ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.67–76

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.67–76

УДК 539.3

ЕФЕКТ ДОТИЧНИХ НАПРУЖЕНЬ ЗА ЧИСТОГО КРУЧЕННЯ ГРАНИЦІ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ В КОЛОВІЙ ОБЛАСТІ

Віталій ГАЛАЗЮК, Андрій ВАЩИШИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Запропоновано нове формулювання задачі лінійної теорії пружності для півпростору зі змішаними крайовими умовами, розв'язок якої дає фізично коректну математичну модель напружено-деформованого стану. Новизна формулювання полягає в тому, що вона поряд із класичними крайовими умовами містить, обумовлену гіпотезою суцільності, умову неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту $\Omega = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ на лінії поділу крайових умов. Доведено, що цю вимогу можна виконати довантаженням за певним законом границі півпростору дотичними напруженями поза межами кругової області. З механічного погляду, границя пружного півпорстору у цьому формулюванні вважається плівкою нульової товщини, яка забезпечує відповідний розподіл дотичних напружень. Всі характеристики напружено-деформованого стану є неперервними й обмеженими на лінії поділу крайових умов.

Ключові слова: пружний півпростір, кручення, мішані умови, розривні інтеграли Вебера-Шафгайтліна.

У праці [1] запропоновано нову фізичну модель деформування тіла, в якій постулюється, що всяка його поверхня, зокрема і гранична, може бути поверхнею розриву нульового порядку [2, 3]. Цю поверхню вважатимемо плівкою нульової товщини, реологічні властивості якої уможливлюють виконання фізичної умови неперервності компонент вектора локального жорсткого повороту $\Omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ на ній і відтак її гладке (без зламів) деформування. Нижче цю модель застосовано до визначення напружено-деформованого стану у півпросторі, границя якого у крузі фіксованого радіуса R зазнає чистого кручення за довільним законом. Така задача зі змішаними крайовими умовами за допомогою методу розривних інтегралів Вебера-Шафгайтліна розв'язана вперше і доведено, що за вимоги виконання умови неперервності [4, 5] компонент вектора Ω на межі кругової області навантаження пружні повороти поширюються поза її межі і створюють дотичні напруження, які можна трактувати як необхідне довантаження границі пружного півпростору для забезпечення гладкості її деформування. Всі характеристики напружено-деформованого стану неперервні на межі області навантаження і, відповідно, обмежені.

З'ясовано таке: якщо дорівнюють нулю пружні повороти за межами області навантаження і, відповідно, дотичні напруження (в області навантаження вони не дорівнюють нулю), то існує розв'язок з класичним кореневo-сингулярним розподілом напружень на межі області навантаження, який зумовлює фізично некоректну картину деформування.

1. Формулювання задачі. Однорідний ізотропний пружний півпростір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$ і вважатимемо, що під дією зовнішнього навантаження у півпросторі реалізується чисте кручення.

Тоді для єдиної ненульової у цьому випадку компоненти вектора пружного переміщення $\mathbf{u} = \mathbf{u}(0, Ru_\beta, 0)$ можна записати рівняння рівноваги

$$\partial_\gamma \omega_\alpha - \partial_\alpha \omega_\gamma = 0 \tag{1}$$

стосовно ненульових компонент $\omega_\alpha(\alpha,\gamma)$ і $\omega_\gamma(\alpha,\gamma)$ вектора $\Omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} 2\omega_\alpha &\equiv (\operatorname{rot}\mathbf{u})_\alpha = \alpha^{-1}\partial_\alpha u_\gamma - \partial_\gamma u_\beta = -\partial_\gamma u_\beta, \\ 2\omega_\gamma &\equiv (\operatorname{rot}\mathbf{u})_\gamma = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\beta) - \alpha^{-1}\partial_\beta u_\alpha = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha u_\beta). \end{aligned} \tag{2}$$

Якщо $u_\beta(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha Q(\alpha,\gamma)$, то відповідно до виразів (2)

$$2\omega_\alpha = -\partial^2_{\alpha\gamma} Q, \quad 2\omega_\gamma = \alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha Q) \tag{3}$$

і з рівняння (1) з урахуванням співвідношень (3) отримаємо

$$\partial_\alpha\left[\alpha^{-1}\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha Q) + \partial^2_{\gamma^2} Q\right] = 0. \tag{4}$$

Розв'язок рівняння (4) у півпросторі $\gamma \geqslant 0$ подамо інтегралом Ганкеля [6]

$$Q(\alpha,\gamma) = -\int_0^\infty \xi A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\, d\xi,$$

де $J_\nu(x)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку; $A(\xi)$ – довільна функція, яка забезпечує існування та заникання інтеграла на безмежності і визначається крайовими умовами задачі. Тоді для компоненти $u_\beta(\alpha,\gamma) = \partial_\alpha Q(\alpha,\gamma)$ матимемо подання

$$u_\beta(\alpha,\gamma) = \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Ненульові компоненти вектора локального жорсткого повороту Ω, виражені через компоненту $u_\beta(\alpha, \gamma)$ (5), згідно з поданнями (2) матимуть вигляд

$$\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = -\int_0^\infty \xi^3 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi, \quad \omega_\gamma(\alpha, \gamma) = \int_0^\infty \xi^3 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

а компоненти тензора напружень, виражені за законом Гука, –

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\alpha, \gamma) &= \mu \partial_\alpha u_\beta = \mu \left[\int_0^\infty \xi^3 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\, d\xi - \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \xi^2 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi \right], \\ \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, \gamma) &= \mu \partial_\gamma u_\beta = -2\mu\omega_\alpha(\alpha, \gamma) = \mu \int_0^\infty \xi^3 A(\xi) e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{7}$$

Застосуємо отримані співвідношення та запропоновану фізичну модель до дослідження напружено-деформованого стану пружного півпростору за чистого кручення його границі в крузі радіусом R.

Нехай переміщення $u_\beta(\alpha, 0)$ в крузі одиничного радіуса задані довільним законом $c\alpha f(\alpha^2)$, тоді сформульовану задачу про напружено-деформований стан у півпросторі $\gamma \geqslant 0$ означимо такими змішаними крайовими умовами:

$$\begin{gathered} u_\beta(\alpha, 0) = c\alpha f(\alpha^2) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1), \qquad \sigma_{\beta\gamma}(\alpha, 0) = g(\alpha^2) \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant \infty), \\ \lim_{\alpha \to \infty} g(\alpha^2) = 0, \qquad \lim_{(\alpha\gamma) \to \infty} u_\beta(\alpha, \gamma) = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

де функція $g(\alpha^2)$ – наперед невідома і, як буде доведено нижче, визначається законом $c\alpha f(\alpha^2)$ і фізично обґрунтованими вимогами неперервності відмінних від нуля компонент вектора Ω [2] на межі $\alpha = 1$

$$\lim_{\alpha \to 1-0} \omega_\alpha(\alpha, 0) = \lim_{\alpha \to 1+0} \omega_\alpha(\alpha, 0), \qquad \lim_{\alpha \to 1-0} \omega_\gamma(\alpha, 0) = \lim_{\alpha \to 1+0} \omega_\gamma(\alpha, 0) \tag{9}$$

Розв'язок задачі означеної крайовими умовами (8) і додатковою крайовою умовою (9) називатимемо некласичним, а розв'язок задачі означеної крайовими умовами (8), коли $g(\alpha^2) \equiv 0$, – класичним.

2. Некласичний розв'язок. Відповідно до подання (5) і крайових умов (8) для визначення функції $A(\xi)$ отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_0^\infty \xi^2 A(\xi) J_1(\alpha\xi)\, d\xi = c\alpha f(\alpha^2) \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1), \tag{10}$$

яке розв'яжемо методом розривних інтегралів Вебера-Шафгайтліна [4,5], згідно з яким шукану функцію $A(\xi)$ подамо у вигляді узагальненого ряду Неймана

$$A(\xi) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{J_{2n-q+2}(\xi)}{\xi^{q+2}} \tag{11}$$

із наперед невизначеними коефіцієнтами a_n і параметром $q > -1$.

Подальші дослідження ґрунтуються на властивостях розривного інтеграла Вебера-Шафгайтліна [8]

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\xi\alpha)J_\mu(\xi\beta)}{\xi^\lambda}\,d\xi = \frac{\alpha^\nu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right) F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2};\ \frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2};\ \nu+1;\ \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}{2^\lambda \beta^{\nu-\lambda+1}\Gamma\left(\frac{-\nu+\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)} \tag{12}$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \beta) \quad (\mathrm{Re}(\nu+\mu-\lambda+1) > 0,\ \mathrm{Re}(\lambda) > -1);$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\xi\alpha)J_\mu(\xi\beta)}{\xi^\lambda}\,d\xi = \frac{\beta^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2}\right) F\left(\frac{\nu+\mu-\lambda+1}{2};\ \frac{-\nu+\mu-\lambda+1}{2};\ \mu+1;\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}{2^\lambda \alpha^{\mu-\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+\lambda+1}{2}\right)\Gamma(\mu+1)} \tag{13}$$

$$(\beta \leqslant \alpha \leqslant \infty) \quad (\mathrm{Re}(\nu+\mu-\lambda+1) > 0,\ \mathrm{Re}(\lambda) > -1).$$

У виразах (12), (13) $\Gamma(x)$ – гамма-функція; $F(a;\ b;\ c;\ x^2)$ – гіпергеометрична функція Гаусса, задана гіпергеометричним рядом

$$F(a;\ b;\ c;\ x^2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)} \frac{x^{2k}}{k!} \tag{14}$$

із одиничним радіусом збіжності за умови $c - a - b > 0$, причому

$$\begin{gathered} F(a;\ b;\ c;\ 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (c-a-b > 0); \\ F(a;\ b;\ c;\ x^2) = (1-x^2)^{c-a-b} F(c-a;\ c-b;\ c;\ 1)\,. \end{gathered} \tag{15}$$

Зауважимо, що для $a = -k$ або $b = -k$, де $k \in \mathbf{N}_0$, ряд (15) зводиться до полінома степеня $2k$, який можна виразити через поліноми Якобі [7].

Якщо ряд (11) підставити в інтегральне рівняння (10) та обчислити розривний інтеграл Вебера-Шафгайтліна за формулою (12), то в області $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ отримаємо рівняння

$$\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{\alpha\Gamma(n-q+2)F(n-q+2;\ -n;\ 2;\ \alpha^2)}{2^q\Gamma(n+1)} = c\alpha f(\alpha^2) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) \tag{16}$$

стосовно невизначених коефіцієнтів a_n.

Оскільки рівняння (16) стосовно коефіцієнтів a_n є рядом за поліномами Якобі [7] з аргументом $(1 - 2\alpha^2)$, тобто

$$F(n-q+2;\ -n;\ 2;\ \alpha^2) \equiv (n+1)^{-1} P_n^{(1,\,-q)}(1-2\alpha^2),$$

які є повною системою функцій на проміжку [0, 1], то відповідно до апроксимаційної теореми Вейєрштрасса про наближення неперервної функції поліномом існує єдиний набір коефіцієнтів a_n, який є розв'язком рівняння (16).

Не обмежуючи загальності міркувань припустимо, що в умові (8) $f(\alpha^2) = 1$. Тоді рівняння (16) матиме єдиний розв'язок $a_0 = \frac{2^q c}{\Gamma(2-q)}$, $a_n = 0\ \forall n \in \mathbf{N}$, тому згідно з поданням (11) і рівністю (16) функція $A(\xi)$ у цьому випадку матиме вигляд

$$A(\xi) = \frac{2^q c}{\Gamma(2-q)} \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q+2}}. \tag{17}$$

Тепер за відомою функцією $A(\xi)$ (17) через інтегральні подання (5)–(7) можна записати усі характеристики напружено-деформованого стану

$$u_\beta(\alpha,\gamma) = a_0 \int\limits_0^\infty \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^q} e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi,$$

$$\omega_\alpha(\alpha,\gamma) = -a_0 \int\limits_0^\infty \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi,$$

$$\omega_\gamma(\alpha,\gamma) = a_0 \int\limits_0^\infty \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\, d\xi,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\gamma) &= \mu a_0 \left[\int\limits_0^\infty \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} e^{-\xi\gamma} J_0(\alpha\xi)\, d\xi - \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\infty \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^q} e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi \right], \\ \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,\gamma) &= \mu a_0 \int\limits_0^\infty \frac{J_{2-q}(\xi)}{\xi^{q-1}} e^{-\xi\gamma} J_1(\alpha\xi)\, d\xi = -\mu\omega_\alpha(\alpha,\gamma). \end{aligned} \tag{18}$$

Інтеграли у виразах (18) загалом можна обчислити числовими методами, проте на площині $\gamma = 0$ вони вироджуються в розривні інтеграли Вебера-Шафгайтліна і за формулами (12), (13) отримаємо, що в області $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$u_\beta(\alpha,0) = c\alpha, \tag{19}$$

$$\omega_\alpha(\alpha,0) = -2c\frac{\Gamma(2{,}5-q)}{\Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}\,\alpha F(2{,}5-q;\,0{,}5;\,2;\,\alpha^2),\ \ \omega_\gamma(\alpha,0) = 2c, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,0) = 0, \\ &\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,0) = -\mu\omega_\alpha(\alpha,0) = 2\mu c\frac{\Gamma(2{,}5-q)}{\Gamma(2-q)\sqrt{\pi}}\,\alpha F(2{,}5-q;\,0{,}5;\,2;\,\alpha^2), \end{aligned} \tag{21}$$

а в області $1 \leqslant \alpha < \infty$ –

$$u_\beta(\alpha,0) = c\frac{F(2-q;\,1-q;\,3-q;\,\alpha^{-2})}{\alpha^{3-2q}\Gamma(3-q)\Gamma(q)}, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(\alpha,0) &= -2c\frac{\Gamma(2{,}5-q)F(2{,}5-q;\ 1{,}5-q;\ 3-q;\ \alpha^{-2})}{\alpha^{4-2q}\Gamma(-0{,}5+q)\Gamma(3-q)\Gamma(2-q)}, \\ \omega_\gamma(\alpha,0) &= 2c\frac{F(2-q;\ 2-q;\ 3-q;\ \alpha^{-2})}{\alpha^{4-2q}\Gamma(-1+q)\Gamma(3-q)}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}(\alpha,0) &= \frac{2\mu c}{\alpha^{4-2q}}\left[\frac{F(2-q;2-q;3-q;\alpha^{-2})}{\Gamma(-1+q)\Gamma(3-q)} - \frac{F(2-q;1-q;3-q;\alpha^{-2})}{\Gamma(q)\Gamma(3-q)}\right], \\ \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,0) &= -\mu\omega_\alpha(\alpha,0) = 2\mu c\frac{\Gamma(2{,}5-q)F(2{,}5-q;\ 1{,}5-q;\ 3-q;\ \alpha^{-2})}{\alpha^{4-2q}\Gamma(-0{,}5+q)\Gamma(3-q)\Gamma(2-q)}, \end{aligned} \tag{24}$$

Аналіз виразів (20) і (23) для локальних жорстких кутів повороту $\omega_\alpha(\alpha,\,0)$ і $\omega_\gamma(\alpha,\,0)$ свідчить про те, що у площині $\gamma = 0$ вони мають різні аналітичні вирази в областях $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ та $1 \leqslant \alpha < \infty$, тому відповідно до гіпотези суцільності на краю $\alpha = 1$ повинні виконуватися граничні рівності (9).

Оскільки пружні кути повороту $\omega_\alpha(\alpha,\,0)$ і $\omega_\gamma(\alpha,\,0)$ відповідно до подань (20), (23) задані гіпергеометричним рядом (14), який збігається в точці $\alpha = 1$ за умови $c - a - b > 0$, то граничні рівності виконуватимуться, якщо

$$1 < q < 1{,}5. \tag{25}$$

За виконання нерівності (25) усі характеристики напружено-деформованого стану, означені поданнями (19)–(24), неперервні на межі області навантаження $\alpha = 1$ і залежать від параметра q $(1 < q < 1{,}5)$, в чому легко переконатися, застосувавши рівність (15). Отже, за виконання умови (25) дотичні напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,0)$ визначаються законом (24) і залежать від параметра q. Ці дотичні напруження можна трактувати як необхідне довантаження границі пружного півпростору для забезпечення гладкості його деформування, оскільки за умови (25) локальні жорсткі кути повороту $\omega_\alpha(\alpha,0)$ і $\omega_\gamma(\alpha,0)$, означені виразами (20) і (23), неперервні на краю $\alpha = 1$ області навантаження. Зазначимо, що виконання нерівності (25) забезпечує також умову симетрії тензора дотичних напружень на краю $\alpha = 1$

$$\lim_{\alpha\to 1-0}\sigma_{\beta\gamma} = \lim_{\alpha\to 1+0}\sigma_{\beta\gamma} = \lim_{\gamma\to 0}\sigma_{\gamma\beta}.$$

Зауважимо, що відповідно до подань (23) параметр $(1 < q < 1{,}5)$ множником $(\alpha^{-1})^{4-2q}$ визначає ступінь заникання пружних поворотів на границі пружного півпростору для $\alpha \to \infty$.

3. Класичний розв'язок. Якщо прийняти $q = 0{,}5$, то класична умова відсутності дотичних напружень $(g(\alpha^2) = 0)$ в області $1 \leqslant \alpha < \infty$ границі $\gamma = 0$ півпростору виконуватиметься, оскільки у знаменнику виразу (24) множник $\Gamma(-0{,}5 + q)$ необмежено великий. Тоді відповідно до подань (19)–(24) отримаємо розподіл характеристик напружено-деформованого стану на границі пружного півпростору за відсутності дотичних напружень в області $1 \leqslant \alpha < \infty$. Зокрема, в області $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$u_\beta(\alpha,0) = c\alpha, \tag{26}$$

$$\omega_\alpha(\alpha,0) = -\frac{2c}{\pi}\,\alpha F(2;\ 0{,}5;\ 2;\ \alpha^2) = -\frac{2c}{\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},\ \omega_\gamma(\alpha,0) = \frac{2c}{\pi}, \tag{27}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,0)=0,\ \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,0)=\frac{2\mu c}{\pi}\alpha F(2;\ 0{,}5;\ 2;\ \alpha^2)=\frac{2\mu c}{\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{28}$$

а в області $1\leqslant\alpha<\infty$ –

$$u_\beta(\alpha,0)=\frac{4c}{3\pi}\alpha^{-2}F(1{,}5;\ 0{,}5;\ 2{,}5;\ \alpha^{-2})=\frac{2c}{\pi}\left[\alpha\arcsin\frac{1}{\alpha}-\sqrt{1-\alpha^{-2}}\right], \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(\alpha,0)&=-\frac{16c}{3\pi}\alpha^{-3}\frac{F(2;\ 1;\ 2{,}5;\ \alpha^{-2})}{\Gamma(0)}=0,\\ \omega_\gamma(\alpha,0)&=\frac{4c}{3\pi}\alpha^{-3}F(1{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ \alpha^{-2})=\frac{4c}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}-\arcsin\frac{1}{\alpha}\right],\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,0)&=2\mu c\alpha^{-3}\left[\frac{2}{3\pi}F(1{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}5;\ \alpha^{-2})-\frac{8}{3\pi}F(1{,}5;\ 0{,}5;\ 2{,}5;\ \alpha^{-2})\right]=\\ &=\frac{4\mu c}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}-\arcsin\frac{1}{\alpha}\right]-\frac{8\mu c}{\pi}\left[\arcsin\frac{1}{\alpha}-\frac{\sqrt{1-\alpha^{-2}}}{\alpha}\right],\\ \sigma_{\beta\gamma}(\alpha,0)&=\frac{16\mu c}{3}\alpha^{-3}\frac{F(2;\ 1;\ 2{,}5;\ \alpha^{-2})}{\Gamma(0)}=0.\end{aligned} \tag{31}$$

У поданнях (29)–(31) враховано, що $|\Gamma(0)|=\infty$ і використані формули [7] підсумовування гіпергеометричної функції Гаусса.

Аналіз характеристик напружено-деформованого стану означених поданнями (26)–(31) свідчить про те, що в областях $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ і $1\leqslant\alpha<\infty$ вони мають різні аналітичні вирази з розривом другого роду на межі області навантаження $\alpha=1$. Компонента $\omega_\alpha(\alpha,0)$ вектора Ω дорівнює нулеві поза цією областю, що свідчить про те, що припущення про відсутність дотичних напружень поза межею області навантаження виділяє клас поверхонь, в яких пружні повороти не поширюються.

Отже, точне виконання групи крайових умов (8) і (9), яке забезпечує повнота системи функцій $F(n-q+2;\ -n;\ 2;\ \alpha^2)$ в інтервалі $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ у розвиненні (16), визначає згідно з поданнями (11) функцію $A(\xi)$ залежно від параметра $q>-1$. Внаслідок цього функція $A(\xi)$ відповідно зі значенням інтеграла (13) визначають усі характеристики напружено-деформованого стану в області $1\leqslant\alpha<\infty$ через гіпергеометричну функцію Гаусса $F(a;\ b;\ c;\ x^2)$, яка в цьому інтервалі не утворює повної системи функцій. Тому виконання крайових умов (8), коли $g(\alpha^2)=0$, можливе лише за відповідного вибору – параметра q.

Зокрема, якщо в умові (8) $f(\alpha^2)=1$, то дотичне напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,0)$ (функція $g(\alpha^2)$) в області $1\leqslant\alpha<\infty$ відповідно до подання (24) визначається так:

$$g(\alpha^2)=-2\mu c\frac{\Gamma(2{,}5-q)F(2{,}5-q;\ 1{,}5-q;\ 3-q;\ \alpha^{-2})}{\alpha^{4-2q}\Gamma(-0{,}5+q)\Gamma(2-q)\Gamma(3-q)}, \tag{32}$$

де $F(2{,}5-q;\ 1{,}5-q;\ 3-q;\ \alpha^{-2})$ – гіпергеометрична функція Гаусса, означена гіпергеометричним рядом (14), збіжним в точці $\alpha=1$ за умови $q>1$. Тобто, можна стверджувати, що дотичні напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha,0)$ відповідно до гіпотези суцільності неперервні на межі області $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ і заникають на безмежності, якщо параметр q задовольняє умову $1 < q < 1{,}5$, зокрема, якщо $q = 0{,}5$, то

$$g(\alpha^2) = 0, \tag{33}$$

що збігається з дотичним напруженням $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, 0)$ (31) у класичному випадку в області $1 \leqslant \alpha < \infty$ границі $\gamma = 0$ півпростору.

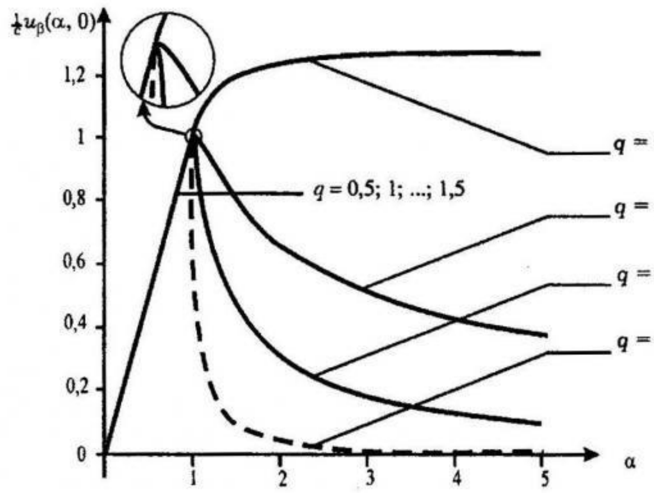

Рис. 1. Переміщення $\frac{1}{c}\,u_\beta(\alpha, 0)$ для $k = 2$

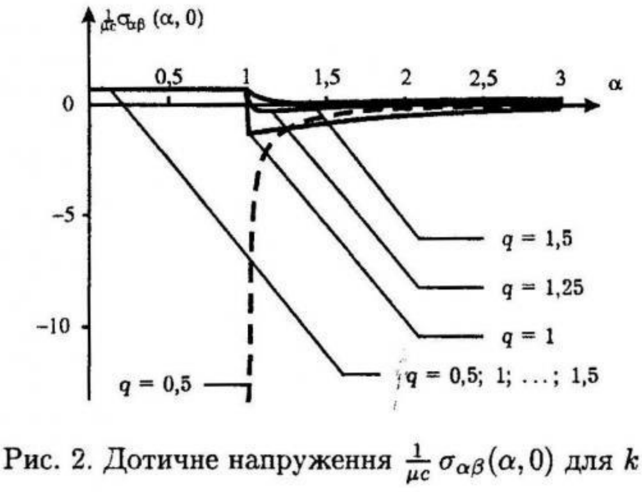

Рис. 2. Дотичне напруження $\frac{1}{\mu c}\,\sigma_{\alpha\beta}(\alpha, 0)$ для $k = 2$

На рис. 1–3 пунктирними лініями зображено характеристики напружено-деформованого стану границі $\gamma = 0$ півпростору за умови рівності нулю дотичних напружень в області $1 \leqslant \alpha < \infty$. Наявність зламу у переміщенні $\frac{1}{c}u_\beta(\alpha, 0)$ (рис. 1) свідчить про те, що у цьому випадку фізична поверхня півпростору не чинить опору

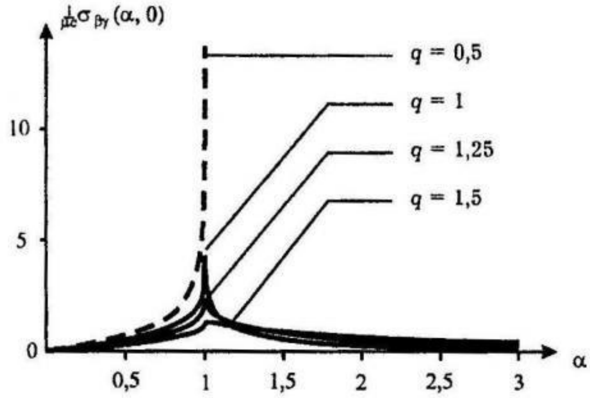

Рис. 3. Дотичне напруження $\frac{1}{\mu c}\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, 0)$ для $k = 2$

пружним поворотам і, як наслідок, дотичні напруження $\frac{1}{\mu c}\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, 0)$ та $\frac{1}{\mu c}\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0)$ на краю $\alpha = 1$ (рис. 2, 3) мають сингулярний з кореневою особливістю розподіл.

Очевидно, що з механічного погляду найвірогіднішим є напружено-деформований стан за умови $1 < q < 1{,}5$, про що свідчать результати числового аналізу на поданих рисунках.

Застосування фізичної моделі деформування пружного півпростору з можливим довантаженням дотичними напруженями допомогло з'ясувати і довести таке:

- за наявності у розв'язку задачі локальних пружних поворотів, які відповідно до гіпотези суцільності повинні неперервно поширюватись вздовж границі, на ній відповідно до останього подання (18) існують дотичні напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, 0)$, створюючи необхідне довантаження для забезпечення гладкості її деформування. З механічного погляду це можна трактувати так, що на границі пружного півпростору існує плівка нульової товщини, яка реалізує це довантаження (ефект дотичних напружень);

- доведено, що за вимоги (14) неперервності компонент вектора Ω на межі $\alpha = 1$ множина регулярних розв'язків обмежена нерівністю $q > 1$. Дотичні напруження $\sigma_{\beta\gamma}(\alpha, 0)$ неперервно поширюються в область $1 \leqslant \alpha < \infty$ границі пружного півпростору за законом (24) і заникають відповідно до принципу Сен-Венана (рис. 3).

---

1. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2004. – №4. – С. 17-33.

2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. – М., 1970.

3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М., 1975.

4. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Некласична математична модель деформування пружного півпростору з тонким дисковим абсолютно жорстким включенням // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2002. – Вип. 1. - С. 77-82.

5. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Неклассическая модель деформирования тел с трещинами // Теор. и прикл. механика. – Харьков. – 2001. – Вып. 33. – С. 63-75.

6. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – М., 1955.

7. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М., 1979.

8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. – М., 1963.

EFFECT OF TANGENTIAL STRAIN UNDER THE SIMPLE ROTATION A CIRCULAR DOMAIN OF THE BOUNDARY OF AN ELASTIC HALF-SPACE

Vitaliy Galazyuk, Andriy Vashchyshyn

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

A new problem setting of the linear theory of elasticity for half-space with mixed boundary conditions is proposed. The solution of this problem gives us a physically correct mathematical model of the state of deformation (in particular, smallness of elastic turns). The newness of the problem setting is that it contains, together with classical boundary conditions, provided by hypothesis of the entirety, the requirement of continuity of the vector's component of the local rigid rotation $\Omega = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$ on the line of the boundary conditions.

Key words: elastic half-space, rotation, mixed boundary condition, integral of Veber-Shafgitlen.

Стаття надійшла до редколегії 08.06.2005

Прийнята до друку 19.10.2005