. *Нехай виконується умова* **(P)**, $w = w(x)$ *- деяка функція.*

1. Якщо $0 < \rho_p(w, \Omega) \leqslant M_3 < +\infty$, *то* $||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant \max\{M_3^{1/p_2}, M_3^{1/p_1}\}$.

2. Якщо $0 < ||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant M_4 < +\infty$, *то* $\rho_p(w, \Omega) \leqslant \max\{M_4^{p_1}, M_4^{p_2}\}$.

Доведення. 1. Нехай виконуються умови леми $0 < \rho_p(w, \Omega) \leqslant M_3 < +\infty$. Припустимо спочатку, що $M_3 \leqslant 1$. Тоді $\rho_p(w/M_3^{1/p_2}, \Omega) \leqslant \rho_p(w, \Omega)/M_3 \leqslant 1$. Тому $||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant M_3^{1/p_2}$. Якщо тепер M_3 задовольняє умову $M_3 \geqslant 1$, то матимемо оцінку $\rho_p(w/M_3^{1/p_1}, \Omega) \leqslant \rho_p(w, \Omega)/M_3 \leqslant 1$. Тому $||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant M_3^{1/p_1}$. Отже, $||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant \max\{M_3^{1/p_2}, M_3^{1/p_1}\}$.

2. Нехай виконуються умови леми $0 < ||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant M_4 < +\infty$. Оскільки $||w/M_4; L^{p(x)}(\Omega)|| = ||w; L^{p(x)}(\Omega)||/M_4 \leqslant 1$, то з пункту 4 твердження 1 матимемо, що $\rho_p(w/M_4, \Omega) \leqslant 1$. Якщо $M_4 \leqslant 1$, то $\rho_p(w, \Omega)/M_4^{p_1} \leqslant \rho_p(w/M_4, \Omega) \leqslant 1$, тобто $\rho_p(w, \Omega) \leqslant M_4^{p_1}$. Якщо $M_4 \geqslant 1$, то $\rho_p(w, \Omega)/M_4^{p_2} \leqslant \rho_p(w/M_4, \Omega) \leqslant 1$. Звідси одержимо, що $\rho_p(w, \Omega) \leqslant M_4^{p_2}$. Отже, $\rho_p(w, \Omega) \leqslant \max\{M_4^{p_1}, M_4^{p_2}\}$. Лему доведено. □

Наслідок 1. *Якщо виконується умова* **(P)**, *функції* $w, w_1, w_2, \ldots \in L^{p(x)}(\Omega)$, *то* $\rho_p(w_k - w, \Omega) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *точно тоді, коли* $||w_k - w; L^{p(x)}(\Omega)|| \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Лема 2. $L^{p_2}(0,T; L^{p(x)}(\Omega)) \circlearrowleft\circlearrowright L^{p(x)}(Q_T) \circlearrowleft\circlearrowright L^{p_1}(0,T; L^{p(x)}(\Omega))$, *де символ* $\circlearrowleft\circlearrowright$ *означає неперервне та щільне вкладення.*

Доведення. Доведемо спочатку вкладення $L^{p_2}(0,T; L^{p(x)}(\Omega)) \circlearrowleft\circlearrowright L^{p(x)}(Q_T)$. Нехай $w \in L^{p_2}(0,T; L^{p(x)}(\Omega))$, $M_5 = ||w; L^{p_2}(0,T; L^{p(x)}(\Omega))||$, $z(t) = ||w(t); L^{p(x)}(\Omega)||$, $t \in (0,T)$. Оскільки $M_5 < +\infty$, то $z(t) < +\infty$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Визначимо множини $A = \{t : z(t) \leqslant 1\}$, $B = \{t : z(t) > 1\}$. З пункту 2 леми 1 та нерівності Гельдера отримаємо оцінку

$$\rho_p(w, Q_T) = \int\limits_0^T \rho_p(w(t), \Omega)dt \leqslant \int\limits_A z^{p_1}(t)dt + \int\limits_B z^{p_2}(t)dt \leqslant C_1 M_5^{p_1} + M_5^{p_2}, \qquad (4)$$

де стала C_1 не залежить від w. З пункту 1 леми 1 та оцінки (4) отримаємо, що $\|u; L^{p(x)}(Q_T)\| \leqslant \max\{(C_1 M_5^{p_1} + M_5^{p_2})^{1/p_2}, (C_1 M_5^{p_1} + M_5^{p_2})^{1/p_1}\}$. Отже, тотожний оператор $I : L^{p_2}(0, T; L^{p(x)}(\Omega)) \to L^{p(x)}(Q_T)$ – неперервний. Оскільки $C_0^\infty(Q_T)$ міститься в $L^{p_2}(0, T; L^{p(x)}(\Omega))$, то наше вкладення є щільним.

Очевидно, виконується нерівність $\frac{p(x)}{p(x)-1} \leqslant \frac{p_1}{p_1-1}$, $x \in \Omega$. Тому з тільки що доведеного матимемо, що $L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(0, T; L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega)) \circlearrowleft\circlearrowright L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(Q_T)$. З зауваження 5.14 [5, с. 24] та пункту 3 твердження 1 одержимо вкладення $L^{p(x)}(Q_T) \circlearrowleft\circlearrowright L^{p_1}(0, T; L^{p(x)}(\Omega))$. Лему доведено. □

Відомо ([7, с. 117]), що функції з просторів Лебега є неперервними в середньому. З теореми 2.10 [6, с. 602] випливає, що функції з узагальнених просторів Лебега загалом такою властивістю не володіють. Наведемо приклад, коли така властивість є. Введемо позначення: якщо w – функція визначена в області Q_T, то вважатимемо, що вона продовжена нулем поза Q_T, і що $w^{+\delta}$, $\delta \in \mathbb{R}$, – це така функція, що $w^{+\delta}(x, t) = w(x, t + \delta)$, $(x, t) \in Q_T$.

Лема 3. *Нехай $w \in L^{p(x)}(Q_T)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_1 > 0$ таке, що для всіх $\delta \in (0, \delta_1)$ виконується нерівність $\|w^{+\delta} - w; L^{p(x)}(Q_T)\| < \varepsilon$.*

Доведення. Існують такі $h, r > 0$, що $Q_T \subset B_h \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} \times (-h, h)$. Тоді $w \in L^{p(x)}(B_{3h})$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Не зменшуючи загальності, припускатимемо, що $\varepsilon < 1$. З пункту 3 твердження 1 та наслідку 1 випливає, що для цього ε існує функція $g \in C(\overline{B}_{3h})$ така, що $\rho_p(w - g, B_{3h}) < \varepsilon$. За рахунок домноження g на зрізаючу функцію області B_h можна вважати, що $g(x, t) = 0$ при $(x, t) \notin B_h$. Тоді для $\delta < h$ матимемо оцінку $\rho_p(w^{+\delta} - g^{+\delta}, B_{2h}) = \rho_p(w - g, B_{3h}) < \varepsilon$. Оскільки $g \in C(\overline{B}_{3h})$, то ця функція рівномірно неперервна на B_{3h}. Тобто, існує $\delta_0 \in (0, a)$ таке, що для всіх $\delta \in (0, \delta_0)$ і для всіх $(x, t) \in B_{2h}$ матимемо оцінку $|g^{+\delta}(x, t) - g(x, t)| < \varepsilon$. Тоді $\rho_p(g^{+\delta} - g, B_{2h}) \leqslant \varepsilon^{p_1} \operatorname{mes} B_{2h}$. Тому з зауваження 1 та нерівності трикутника одержимо

$$\|w^{+\delta} - w; L^{p(x)}(Q_T)\| \leqslant \|w^{+\delta} - w; L^{p(x)}(B_{2h})\| \leqslant \|w^{+\delta} - g^{+\delta}; L^{p(x)}(B_{2h})\| +$$

$$+ \|g^{+\delta} - g; L^{p(x)}(B_{2h})\| + \|g - w; L^{p(x)}(B_{2h})\|.$$

З одержаних співвідношень та наслідку 1 випливає, що права частина цієї нерівності прямує до нуля при $\delta \to 0$, що і доводить нашу лему. □

Лема 4. *Нехай виконується умова* **(P)**, *$w \in L^{p(x)}(Q_T)$ – довільна фіксована функція, $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\omega(t) \equiv \begin{cases} \omega_0 e^{\frac{t^2}{t^2-1}}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases}$ $\omega_0 > 0$ таке число, що $\int\limits_{\mathbb{R}} \omega(t)dt = 1$,*

$\omega^k(t) \equiv k\omega(kt)$, $w_k(t) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}} \omega^k(t-\tau)w(\tau)d\tau = \int\limits_{t-1/k}^{t+1/k} \omega^k(t-\tau)w(\tau)d\tau$, $k \in \mathbb{N}$, *– усереднення функції* w. *Тоді* $w_k \to w$ *сильно в* $L^{p(x)}(Q_T)$ *при* $k \to \infty$.

Доведення. Нехай виконуються припущення леми. Очевидно, що w_k, $k \in \mathbb{N}$, є нескінченно диференційовними за t. Нехай $(x,t) \in Q_T$ – довільна фіксована точка. Тоді $w_k(t) - w(t) = \int_{t-1/k}^{t+1/k} \omega^k(t-\tau)(w(\tau) - w(t))d\tau = \int_{-1/k}^{1/k} \omega^k(-s)(w(t+s) - w(t))ds$. Оскільки $\omega^k(-s) = \omega^k(s)$ для всіх $s \in \mathbb{R}$, то

$$|w_k(x,t) - w(x,t)|^{p(x)} \leqslant \left(\int\limits_{-1/k}^{1/k} |\omega^k(s)|^{p'(x)} ds \right)^{\frac{p(x)}{p'(x)}} \cdot \int\limits_{-1/k}^{1/k} |w^{+s}(x,t) - w(x,t)|^{p(x)} ds \quad (5)$$

для всіх $(x,t) \in Q_T$. Зауважимо, що тут x – параметр і тому ми змогли застосувати звичайну нерівність Гельдера зі степенем $p(x)$ до інтеграла за змінною s. З означення функцій ω^k випливає, що $\omega^k(s) \leqslant k\omega_0$, $s \in \mathbb{R}$. Тому

$$\left(\int\limits_{-1/k}^{1/k} |\omega^k(s)|^{p'(x)} ds \right)^{\frac{p(x)}{p'(x)}} \leqslant \left((\omega_0 k)^{p'(x)} \frac{2}{k} \right)^{\frac{p(x)}{p'(x)}} = 2^{p(x)-1} \omega_0^{p(x)} k \leqslant C_2 k,$$

де стала C_2 не залежить від k. Тоді, зінтегрувавши (5) за $(x,t) \in Q_T$, одержимо, що

$$\rho_p(w_k - w, Q_T) \leqslant C_2 k \int\limits_{Q_T} dxdt \int\limits_{-1/k}^{1/k} |w^{+s} - w|^{p(x)} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2C_2 \sup_{s \in [-1/k, 1/k]} \rho_p(w^{+s} - w, Q_T).$$

З леми 3 та наслідку 1 випливає, що права частина цієї нерівності прямує до нуля при $k \to \infty$ (тоді $s \to 0$). Тому з наслідку 1 матимемо, що $w_k \to w$ сильно в $L^{p(x)}(Q_T)$ при $k \to \infty$. Лему доведено. □

Визначимо функцію R так: $R(r) = \begin{cases} \frac{nr}{n-r}, & 1 \leqslant r < n, \\ +\infty, & n \leqslant r. \end{cases}$ Очевидно, що ця функція зростає на проміжку $[1,n)$ і $r < R(r)$ для $r \in [1,+\infty)$. Принагідно зауважимо, що з теореми вкладення для звичайних просторів Соболєва (див., наприклад, [5, с. 47]) отримуємо, що $W^{1,r}(\Omega) \circlearrowleft L^{R(r)}(\Omega)$ для $r \in [1,+\infty)$.

Лема 5 *(узагальнена нерівність Пуанкаре). Нехай виконуються умови* **(P)**, **(Q)**, *та виконується одна з умов:*

1) $p_2 \leqslant R(p_1)$;

2) існують сталі s_j, s_j^* *і відкриті множини* $\Omega_j \subset \Omega$, $j = \overline{1,m}$, *які складаються зі скінченної кількості компонент з ліпшицевою границею такі, що* $mes(\Omega \setminus \bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \Omega_j) =$

0, $1 = s_1 < s_2 < s_1^* < s_3 < s_2^* < \cdots < s_{m-1} < s_{m-2}^* < n < s_m < s_{m-1}^* < s_m^* = +\infty$ і, крім того, $s_j \leqslant p(x) \leqslant s_j^*$ майже для всіх $x \in \Omega_j$, $j = \overline{1,m}$, $s_k^* < R(s_k)$, $k = \overline{1,m-1}$.

Якщо $w_{x_1}, \dots, w_{x_n} \in L^{p(x)}(\Omega)$, то $w \in L^{p(x)}(\Omega)$ і

$$||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant C_3 \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)|| + ||w; L^{q(x)}(\Omega)|| \right), \tag{6}$$

де стала C_3 не залежить від w.

Доведення. Нехай функція w така, що $w_{x_1}, \dots, w_{x_n} \in L^{p(x)}(\Omega)$.

1. Якщо виконується умова 1 нашої теореми, то з твердження 1 випливає, що $w_{x_1}, \dots, w_{x_n} \in L^{p_1}(\Omega)$. Тому з гладкості межі $\partial\Omega$ та [8, с. 27] отримуємо, що $w \in W^{1,p_1}(\Omega)$. Отже, $w \in W^{1,p_1}(\Omega) \circlearrowleft L^{R(p_1)}(\Omega) \circlearrowleft L^{p_2}(\Omega) \circlearrowleft L^{p(x)}(\Omega)$. З цих вкладень легко отримати нерівність (6).

2. Нехай виконується умова 2 нашої теореми. Розглянемо набір таких функцій $\{\varphi_j\}_{j=1}^m \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, що $\varphi_j(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega_j$, $0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant 1$, $j = \overline{1,m}$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j(x) = 1$, $x \in \overline{\Omega}$. З зауваження 1 випливає, що $||w\varphi_j; L^{p(x)}(\Omega)|| = ||w\varphi_j; L^{p(x)}(\Omega_j)||$ і, крім того, $w_{x_1}, \dots, w_{x_n} \in L^{p(x)}(\Omega_j)$, $j = \overline{1,m}$. Тоді $w_{x_1}, \dots, w_{x_n} \in L^{s_j}(\Omega_j)$ і з [8, с. 27] матимемо, що $u \in W^{1,s_j}(\Omega_j)$, $j = \overline{1,m}$. З умов на $\partial\Omega_j$ та теореми 1.2 [5, с. 47] випливає, що $W^{1,s_j}(\Omega_j) \circlearrowleft L^{R(s_j)}(\Omega_j)$, $j = \overline{1,m}$. Тому, використавши нерівність трикутника, оцінки $|\varphi_j(x)| \leqslant 1$, $j = \overline{1,m}$, і твердження 1, одержимо нерівність

$$||w; L^{p(x)}(\Omega)|| = \left|\left| \sum_{j=1}^{m} w\varphi_j; L^{p(x)}(\Omega) \right|\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} ||w\varphi_j; L^{p(x)}(\Omega)|| = \sum_{j=1}^{m} ||w\varphi_j; L^{p(x)}(\Omega_j)|| \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \operatorname{mes}\Omega) \sum_{j=1}^{m} ||w\varphi_j; L^{s_j^*}(\Omega_j)|| \leqslant C_4 \sum_{j=1}^{m} ||w; L^{R(s_j)}(\Omega_j)|| \leqslant C_5 \sum_{j=1}^{m} ||w; W^{1,s_j}(\Omega_j)||,$$

де стала C_5 не залежить від u. Отже, $u \in L^{p(x)}(\Omega)$.

З умов на $\partial\Omega_j$, $j = \overline{1,m}$, та нерівності Пуанкаре [5, с. 50] випливає оцінка $||w; L^{s_j}(\Omega_j)|| \leqslant C_6(\sum\limits_{i=1}^{n} ||w_{x_i}; L^{s_j}(\Omega_j)|| + ||w; L^1(\Omega_j)||)$. Застосувавши її в попередній нерівності та використавши вкладення $L^{q(x)}(\Omega) \circlearrowleft L^1(\Omega)$, одержимо нерівність

$$||w; L^{p(x)}(\Omega)|| \leqslant C_5 \sum_{j=1}^{m} ||w; W^{1,s_j}(\Omega_j)|| \leqslant C_7 \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_{x_i}; L^{s_j}(\Omega_j)|| + ||w; L^1(\Omega_j)|| \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega_j)|| + ||w; L^q(x)(\Omega_j)|| \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_8 m \left(\sum_{i=1}^{n} ||w_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)|| + ||w; L^{q(x)}(\Omega)|| \right),$$

де стала C_8 не залежить від w. $\square$

Нехай $r_1 = \min\{2, q_1\}$, $r_2 = \max\{2, q_2\}$, $W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega) = W_0^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$. Оскільки $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ та $L^{q(x)}(\Omega)$ неперервно вкладаються в локально випуклий ([5, с. 17]) простір $L^1(\Omega)$, то з зауваження 5.12 [5, с. 22] випливає, що $W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)$ – банахів простір зі стандартною нормою для перетину просторів. Згідно з узагальненою нерівністю Пуанкаре, ми можемо розглядати (і будемо це робити) на цьому просторі еквівалентну норму

$$||u; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)|| = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)|| + ||u; L^{q(x)}(\Omega)||.$$

Легко показати, що $W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)$ – рефлексивний і сепарабельний простір. Нехай $W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_{t_1,t_2})$ – замикання простору $C^\infty([t_1,t_2]; C_0^\infty(\Omega))$ за нормою

$$||u; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_{t_1,t_2})|| = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}; L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})|| + ||u; L^{q(x)}(Q_{t_1,t_2})||, \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T.$$

Позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярний добуток між $[W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*$ і $W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{t_1,t_2}$ скалярний добуток між $[W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_{t_1,t_2})]^*$ і $W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_{t_1,t_2})$.

Припустимо далі, що $p_1 > 2$. Тоді $W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega) \circlearrowleft\circlearrowleft L^2(\Omega) \circlearrowleft\circlearrowleft [W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*$,

$$W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T) \circlearrowleft\circlearrowleft L^{r_1}(0,T; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)),$$

$$[W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)]^* \circlearrowleft\circlearrowleft L^{\frac{r_2}{r_2-1}}(0,T; [W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*).$$

З цих вкладень випливає, що елементи $W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$ та $[W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)]^*$ є розподілами на $(0,T)$ зі значенням в $[W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*$.

Нехай $\{\varphi^\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ – лінійно незалежна всюди щільна в $W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)$ множина функцій, ортонормована в $L^2(\Omega)$,

$$\mathfrak{M}_k = \left\{ \psi \, : \, \psi(x,t) = \sum_{\mu=1}^{k} z_\mu^k(t) \varphi^\mu(x), \;\; z_\mu^1, \ldots, z_\mu^k \in C^1([0,T]) \right\}, \quad \mathfrak{M} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми 5, $p_1 > 2$, $w \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$. Тоді для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існують такі число $k \in \mathbb{N}$ та функція $\psi_k \in \mathfrak{M}_k$, що $||w - \psi_k; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)|| < \varepsilon$.*

Доведення. Нехай виконуються припущення теореми. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $C([0,T]; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)) \circlearrowleft\circlearrowleft L^{r_2}(0,T; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)) \circlearrowleft\circlearrowleft W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$, то отримаємо нерівність $||\, w \,; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)|| \leqslant C_9 ||\, w \,; C([0,T]; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))||$, та існування такого $\chi \in C([0,T]; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))$, що $||w - \chi; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)|| < \varepsilon$. З теореми Вейєрштрасса [5, с. 150] випливає, що існують такі число $k \in \mathbb{N}$ та елементи $v_1, \ldots, v_k \in W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)$, що

$$||\chi - P_k; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)|| \leqslant C_9||\chi - P_k; C([0,T]; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))|| < C_9\varepsilon,$$

де $P_k(x,t) = \sum\limits_{\mu=1}^{k} v_\mu(x)t^\mu$, $(x,t) \in Q_T$, C_9 не залежить від $\varepsilon, w, \chi, P_k$. Для кожного v_μ існують такі $l(k,\mu) \in \mathbb{N}$, $\{\gamma_s^\mu\}_{s=1}^{l(k,\mu)} \subset \mathbb{R}$, що $\left|\left|v_\mu - \sum\limits_{s=1}^{l(k,\mu)} \gamma_s^\mu \varphi^s; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)\right|\right| < \varepsilon k/T^\mu$, $\mu = \overline{1,k}$. Нехай $\psi_k(x,t) = \sum\limits_{\mu=1}^{k} \sum\limits_{s=1}^{l(k,\mu)} \gamma_s^\mu \varphi^s(x)t^\mu$, $(x,t) \in Q_T$. Тоді теорема доведена, бо

$$||u - \psi_k; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)|| \leqslant ||u - \chi; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)||+$$
$$+||\chi - P_k; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)|| + ||P_k - \psi_k; W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)|| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + C_9\varepsilon + C_9||P_k - \psi_k; C([0,T]; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))|| \leqslant (1 + 2C_9)\varepsilon. \quad \square$$

Користуючись стандартною методикою [5], показуємо таке: якщо послідовність $\{w^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ збігається слабко до елемента w в просторі $W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$, (чи в $[W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)]^*$), то вона збігається до w і в просторі $D^*(0,T; [W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми 5, $p_1 > 2$. Тоді для довільної функції $w \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T) \cap L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ такої, що $w_t \in [W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)]^*$ та майже для всіх $t_1, t_2 \in (0,T)$, $t_1 < t_2$, виконується формула інтегрування частинами*

$$\langle w_t, w\rangle_{t_1,t_2} = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |w(x,t_2)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |w(x,t_1)|^2 dx. \tag{7}$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми, $[t_1, t_2] \subset (0,T)$ – довільний фіксований відрізок, $\theta_m(t)$ – така неперервна кусково лінійна функція, що

$$\theta_m(t) = \begin{cases} 1, & t_1 + \frac{2}{m} < t < t_2 - \frac{2}{m}, \\ 0, & t < t_1 + \frac{1}{m},\ t_2 - \frac{1}{m} < t, \end{cases}$$

$\theta'_m(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_1 + 1/m, t_1 + 2/m]$, $\theta'_m(t) \leqslant 0$ при $t \in [t_2 - 2/m, t_2 - 1/m]$. Нехай ω^k таке, як в лемі 4, w задовольняє умови теореми.

Як і в [9, с. 225] розглянемо функцію $v_{m,k}(t) = \theta_m(t)\cdot((\theta_m w)*\omega^k*\omega^k)(t)$, $t \in (t_1,t_2)$, де $*$ – згортка. Так само як і в лемі 4 дововодимо, що $v_{m,k} \to \theta_m^2 w$ сильно в просторі $W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$ при $k \to \infty$. Оскільки $v_{m,k} \in C^1([0,T]; W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))$, то дію $I = \langle w_t, v_{m,k}\rangle_{t_1,t_2}$ можна записати у вигляді $I = \int_{t_1}^{t_2}\langle w_t(t), v_{m,k}(t)\rangle dt$. Перетворимо цей інтеграл так:

$$I = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle w_t(t), \theta_m(t)\cdot((\theta_m w)*\omega^k*\omega^k)(t)\rangle dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle w_t(t), (\theta_m w)*\omega^k*\omega^k(t)\rangle \cdot \theta_m(t) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle \theta_m w_t(t), (\theta_m w) * \omega^k * \omega^k(t) \rangle dt = \int_{\mathbb{R}_\tau} \langle (\theta_m w_t) * \omega^k(\tau), (\theta_m w) * \omega^k(\tau) \rangle d\tau = \tag{8}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_\tau} \langle (\theta_m w)_t * \omega^k(\tau), (\theta_m w) * \omega^k(\tau) \rangle d\tau - \int_{\mathbb{R}_\tau} \langle (\theta'_m w) * \omega^k(\tau), (\theta_m w) * \omega^k(\tau) \rangle d\tau = I_1 - I_2,$$

де $I_1 = \int_{t_1}^{t_2} \langle ((\theta_m w)_t)_k, (\theta_m w)_k \rangle d\tau$, $I_2 = \int_{\mathbb{R}_\tau} d\tau \int_\Omega (\theta'_m w)_k \cdot (\theta_m w)_k dx$. Оскільки

$$(\theta_m w)_t = \theta'_m w + \theta_m w_t \in [W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)]^* \circlearrowleft\circlearrowleft L^{\frac{r_2}{r_2-1}}(0,T;[W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*),$$

то $((\theta_m w)_t)_k = ((\theta_m w)_k)_t$. Крім того, матимемо, що $\theta_m w \in L^{r_1}(0,T;W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))$. Тоді з [9, с. 24] випливають включення $(\theta_m w)_k \in C^\infty([0,T];W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))$ та $((\theta_m w)_t)_k \in C^\infty([0,T];[W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*)$. Тому для цих функцій можна застосувати формулу інтегрування частинами та отримати рівність

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_\Omega |(\theta_m w)_k(x,T)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega |(\theta_m w)_k(x,0)|^2 dx.$$

Але $(\theta_m w)_k(0) = \int_0^T (\theta_m w)(\tau)\omega^k(-\tau)d\tau = \int_0^T \theta_m(\tau) w(\tau) \omega^k(\tau) d\tau$. З означення θ_m та ω^k випливає, що при великому m можна вибрати число k настільки великим, щоб $\operatorname{supp} \theta_m \cap \operatorname{supp} \omega^k = \emptyset$. Тому $(\theta_m u)_k(0) = 0$. Аналогічно можна показати, що $(\theta_m u)_k(T) = 0$.

З леми 4 отримаємо, що $I_2 \to \int_{\mathbb{R}_\tau} \theta'_m \theta_m \int_\Omega |w(x,\tau)|^2 dx d\tau$ при $k \to \infty$. Спрямувавши в (8) $k \to \infty$, отримаємо рівність

$$\langle w_t, \theta_m^2 w \rangle_{t_1,t_2} = - \int_{t_1}^{t_2} \theta'_m(t) \theta_m(t) \int_\Omega |w(x,t)|^2 dx dt. \tag{9}$$

Як і в [9, с. 226] матимемо, що $-\int_{t_1}^{t_2} \theta'_m \theta_m |w|_H^2 dt \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{2}|w(t_2)|_H^2 - \frac{1}{2}|w(t_1)|_H^2$ для майже всіх $t_1, t_2 \in (0,T)$. З означення функцій θ_m випливає, що $\theta_m^2 w \xrightarrow[m\to\infty]{} w$ майже скрізь в Q_{t_1,t_2}. Оскільки $\theta_m^2(t) \leqslant 1$, то послідовність $\{\theta_m^2 w\}_{m\in\mathbb{N}}$ обмежена в рефлексивному просторі $W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_{t_1,t_2})$ (θ_m не залежить від x). Тоді з теореми 5.9 [5, с. 20] випливає, що існує підпослідовність $\{\theta_{m_j}^2 w\}_{j\in\mathbb{N}}$ така, що $\theta_{m_j}^2 w \xrightarrow[j\to\infty]{} w$ слабко в $W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_{t_1,t_2})$ (використовуючи теорему Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла можна довести навіть сильну збіжність). Тому, спрямувавши в (9) $m_j \to \infty$, отримаємо формулу (7) для майже всіх $t_1, t_2 \in (0,T)$. $\square$

Зауваження 2. Якщо $w \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_{t_1,t_2})$ і, крім того, $w_t \in L^2(Q_{t_1,t_2})$, то $\langle w_t, w \rangle_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \langle w_t(t), w(t) \rangle dt$.

Наслідок 2. *За умов теореми 2 матимемо нерівність*

$$\langle w_t, w\rangle_{0,t_2} \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |w(x,t_2)|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |w(x,0)|^2 dx$$

для майже всіх $t_2 \in (0,T)$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми 2. Аналогічно як і в [9, с. 226] матимемо, що з включення $w \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ випливає існування такої послідовності $\{t_1^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $t_1^k \to 0$ при $k \to \infty$, що для кожного t_1^k формула (7) виконується, послідовність $\{w(t_1^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ слабко збіжна в $L^2(\Omega)$ при $k \to \infty$. Оскільки виконуються включення $w, w_t \in L^{\min\{r_1, \frac{r_2}{r_2-1}\}}(0,T;[W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*)$, тому $w \in C([0,T];[W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*)$, то $w(t_1^k) \to w(0)$ сильно в $[W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)]^*$ при $k \to \infty$. Отже, $w(t_1^k) \to w(0)$ слабко в просторі $L^2(\Omega)$ при $k \to \infty$ і тому $\lim\inf\limits_{k\to\infty} \int_\Omega |w(x,t_1^k)|^2 dx \geqslant \int_\Omega |w(x,0)|^2 dx$. Тоді з формули (7) легко отримаємо твердження нашого наслідку. □

Доведемо існування і єдиність розв'язку задачі (1)–(3).

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)** *та умови леми 5 і, крім того,* $p_1 > 2$, $q_1 > 1$, $f_0 \in L^{q'(x)}(Q_T)$, $f_i \in L^{p'(x)}(Q_T)$, $i = 1,\ldots,n$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* u *задачі (1)–(3) (в сенсі розподілів) такий, що* $u \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$, $u_t \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T) \cap C([0,T];(W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega))^*)$.

Доведення. Нехай знову $\{\varphi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – база простору $W_0^{1,p(x),q(x)}(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо послідовність функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi^k(x), \quad N = 1,2,\ldots,$$

де $c_1^N(t),\ldots,c_N^N$ – розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \Bigg[u_{tt}^N\varphi^k + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{x_it}^N|^{p(x)-2}u_{x_it}^N\varphi_{x_i}^k + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}^N\varphi_{x_j}^k + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i}^N\varphi^k +$$
$$+ a_0(x,t)|u_t^N|^{q(x)-2}u_t^N\varphi^k + b_0(x,t)u^N\varphi^k - f_0(x,t)\varphi^k - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)\varphi_{x_i}^k \Bigg] dx = 0; \quad (10)$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^N, \qquad c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N, \qquad k = \overline{1,N},\ \tau \in (0,\tau]. \quad (11)$$

Тут $u_0^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} u_{0,k}^N\varphi^k(x)$, $u_1^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} u_{1,k}^N\varphi^k(x)$, $\lim\limits_{N\to\infty} \|u_0 - u_0^N\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$, $\|u_1 - u_1^N\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

На підставі теореми Каратеодорі [10, с. 54] існує розв'язок задачі (10)–(11), який має абсолютно неперервну похідну і визначений на деякому проміжку $[0, t_0]$, $t_0 \in (0, T]$. З оцінок, отриманих нижче, випливатиме, що $t_0 = T$.

Домножимо кожне рівняння системи (10) відповідно на функцію $c_{kt}^N(t)e^{-\varkappa t}$, $\varkappa > 0$, підсумуємо за k від 1 до N, проінтегруємо за t по проміжку $[0, \tau]$, $\tau \leqslant T$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[u_{tt}^N u_t^N + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)|u_{x_it}^N|^{p(x)} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^N u_{x_jt}^N + \sum_{i=1}^n c_i(x,t) u_{x_i}^N u_t^N +$$

$$+ a_0(x,t)|u_t^N|^{q(x)} + b_0(x,t) u^N u_t^N - f_0(x,t) u_t^N - \sum_{i=1}^n f_i(x,t) u_{x_it}^N \Bigg] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt = 0. \quad (12)$$

Врахувавши умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(P)**, **(Q)**, матимемо

$$\mathfrak{I}_1 := \int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^N u_t^N e^{-\varkappa t}\, dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u_t^N|^2 e^{-\varkappa \tau}\, dx + \frac{\varkappa}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^N|^2 e^{-\varkappa t}\, dx\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |u_1^N|^2\, dx;$$

$$\mathfrak{I}_2 := \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{x_it}^N|^{p(x)} + a_0(x,t)|u_t^N|^{q(x)} \Bigg] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_0 \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{i=1}^n |u_{x_it}^N|^{p(x)} + |u_t^N|^{q(x)} \Bigg] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt;$$

$$\mathfrak{I}_3 := \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^N u_{x_jt}^N + b_0(x,t) u^N u_t^N \Bigg] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \geqslant \frac{\beta_0}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |\nabla u^N|^2 e^{-\varkappa\tau}\, dx -$$

$$- \frac{\beta^0}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |\nabla u_0^N|^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[(\varkappa\beta_0 - \beta_1)|\nabla u^N|^2 - \delta_0 |u^N|^2 - \frac{\beta_2}{\delta_0} |u_t^N|^2 \Bigg] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt,$$

де $\delta_0 > 0$, $\beta_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n b_{ijt}^2(x,t)}$, $\beta_2 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} b_0^2(x,t)$, $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})$;

$$\mathfrak{I}_4 := \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n c_i(x,t) u_{x_i}^N u_t^N e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} (\gamma_0 |\nabla u^N|^2 + |u_t^N|^2) e^{-\varkappa t}\, dx\, dt,$$

де $\gamma_0 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i=1}^n c_i^2(x,t)$.

Згідно з умовами теореми щодо функцій f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ одержимо

$$\mathfrak{I}_5 := \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[f_0(x,t) u_t^N + \sum_{i=1}^n f_i(x,t) u_{x_it}^N \Bigg] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_\tau} \left(\frac{\delta_1}{q(x)} |u_t^N|^{q(x)} + \frac{\delta_2}{p(x)} \sum_{i=1}^n |u_{x_i t}^N|^{p(x)} \right) e^{-\varkappa t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{M_1(\delta_1)}{q'(x)} |f_0(x,t)|^{q'(x)} + \frac{M_2(\delta_2)}{p'(x)} \sum_{i=1}^n |f_i(x,t)|^{p'(x)} \right] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt,$$

де $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\dfrac{1}{q(x)} + \dfrac{1}{q'(x)} = 1$, $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$.

Враховуючи оцінки інтегралів $\mathfrak{J}_1$–$\mathfrak{J}_5$, з (12) матимемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[(u_t^N)^2 + \beta_0 |\nabla u^N|^2 \right] e^{-\varkappa\tau}\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \left[(\varkappa\beta_0 - \beta_1 - \gamma_0)|\nabla u^N|^2 + \left(\varkappa - \frac{\beta_2}{\delta_0} - 1\right) |u_t^N|^2 + \right.$$

$$\left. + \left(2\alpha_0 - \frac{2\delta_2}{p(x)}\right) \sum_{i,j=1}^n |u_{x_i t}^N|^{p(x)} - \delta_0 |u^N|^2 + \left(2\alpha_0 - \frac{2\delta_1}{q(x)}\right) |u_t^N|^{q(x)} \right] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_0} \left(|u_1^N|^2 + \beta^0 |\nabla u_0^N|^2 \right) dx + 2 \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{M_1(\delta_1)}{q'(x)} |f_0(x,t)|^{q'(x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_2(\delta_2)}{p'(x)} \sum_{i,j=1}^n |f_i(x,t)|^{p'(x)} \right] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt, \tag{13}$$

$\tau \in [0,T]$, в якій сталі M_1, M_2 не залежать від N.

Використовуючи нерівність Фрідріхса [5, с. 50], виберемо δ_0 так, щоб

$$\delta_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} |\nabla u^N|^2\, dx\, dt, \ \ \tau \in (0,T].$$

Крім того, нехай $\varkappa, \delta_1, \delta_2$ задовольняють умови $\delta_1 = \frac{q_2\alpha_0}{2}$; $\delta_2 = \frac{\alpha_0 p_2}{2}$; $\varkappa = \max\{\frac{\beta_2}{\delta_0} + 3; \frac{\beta_1 + \gamma_0 + 2}{\beta_0}\}$.

Тоді з (13) і леми 1 одержуємо оцінки

$$\|u^N\|_{L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega))} \leqslant M_3, \quad \|u_t^N\|_{L^\infty((0,T);L^2(\Omega))} \leqslant M_3, \tag{14}$$

$$\|u_t^N\|_{W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)} \leqslant M_3, \tag{15}$$

де стала M_3 не залежить від N.

Введемо оператор

$$A:\ W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T) \to (W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T))^*$$

за формулою

$$\langle Au, v\rangle_{0,T} = \int\limits_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x,t) |u_{x_i}^N|^{p(x)-2} u_{x_i}^N v_{x_i} + a_0(x,t) |u^N|^{q(x)-2} u^N v \right] dx\, dt,$$

$u, v \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$.

Тоді з умови (**A**) і оцінки (15) випливає, що

$$\|Au_t^N\|_{(W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T))^*} \leqslant M_4, \tag{16}$$

де стала M_4 не залежить від N.

Отже, згідно з (14)–(16) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ така, що

$$\begin{gathered}
u_t^{N_k}(\cdot,T) \to \xi \text{ слабко в } L^2(\Omega), \quad u^{N_k} \to u \ast\text{-слабко в } L^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)),\\
u_t^{N_k} \to u_t \ast\text{-слабко в } L^\infty((0,T);L^2(\Omega)), \quad u_t^{N_k} \to u_t \text{ слабко в } W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T),\\
u^{N_k} \to u \text{ в } L^2(Q_T), \quad Au_t^{N_k} \to \chi \text{ слабко в } (W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T))^*
\end{gathered} \tag{17}$$

при $k \to \infty$.

Нехай N_0 довільне фіксоване натуральне число. Тоді, використавши (10) і (17), одержуємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_T} \xi v^{N_0}\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_t v_t^{N_0} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j}^{N_0} + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}v^{N_0} + \tag{18}$$

$$+b_0(x,t)uv^{N_0} - f_0(x,t)v^{N_0} - \sum_{i=1}^n f_i(x,t)v_{x_i}^{N_0}\Big]dxdt + \langle\chi, v^{N_0}\rangle_{0,T} = \int\limits_{\Omega_0} u_1(x)v^{N_0}(x,0)\,dx$$

правильну для довільної функції $v^{N_0} \in \mathfrak{M}_{N_0}$. Аналогічно до теореми 1 доводимо, що множина $\mathfrak{M}$ є щільною у просторі функцій v таких, що $v \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$. Тому з (18) одержуємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_T} \xi v\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}v +$$

$$+b_0(x,t)uv - f_0(x,t)v - \sum_{i=1}^n f_i(x,t)v_{x_i}\Big]dxdt + \langle\chi, v\rangle_{0,T} = \int\limits_{\Omega_0} u_1(x)v(x,0)\,dx, \tag{19}$$

правильну для довільних функцій v таких, що $v \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T)$, $v_t \in L^2(Q_T)$.

Згідно з лемою 1.2 [9, с. 20] $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Тому $u^{N_k}(\cdot,0) \to u(\cdot,0)$ слабко в $L^2(\Omega)$. З іншого боку, $u^{N_k}(\cdot,0) = u_0^{N_k} \to u_0$ в $L^2(\Omega)$. Отже, $u(x,0) = u_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$.

З (19), зокрема, випливає, що

$$u_{tt} = -\sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i} - b_0(x,t)u + f_0(x,t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_i} - \chi.$$

Врахувавши гладкість правої частини цієї рівності, одержимо вкладення

$$u_{tt} \in (W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T))^* \subset L^{r_0}((0,T); L^{q'(x)}(\Omega) + (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*),$$

де $r_0 = \min\{2; \operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega} q'(x)\}$.

Оскільки

$$u_t \in L^{r_0}((0,T); L^{q(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,p(x)}(\Omega)),$$

то на підставі леми 1.2 [9, с. 20] $u_t \in C([0,T]; L^{q'(x)}(\Omega) + (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*)$, тобто $u_t(\cdot, 0)$ має сенс.

Введемо простір $W(Q_T) = \left\{w : w \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T),\ w_t \in (W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T))^*\right\}$. На підставі теореми 2 правильна формула

$$\langle u_{tt}, u_t e^{-\varkappa t}\rangle_{s,\tau} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-\varkappa\tau} dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_s} u_t^2 e^{-\varkappa s} dx + \frac{\varkappa}{2}\int\limits_{Q_{s,\tau}} u_t^2 e^{-\varkappa t} dx dt \qquad (20)$$

майже для всіх s, τ, $s < \tau$ з проміжку $[0,T]$. Зазначимо, що $\langle u_{tt}, \varphi^j\rangle \in L^{r_0}(0,T)$ і $\langle u_{tt}^{N_k}, \varphi^j\rangle \to \langle u_{tt}, \varphi^j\rangle$ слабко в $L^{r_0}(0,T)$ для всіх $j \in \mathbb{N}$. Отже, враховуючи лему 1.2 [9, с. 20], одержимо

$$\int\limits_{\Omega} u_t^{N_k}(x,0)\varphi^j(x)dx \to \int\limits_{\Omega} u_t(x,0)\varphi^j(x)dx.$$

З іншого боку,

$$\int\limits_{\Omega} u_t^{N_k}(x,0)\varphi^j(x)dx \to \int\limits_{\Omega} u_1(x)\varphi^j(x)dx.$$

Тому $u_t(x,0) = u_1(x)$. Аналогічно доводимо, що $u_t(x,T) = \xi(x)$.

Прийнявши до уваги (20), аналогічно як (19) одержимо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-\varkappa\tau} dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_s} u_t^2 e^{-\varkappa s} dx + \int\limits_{Q_{s,\tau}} \Big[-\frac{\varkappa}{2}u_t^2 +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_j t} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i}u_t + b_0(x,t)uu_t -$$
$$-f_0(x,t)u_t - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)u_{x_i t}\Big] e^{-\varkappa t} dx dt + \langle \chi, u_t e^{-\varkappa t}\rangle_{s,\tau} = 0 \qquad (21)$$

для майже всіх s, τ, $s < \tau$ з проміжку $[0,T]$. Оскільки $u_t \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$, то існує така послідовність $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset [0,T]$, $\lim\limits_{m\to+\infty} s_m = 0$ невиключних точок для функції $t \to u_t(x,t)$, що $u(\cdot, s_m) \to u(\cdot, 0)$ слабко в $L^2(\Omega)$. Тоді з (21) на підставі леми 5.3 [5, с. 20] отримуємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-\varkappa\tau} dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-\frac{\varkappa}{2}u_t^2 +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_jt} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i}u_t + b_0(x,t)uu_t -$$

$$-f_0(x,t)u_t - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)u_{x_it}\Big] e^{-\varkappa t}dxdt + \langle\chi, u_t e^{-\varkappa t}\rangle_{0,\tau} \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} u_1^2(x)dx \tag{22}$$

майже для всіх $\tau \in (0,T)$. Зокрема, якщо $u_1 = 0$, то (22) буде рівністю.

Згідно з лемою 2.2 [5, с. 57], яка залишається правильною і для оператора A, і лемою 1.3 [5, с. 84] оператор A семінеперервний. Розглянемо послідовність y_k, де

$$y_k = \langle A(u_t^{N_k}) - A(v), (u_t^{N_k} - v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}, \quad v \in W_{x,0}^{1,p(x),q(x)}(Q_T).$$

Очевидно,

$$0 \leqslant y_k = \langle A(u_t^{N_k}), u_t^{N_k}e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T} - \langle A(u_t^{N_k}), ve^{-\varkappa t}\rangle_{0,T} - \langle Av, (u_t^{N_k} - v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T} =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau}\Big[f_0(x,t)u_t^{N_k} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)u_{x_it}^{N_k} - u_{tt}^{N_k}u_t^{N_k} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_{x_jt}^{N_k} - \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_t^{N_k} -$$

$$- b_0(x,t)u^{N_k}u_t^{N_k}\Big]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^{N_k}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N_k}\Big]\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_1^{N_k}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,0)u_{0,x_i}^{N_k}u_{0,x_j}^{N_k}\Big]\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[f_0(x,t)u_t^{N_k} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)u_{x_it}^{N_k} - \frac{\varkappa}{2}u_t^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\varkappa b_{ij}(x,t) - b_{ijt}(x,t))u_{x_i}^{N_k}u_{x_j}^{N} - \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u^{N_k}u_t^{N_K} - b_0(x,t)u^{N_k}u_t^{N_k}\Big]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt -$$

$$- \langle A(u_t^{N_k}), ve^{-\varkappa t}\rangle_{0,T} - \langle A(v, (u_t^{N_k} - v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}.$$

На підставі леми 5.3 [5, с. 20] і (17) при достатньо великому $\varkappa$ одержимо

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty}\sup y_k \leqslant -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j}\Big]e^{-\varkappa\tau}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[u_1^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,0)u_{0,x_i}u_{0,x_j}\Big]\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[f_0(x,t)u_t + \sum_{i,j=1}^{n} f_i(x,t)u_{x_it} - \frac{\varkappa}{2}u_t^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\varkappa b_{ij}(x,t) - b_{ijt}(x,t))u_{x_i}u_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i}u_t - b_0(x,t)uu_t\Big]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt -$$

$$- \langle\chi, ve^{-\varkappa t}\rangle_{0,T} - \langle A(v), (u_t - v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T}. \tag{23}$$

Інтегруючи в (22) частинами $\int\limits_{Q_\tau} \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_j t}e^{-\varkappa t}\,dx\,dt$ і додаючи цю формулу до (23), отримаємо

$$\langle \chi - A(v), (u_t - v)e^{-\varkappa t}\rangle_{0,T} \geqslant 0$$

для довільної $v \in W^{1,p(x),q(x)}_{x,0}(Q_T)$. Звідси випливає, що $\chi = A(u_t)$, отже, u є розв'язком задачі (1)–(3) в сенсі розподілів.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)–(3). Нехай існує два розв'язки $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ задачі (1)–(3). Тоді для $u \stackrel{def}{=} u^{(1)} - u^{(2)}$ правильна рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} u_t^2 e^{-\varkappa\tau}\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u^{(1)}_{x_i t}|^{p(x)-2}u^{(1)}_{x_i t} - |u^{(2)}_{x_i t}|^{p(x)-2}u^{(2)}_{x_i t})u_{x_i t} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}u_{x_j t} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i}u_t +$$
$$+ a_0(x,t)(|u^{(1)}_t|^{q(x)-2}u^{(1)}_t - |u^{(2)}_t|^{q(x)-2}u^{(2)}_t) + b_0(x,t)uu_t\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt = 0. \qquad (24)$$

Крім того, $u(x,0) = 0$.

Оцінки доданків цієї рівності аналогічні до $\mathfrak{I}_1$–$\mathfrak{I}_5$, а на підставі умови **(A)**

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)(|u^{(1)}_{x_i t}|^{p(x)-2}u^{(1)}_{x_i t} - |u^{(2)}_{x_i t}|^{p(x)-2}u^{(2)}_{x_i t})u_{x_i t} +$$
$$+ a_0(x,t)(|u^{(1)}_t|^{q(x)-2}u^{(1)}_t - |u^{(2)}_t|^{q(x)-2}u^{(2)}_t)u^N_t\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt \geqslant 0.$$

Тоді з (24) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_T}\left[(\varkappa\beta_0 - \beta_1 - \gamma_0)|\nabla u|^2 + \left(\varkappa - \frac{\beta_2}{\delta_0} - 1\right)|u_t|^2 - \delta_0|u|^2\right]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Вибравши δ_0, $\varkappa$ такими ж як і при доведенні існування розв'язку, одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_T}\left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2\right]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt \leqslant 0,$$

звідки $u = u^{(1)} - u^{(2)} = 0$ майже всюди в Q_T. Отже, $u^{(1)} = u^{(2)}$.

Теорему доведено. □

Зауваження 3. Властивості узагальнених просторів Соболєва розглядали також в [11]. Мішані задачі для параболічних рівнянь з першою та другою похідною за часом в узагальнених просторах Соболєва вивчено в [12], [13].

1. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. – Новосибирск, 1990.
2. *Глазатов С. Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка // Препринт N 7. – Новосибирск, 1992.
3. *Sleptsova I.* Asymptotic behaviour of solutions of some second order evolution nonlinear equations // Nonlinear partial differential equations. Book of abstracts. International Conference, Alushta, September 15-21, 2003. – P. 199.
4. *Zhijian Yang.* Cauchy problem for quasi-linear wave equations with nonlinear damping and source terms // J. Math. Analisys and Appl. – 2004. – Vol. 300. – P. 218-243.
5. *Гаевский X., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М, 1978.
6. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{l,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol. 41. – N 4. – P. 592-618.
7. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., 1983.
8. *Мазья В. Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Ленинград, 1985.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
10. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958.
11. *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наукові записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського. – Серія фіз.-мат. – Вип. 1. – 2002. – С. 310-321.
12. *Бугрій О., Лавренюк С.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
13. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для одного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз. - мех. поля. – 2000. – Т. 43. – N 3. – С. 56-63.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER IN GENERALIZED SOBOLEV SPACES

Oleh Buhrii, Galyna Domans'ka, Nataliya Protsakh

Franko Lviv National University,
Universytets'ka Str., 1 79000 Lviv, Ukraine
Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
Naukova Str., 3-b 79060 Lviv, Ukraine

The mixed problem for a hyperbolic equation of the third order with the power nonlinearities in the main part of equation is investigated in the generalized Sobolev spaces. The existence and uniqueness conditions of solution for this problem that depend on the value of the power in nonlinearities are received.

Key words: mixed problem, generalized Sobolev space, hyperbolic equation.

Стаття надійшла до редколегії 19.04.2005

Прийнята до друку 19.10.2005