УДК 517.53

ПРО РАДІУСИ ОДНОЛИСТОСТІ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА

Олександр ВОЛОХ

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Досліджено поводження послідовності радіусів однолистості похідних Гельфонда-Леонтьєва степеневого ряду.

Ключові слова: степеневий ряд, похідні Гельфонда-Леонтьєва, радіус однолистості.

1. Для $0 < R \leq +\infty$ нехай $A(R)$ – клас аналітичних в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ функцій

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \tag{1}$$

а $A(0)$ – клас фомальних степеневих рядів. Будемо говорити, що $f \in A^+(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $f_k > 0$ для всіх $k \geq 0$. Для $f \in A(0)$ і $l(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} l_k z^k \in A^+(0)$ формальний степеневий ряд

$$D_l^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{l_{k-n+1}}{l_{k+1}} f_{k+1} z^{k-n+1}$$

називається [1] n-ю похідною Гельфонда-Леонтьєва. Якщо $l(z) = e^z$, тобто $l_k = 1/k!$, $f \in A(R)$, $0 < R \leqslant +\infty$, то $D_l^n f(z) = f^{(n)}(z)$ – звичайна n-а похідна функції f. Вважатимемо надалі $l_0 = 1$.

В означенні радіуса однолистості $\varrho = \varrho[f]$ функції $f \in A(R)$ маємо на увазі таке: якщо $f'(0) = 0$, то вважаємо $\varrho = 0$, якщо $f'(0) \neq 0$, то ϱ – радіус найбільшого круга з центром в точці $z = 0$, в якому функція f однолиста.

Асимптотичне поводження послідовності $\varrho_n = \varrho[f^{(n)}]$ радіусів однолистості звичайних похідних функції $f \in A(R)$, $R > 0$ вивчено у [2–4]. Для похідних Гельфонда-Леонтьєва таку саму задачу досліджували в [5–6], а також М.М. Шереметою [7], який довів таку теорему.

Теорема 0. *Якщо функція* $l \in A^+(0)$ *така, що послідовність* $(\varkappa_k) = (l_{k-1}l_{k+1}/l_k^2)$ *неспадна, а функція* $f \in A(R), 0 < R \le +\infty$ *така, що* $|f_k/f_{k+1}| \nearrow R$, $k \to \infty$, *то для всіх* $n \ge 0$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\frac{l_1 l_{n+2}}{l_2 l_{n+1}}\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right| \le \varrho[D_l^n f] \le 2\frac{l_1 l_{n+2}}{l_2 l_{n+1}}\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|. \tag{2}$$

Якщо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}\ln\frac{1}{l_k} = +\infty, \tag{3}$$

то послідовність $(\varkappa_k)$ не є неспадною і, як показано в [7], у цьому випадку оцінка знизу в (2) може не виконуватися. Фактично, якщо (l_k) задовольняє умову (3), то [7] існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $\varrho[D_l^n f] = 0$ для кожної функції $f \in A(R)$, $0 < R < +\infty$ такої, що $|f_k/f_{k+1}| \nearrow R$, $k \to \infty$, причому замінити тут умову $0 < R < +\infty$ умовою $R = \infty$ не можна. В [7] сформульовано запитання, чи можна у цьому твердженні умову (3) замінити умовою

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{k^2}\ln\frac{1}{l_k} = +\infty. \tag{4}$$

Мета нашої праці – позитивна відповідь на сформульване запитання, а також деякі доповнення та узагальнення теореми 0. Хоч наведені тут доведення дещо відрізнюються від використаних в [7], їх основою є дві леми з [7].

Лема 1. *Якщо функція* $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$ *однолиста в крузі* $\mathbb{D}_\varrho$, *то* $|\alpha_k|\varrho^{k-1} \le$ $\le k|\alpha_1|$ *для всіх* $k \ge 1$.

Лема 2. *Якщо* $\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$ *і* $\sum_{k=2}^{\infty}k|\alpha_k|\varrho^{k-1} \le |a_1|$, *то функція* α *однолиста в крузі* $\mathbb{D}_\varrho$.

Зауваження. *Лема 1 є наслідком з вже доведеної гіпотези Бібербаха.*

2. Оцінка $\varrho[D_l^n f]$ зверху доведена в [7] за допомогою леми 1 без будь-яких обмежень на l та f і покращити її не можна, про що свідчить приклад функцій

$$f(z) = l(z) = 1 + \frac{z}{(1-z)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} kz^k,$$

бо у цьому випадку $D_l^n f(z) = l(z)$ для всіх $n \ge 0$, $\varrho[D_l^n f] = \varrho[l] = 1$ і $2\dfrac{l_1 l_{n+2}}{l_2 l_{n+1}}\left|\dfrac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right| = 1$. Для оцінки $\varrho[D_l^n f]$ знизу використовується лема 2, і отже, така оцінка та умови, за яких вона є правильною, залежать від методики дослідження ряду $\sum_{k=2}^{\infty}k|\alpha_k|x^{k-1}$. Доведення теореми 1 та її наслідку – теореми 0 є простішим, ніж доведення теореми 0 в [7].

Теорема 1. *Нехай* $l \in A^+(0)$ *і* $f \in A(R)$ *такі, що для* $k \geq 1$

$$\left|\frac{f_{n+k+1}}{f_{n+k}}\right|\left|\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right| \leq \frac{l_2}{l_1}\frac{l_k}{l_{k+1}}\frac{l_{n+k+1}}{l_{n+k}}\frac{l_{n+1}}{l_{n+2}}. \tag{5}$$

Тоді $D_l^n f \in A(q_n)$ *і* $\varrho[D_l^n f] \geq \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} q_n$, *де* $q_n = \dfrac{l_1 l_{n+2}}{l_2 l_{n+1}}\left|\dfrac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right|$.

Доведення. З умови (5) маємо

$$\frac{l_{k+1}|f_{n+k+1}|}{l_{n+k+1}}\frac{l_{n+1}}{l_1|f_{n+1}|} \leq \left(\frac{l_k|f_{n+k}|}{l_{n+k}}\frac{l_{n+1}}{l_1|f_{n+1}|}\right)\left(\frac{l_2 l_{n+1}}{l_1 l_{n+2}}\left|\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right|\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{l_{k-1}|f_{n+k-1}|}{l_{n+k-1}}\frac{l_{n+1}}{l_1|f_{n+1}|}\right)\left(\frac{l_2 l_{n+1}}{l_1 l_{n+2}}\left|\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right|\right)^2 \leq \cdots \leq \left(\frac{l_2 l_{n+1}}{l_1 l_{n+2}}\left|\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}\right|\right)^k = q_n^{-k}. \tag{6}$$

З (6) і означення $D_l^n f$ випливає, що $D_l^n f \in A(q_n)$. Якщо $\varrho = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} q_n$, то з (6) отримуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k \frac{l_k|f_{n+k}|}{l_{n+k}}\frac{l_{n+1}}{l_1|f_{n+1}|}\varrho^{k-1} \leq \sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{\varrho}{q_n}\right)^{k-1} = 1,$$

тобто за лемою 2 функція $D_l^n f$ однолиста в крузі $\{z : |z| \leq \varrho\}$, тому $\varrho[D_l^n f] \geq \varrho = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} q_n$. Теорему 1 доведено.

Якщо послідовність $(\varkappa_n)$ з теореми 0 неспадна, то $\dfrac{l_{k+1}}{l_k} = \dfrac{l_2}{l_1}\prod_{j=2}^k \varkappa_j$ і, отже,

$$\frac{l_2}{l_1}\frac{l_k}{l_{k+1}}\frac{l_{n+k+1}}{l_{n+k}}\frac{l_{n+1}}{l_{n+2}} = \prod_{j=2}^{k}\frac{1}{\varkappa_j}\prod_{j=2}^{n+1}\frac{1}{\varkappa_j}\prod_{j=2}^{n+k}\varkappa_j = \prod_{j=2}^{k}\frac{k_{j+n}}{\varkappa_j} \geq 1,$$

якщо послідовність $(|f_n|/|f_{n+1}|)$ неспадна, то $\left|\dfrac{f_{n+k+1}}{f_{n+k}}\right|\left|\dfrac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right| \leq 1$. Тому з теореми 1 випливає теорема 0.

Зауважимо, що умова (5) виконується, якщо $\dfrac{|f_{k-1}||f_{k+1}|}{|f_k|^2} \leq \dfrac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2}$ і $\dfrac{l_{k+1}}{l_k} \leq \dfrac{l_2}{l_1}$ для всіх $k \geq 2$. Звідси, зокрема, випливає таке: якщо $f(z) = l(z) \in A^+(0)$ і $\dfrac{l_{k+1}}{l_k} \leq \dfrac{l_2}{l_1}$ для всіх $k \geq 2$, то для радіуса однолистості $\varrho[f]$ функції f правильні оцінки $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\dfrac{l_1}{l_2} \leq \varrho[f] \leq 2\dfrac{l_1}{l_2}$.

В [7] доведено, що для кожної функції $l \in A^+(+\infty)$ існує функція $f \in A(+\infty)$ така, що $\varrho[D_l^n f] \geq \varrho > 0$ для всіх $n \geq 0$. Це твердження має наступне узагальнення.

Твердження 1. *Якщо* $l \in A^+(R)$ *для деякого* $R > 0$, *а функція* $f \in A(0)$ *така, що послідовність* $(|f_k|/l_k)$ *незростаюча, то* $\varrho[D_l^n f] \geq \varrho > 0$ *для всіх* $n \geq 0$.

Справді, нехай $\varrho \in (0, R)$ таке, що $l'(\varrho) \le 2l_1$. Тоді з огляду на незростання послідовності $(|f_k|/l_k)$ маємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\frac{l_k|f_{n+k}|}{l_{n+k}}\frac{l_{n+1}}{l_1|f_{n+1}|}\varrho^{k-1} \le \frac{1}{l_1}\sum_{k=2}^{\infty} kl_k\varrho^{k-1} = \frac{1}{l_1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kl_k\varrho^{k-1} - l_1\right) = \frac{1}{l_1}(l'(\varrho)-l_1) \le 1,$$

тобто за лемою 2 функція $D_l^n f$ однолиста в крузі $\{z : |z| \le \varrho\}$, і тому $\varrho[D_l^n f] \ge \varrho$ для всіх $n \ge 0$. Твердження 1 доведено.

На завершення узагальнимо твердження 1 з [7], а з тим дамо позитивну відповідь на сформульоване в [7] і наведене запитання.

Твердження 2. *Якщо* $|f_n|/|f_{n+1}| \nearrow R < +\infty\,(n \to \infty)$ *і послідовність* (l_k) *задовольняє умову (4), то* $\varrho[D_l^n f] = 0$ *для всіх* $n \ge 0$.

Справді, за лемою 1 для всіх $n \ge 0$ і $k \ge 1$

$$(\varrho[D_l^n f])^{k-1} \le k\frac{l_1|f_{n+1}|}{l_{n+1}}\frac{l_{n+k}}{l_k|f_{n+k}|} \le \frac{kl_1}{l_{n+1}}R^{k-1}\frac{l_{n+k}}{l_k}.$$

Якщо приймемо $l_k = \exp\{-k^2\alpha_k\}$, то для фіксованого $n \ge 0$ і

$$\ln \varrho[D_l^n f] \le \frac{\ln l_{n+k} - \ln l_k}{k-1} + O(1) = \frac{k^2\alpha_k - (k+n)^2\alpha_{k+n}}{k-1} + O(1), \quad k \to \infty,$$

нам достатньо показати, що існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що

$$2n\alpha_{n+k_j} + k_j(\alpha_{n+k_j} - \alpha_{k_j}) \to +\infty, \quad j \to \infty. \tag{7}$$

За умовою (4) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \alpha_k = +\infty$. Тому існує зростаюча послідовність (m_j) натуральних чисел така, що $\alpha_{m_j} \uparrow +\infty\,(j \to \infty)$ і $\alpha_k \le \alpha_{m_j}$ для всіх $k \le m_j$. Позначимо $k_j = m_j - n$ для $j \ge j_0(n)$. Тоді $\alpha_{k_j} \le \alpha_{m_j} = \alpha_{n+k_j}$ і $\alpha_{n+k_j} = \alpha_{m_j} \uparrow +\infty\,(j \to \infty)$. Для вибраної так послідовності (k_j) співвідношення (7) правильне, і отже, твердження 2 доведено.

---

1. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. – 1951. - Т. 29. – N 3. – С. 477-500.

2. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalent functions with univalent derivatives. II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 313-320.

3. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalence derivatives of functions defined by gap power series // J. London. Math. Soc. (2). – 1975. - Vol. 9. – P. 501-512.

4. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalence derivatives of functions defined by gap power series. II // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – Vol. 56. – P. 26-40.

5. *Kapoor G. P., Juneja O. P., Patel J.* Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of analytic functions // Bull. math. Soc. sci. math. RSR. – 1989. – Vol. 33. – N 1. – P. 25-34.

6. *Kapoor G. P., Patel J.* Univalence of Gelfond-Leont'ev derivatives of functions defined by gap power series // Rend. mat. e appl. – 1986. – Vol. 6. – N 4. – P. 491-502.

7. *Шеремета М. М.* Про радіуси однолистості похідних Гельфонда-Леонтьєва // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47. – N 3. – С. 390-399.

ON RADII OF UNIVALENCE OF GELFOND-LEONT'EV DERIVATIVES

Oleksander Volokh

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

The behavior of the sequence of the univalence radii of Gelfond-Leont'ev derivatives of a power series is investigated.

Key words: power series, Gelfond-Leont'ev derivatives, radius of univalence.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.2005

Прийнята до друку 19.10.2005