ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.77–88

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.77–88

УДК 517.95

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПРИ ПЕРШІЙ ПОХІДНІЙ В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Надія ГРИНЦІВ, Галина СНІТКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку обернених задач визначення молодшого коефіцієнта, залежного від часу, в одновимірному рівнянні теплопровідності у випадку, коли частина межі області невідома.

Ключові слова: обернена задача, вільна межа, функція Ґріна.

Мета нашої праці – розглянути дві крайові задачі для параболічного рівняння з невідомим молодшим коефіцієнтом в області з невідомою рухомою межею, що відрізняються набором умов перевизначення. Задання цих умов дає змогу розглядати ці задачі як обернені з двома невідомими параметрами і застосовувати методику, розроблену для дослідження обернених задач. Зазначимо, що обернену задачу для рівняння теплопровідності з невідомим молодшим коефіцієнтом в області зі сталими межами розглянуто в [1], а обернену задачу визначення старшого коефіцієнта в одновимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею – в [2].

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ розглядаємо обернену задачу визначення невідомого коефіцієнта $b = b(t)$ в рівнянні

$$u_t = u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

коли задано початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant h(0), \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

та умови перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$-u_x(h(t),t) = h'(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Заміною змінних $y = x/h(t), t = t$ зведемо задачу (1)-(5) до оберненої задачі стосовно невідомих $h(t), b(t), v(y,t)$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$:

$$v_t = \frac{1}{h^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(t)}{h(t)} + \frac{h'(t)}{h(t)} y\right) v_y + c(yh(t),t)\, v + f(yh(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

$$h(t) \int_0^1 v(y,t)dy = \mu_3(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{9}$$

$$-\frac{1}{h(t)} v_y(1,t) = h'(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{10}$$

де $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$.

Означення 1. *Під розв'язком задачі (6)-(10) будемо розуміти трійку функцій $(h(t), b(t), v(y,t))$ з класу $C^1[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{Q}_T), h(t) > 0, t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (6) та умови (7)-(10).*

2. Зведення задачі (6)-(10) до системи інтегральних рівнянь. Позначимо

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$

$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \qquad \theta(t) = \int_0^t \frac{1}{h^2(\tau)} d\tau, \qquad k = 1,2.$$

Легко бачити, що $G_k(y,t,\eta,\tau), k=1,2$ – функція Ґріна для рівняння

$$v_t = \frac{1}{h^2(t)} v_{yy}$$

з крайовими умовами (8) при $k=1$ та умовами $v_y(0,t)=\mu_1(t), v_y(1,t)=\mu_2(t)$ при $k=2$. Пряма задача (6)-(8) у випадку довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $h(t), h'(t)$, $b(t)$ еквівалентна рівнянню

$$\begin{aligned} v(y,t) &= v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\biggl(\frac{b(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta,\tau) + \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \eta\, v_\eta(\eta,\tau) + \\ &+ c(\eta h(\tau),\tau)\, v(\eta,\tau)\biggr) d\eta d\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

де $v_0(y,t)$ визначається формулою

$$\begin{aligned} v_0(y,t) &= \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h(0))d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{\mu_1(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau - \\ &- \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{\mu_2(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\, f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\, d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

Введемо позначення $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. Тоді з умови перевизначення (10) матимемо

$$h'(t) = -\frac{\omega(1,t)}{h(t)}, \quad t\in[0,T], \tag{13}$$

а з умови (9)

$$h(t) = \frac{\mu_3(t)}{\int_0^1 v(y,t)dy}. \tag{14}$$

Продиференціюємо (9) за часом. З одержаної рівності знаходимо

$$\begin{aligned} b(t) &= \biggl(\mu_3'(t) + \frac{\omega(1,t)}{h(t)}(\mu_2(t)-1) + \frac{\omega(0,t)}{h(t)} - h(t)\int_0^1 c(yh(t),t)v(y,t)dy - \\ &-h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)dy\biggr)\Bigl(\mu_2(t)-\mu_1(t)\Bigr)^{-1}, \quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{15}$$

Замінимо інтегро-диференціальне рівняння (11) системою інтегральних рівнянь, враховуючи (13)

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau)h(\tau) - \eta\,\omega(1,\tau)}{h^2(\tau)}\,\omega(\eta,\tau) + \right.$$
$$\left. + c(\eta h(\tau),\tau)\,v(\eta,\tau)\right)d\eta\,d\tau, \quad (16)$$

$$\omega(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau)h(\tau) - \eta\,\omega(1,\tau)}{h^2(\tau)}\,\omega(\eta,\tau) + \right.$$
$$\left. + c(\eta h(\tau),\tau)\,v(\eta,\tau)\right)d\eta\,d\tau, \quad (17)$$

де $v_0(y,t)$ визначено згідно з (12), а

$$v_{0y}(y,t) = h(0)\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h(0))d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau. \quad (18)$$

Отож, задачу (6)-(10) зведено до системи інтегральних рівнянь (14)-(17) з невідомими $h(t), b(t), v(y,t), \omega(y,t)$.

3. Існування розв'язку задачі (6)-(10). Нехай виконується умова

$$(A1) \qquad \mu_i \in C^1[0,T],\ i=\overline{1,3}, \quad \mu_i(t) > 0,\ i=\overline{1,3},\ t \in [0,T],$$
$$f \in C([0,+\infty)\times[0,T]), \quad f(x,t) \geqslant 0,\ x \in [0,\infty),\ t \in [0,T],$$
$$\varphi \in C[0,+\infty), \quad \varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0,\ x \in [0,\infty).$$

Враховуючи умови (2), (4), (A1), одержимо існування єдиного значення $h(0) = h_0$, яке задовольняє рівняння

$$\int_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_3(0).$$

Згідно з принципом максимуму [3] для розв'язку задачі (1)-(3) матимемо

$$v(y,t) \geqslant C_1 \min\{\min_{[0,h(0)]}\varphi(x),\ \min_{[0,T]}\mu_1(t),\ \min_{[0,T]}\mu_2(t)\} \equiv M_0 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

звідки з врахуванням (14) отримаємо

$$h(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_0} \equiv H_0 < \infty, \quad t \in [0,T].$$

Знайдемо оцінку $v(y,t)$ зверху. Для цього знову використаємо принцип максимуму

$$v(y,t) \leqslant C_2 \max\{\max_{[0,h(0)]} \varphi(x),\ \max_{[0,T]} \mu_1(t),\ \max_{[0,T]} \mu_2(t),\ \max_{[0,H_0]\times[0,T]} f(x,t)\} \equiv M_1 < \infty,$$

і згідно з (14) маємо

$$h(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_1} \equiv H_1 > 0, \quad t \in [0,T].$$

Отже,

$$0 < M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1 < \infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{19}$$

$$0 < H_1 \leqslant h(t) \leqslant H_0 < \infty, \quad t \in [0,T]. \tag{20}$$

Теорема 1. *При виконанні умови (A1) та умов*

(A2) $\varphi \in C^2[0,h(0)]$, $f, c \in H^{\alpha,0}([0,H_0]\times[0,T])$, $\alpha \in (0,1)$, $\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$, $t \in [0,T]$;

(A3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h(0)) = \mu_2(0)$,

$$\varphi''(0) + b(0)\varphi'(0) + c(0,0)\varphi(0) + f(0,0) = \mu_1'(0),$$

$$\varphi''(h(0)) + b(0)\varphi'(h(0)) + c(h(0),0)\varphi(h(0)) + f(h(0),0) = \mu_2'(0),$$

де

$$b(0) = \Big[\mu_3'(0) + \frac{\varphi'(h(0))}{h(0)}(\mu_2(0)-1) + \frac{1}{h(0)}\varphi'(0) - h(0)\int_0^1 c(yh(0),0)\varphi(yh(0))dy -$$

$$-h(0)\int_0^1 f(yh(0),0)dy\Big]\Big(\mu_2(0)-\mu_1(0)\Big)^{-1},$$

можна зазначити таке число $T_0 :\ 0 < T_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (6)-(10) існує при* $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T_0$.

Доведення. Для доведення існування розв'язку задачі (6)-(10) достатньо довести, що існує розв'язок системи рівнянь (14)-(17). Справді, якщо $(h(t), b(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10) у сенсі наведеного вище означення, то функції $(h(t), b(t), v(y,t), \omega(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (14)-(17).

Правильним є обернене твердження: якщо $(h, b, v, \omega) \in (C[0,T])^2 \times \times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (14)-(17), то функції $(h(t), b(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10). Для цього достатньо довести, що ці функції належать класу $C^1[0,T]\times\times C[0,T]\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ і задовольняють умови (6)-(10).

Отже, нехай $(h, b, v, \omega) \in (C[0,T])^2 \times (C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (14)-(17). Припущення теореми дають змогу продиференціювати рівність (16) за y. Порівняємо праві частини отриманої рівності та рівності (17). Вони збігаються, тому $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. Тоді на підставі (16) робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість, задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{1}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t)h(t) - y v_y(1,t)}{h^2(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t) \tag{21}$$

і умови (7)-(8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $b(t)$ і $h(t)$.

Оскільки $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ і $\mu_3 \in C^1[0,T]$, то $h \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо рівність (14) за t, використовуючи рівняння (21). Одержимо

$$\begin{aligned} b(t) \;\; = \;\; & \left(\mu_3'(t) - \frac{h'(t)\mu_3(t)}{h(t)} + \frac{v_y(1,t)}{h(t)}\left(\mu_2(t) - 1 - \frac{\mu_3(t)}{h(t)}\right) + \frac{v_y(0,t)}{h(t)} - \right. \\ & \left. - h(t)\int_0^1 c_1(y,t)v(y,t)dy - h(t)\int_0^1 F(y,t)dy\right)\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Віднімаючи від (22) рівність (15), отримаємо

$$\left(h'(t) + \frac{v_y(1,t)}{h(t)}\right)\frac{\mu_3(t)}{h(t)}\left(\mu_2(t) - \mu_1(t)\right)^{-1} = 0.$$

З останньої рівності, враховуючи умови теореми, маємо

$$h'(t) + \frac{v_y(1,t)}{h(t)} = 0,$$

тобто виконується (10). Використовуючи це в рівнянні (21), отримаємо рівняння (6). Після цього умова (14) є еквівалентною умові (9).

Отож, еквівалентність задачі (6)-(10) та системи інтегральних рівнянь (14)-(17) у зазначеному вище сенсі доведено. Для доведення існування розв'язку застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку. Позначимо

$$W(t) = \max_{y\in[0,1]} |\omega(y,t)|.$$

Тоді з (15), (17) матимемо

$$|b(t)| \leqslant C_3 + C_4 W(t), \tag{23}$$

$$W(t) \leqslant C_5 + C_6 \int_0^t \frac{W^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [4]. Таким чином, отримаємо оцінку

$$W(t) \leqslant M_2 < \infty, \quad t \in [0, T_0],$$

де T_0 визначається сталими C_5, C_6. Використовуючи це в (23), одержимо

$$|b(t)| \leqslant M_3 < \infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи (14)-(17) знайдено.
Подамо систему (14)-(17) у вигляді операторного рівняння

$$w = Pw,$$

де $w = (h(t), b(t), v(y,t), \omega(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (14)-(17). Позначимо $N = \{(h, b, v, \omega) \in (C[0, T_0])^2 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : H_1 \leqslant h(t) \leqslant H_0,\ |b(t)| \leqslant M_3 < \infty,\ M_0 \leqslant v(y,t) \leqslant M_1,\ |\omega(y,t)| \leqslant M_2 < \infty,\ (y,t) \in \overline{Q}_{T_0}\}$. Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера.

Доведення того, що оператор P цілком неперервний на N, проводиться аналогічно [5]. Тоді за теоремою Шаудера існує розв'язок $(h(t), b(t), v(y,t), \omega(y,t))$ системи рівнянь (14)-(17) з класу $(C[0, T_0])^2 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2$, а, отже, і розв'язок задачі (6)-(10) $(h(t), b(t), v(y,t))$ з класу $C^1[0, T_0] \times C[0, T_0] \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$.

Теорему 1 доведено.

1. Єдиність розв'язку задачі (6)–(10).

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови*

$(B1)$ $f, c \in C^{1,0}([0, +\infty) \times [0, T])$;

$(B2)$ $\varphi(x) \geqslant \varphi_0 > 0, \quad x \in [0, +\infty), \quad f(x,t) \geqslant 0, \quad (x,t) \in ([0, +\infty) \times [0, T])$,

$(B3)$ $\mu_i(t) > 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad t \in [0, T], \quad \mu_1(t) \neq \mu_2(t),\ t \in [0, T]$.

Тоді розв'язок задачі (6)-(10) єдиний.

Доведення. Нехай $(h_i(t), b_i(t), v_i(y,t)), i = 1, 2$ – два розв'язки задачі (6)-(10). Позначимо

$$h(t) = h_1(t) - h_2(t), \quad b(t) = b_1(t) - b_2(t), \quad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t). \tag{24}$$

Ці різниці задовольняють умови

$$\begin{aligned} v_t = {} & \frac{1}{h_2^2(t)} v_{yy} + \frac{b_2(t)h_2(t) - y v_{2y}(1,t)}{h_2^2(t)} v_y + c(yh_2(t), t)v + \\ & + \left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right) v_{1yy}(y,t) + v_{1y}(y,t)\left[\frac{b(t)h_1(t) - y v_y(1,t)}{h_1^2(t)} + \right. \\ & \left. + b_2(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) - v_{2y}(1,y)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right)\right] + \\ & + (c(yh_1(t), t) - c(yh_2(t), t))v_1(y,t) + f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t), \quad (y,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{25}$$

$$v(y,0)=0, \quad y\in[0,1], \tag{26}$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{27}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\frac{\mu_3(t)}{h_1(t)}-\frac{\mu_3(t)}{h_2(t)}, \quad t\in[0,T]. \tag{28}$$

З рівності (28) знаходимо

$$h(t)=-\frac{h_1(t)h_2(t)}{\mu_3(t)}\int\limits_0^1 v(y,t)dy. \tag{29}$$

Зауважимо також, що

$$\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}=-\frac{h(t)(h_1(t)+h_2(t))}{h_1^2(t)h_2^2(t)}. \tag{30}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t=\frac{1}{h_2^2(t)}v_{yy}+\frac{b_2(t)h_2(t)-yv_{2y}(1,t)}{h_2^2(t)}v_y+c(yh_2(t),t)v$$

запишемо інтегро-диференціальне рівняння, яке еквівалентне задачі (25)-(27)

$$\begin{aligned} v(y,t) \;=\; & \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Big[-\frac{h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+v_{1\eta}(\eta,\tau)\times \\ & \times\left(\frac{b(\tau)h_1(\tau)-\eta v_\eta(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{b_2(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}+v_{2\eta}(\eta,\tau)\frac{h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}\right)+ \\ & +(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Big]d\eta d\tau, \\ & (y,t)\in\overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{31}$$

Позначимо

$$\omega(y,t)=v_y(y,t).$$

Тоді, продиференціювавши (31), одержимо

$$\begin{aligned} \omega(y,t) \;=\; & \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Big[-\frac{h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau)}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau))}v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+v_{1\eta}(\eta,\tau)\times \\ & \times\left(\frac{b(\tau)h_1(\tau)-\eta\omega(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{b_2(\tau)h(\tau)}{h_1(\tau)h_2(\tau)}+v_{2\eta}(\eta,\tau)\frac{h(\tau)(h_1(\tau)+h_2(\tau))}{h_1^2(\tau)h_2^2(\tau)}\right)+ \\ & +(c(\eta h_1(\tau),\tau)-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau)\Big]d\eta d\tau, \\ & (y,t)\in\overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{32}$$

Оскільки $(h_i(t), b_i(t), v_i(y,t)), i = 1,2$ - розв'язки задачі (6)-(10), то для $b_i(t), i = 1,2$, правильна рівність (15). Віднявши ці рівності, одержимо

$$b(t) = \Bigg[(\mu_2(t)-1)\left(\frac{v_{1y}(1,t)h(t)}{h_1(t)h_2(t)} - \frac{\omega(1,t)}{h_2(t)}\right) - \frac{v_{1y}(0,t)h(t)}{h_1(t)h_2(t)} + \frac{\omega(0,t)}{h_2(t)} -$$
$$-h(t)\int_0^1 c(yh_1(t),t)v_1(y,t)dy - h_2(t)\int_0^1 (c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t))v_2(y,t)dy -$$
$$-h_2(t)\int_0^1 c(yh_1(t),t)v(y,t)dy - h(t)\int_0^1 f(yh_1(t),t)dy - h_2(t)\int_0^1 (f(yh_1(t),t) -$$
$$-f(yh_2(t),t))dy\Bigg] \times \Big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\Big)^{-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{33}$$

Використаємо також такі перетворення:

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) = yh(t)\int_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma h(t)), t)d\sigma, \tag{34}$$

$$c(yh_1(t),t) - c(yh_2(t),t) = yh(t)\int_0^1 c_x(y(h_2(t) + \sigma h(t)), t)d\sigma. \tag{35}$$

Підставивши (31), (34), (35) в (29), (32), (33), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду стосовно невідомих $h(t), b(t), \omega(y,t)$. З єдиності розв'язку таких систем отримуємо:

$$h(t) \equiv 0, \qquad b(t) \equiv 0, \quad t \in [0,T], \quad \omega(y,t) \equiv 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

звідки

$$h_1(t) \equiv h_2(t), \qquad b_1(t) \equiv b_2(t), \quad t \in [0,T].$$

Використовуючи це в задачі (25)-(27), знаходимо, що

$$v_1(y,t) \equiv v_2(y,t), \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

що завершує доведення теореми.

5. Випадок інших умов перевизначення. У задачі (1)-(5) замінимо умову (5) інтегральною умовою

$$\int_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{36}$$

Зведемо задачу (1)-(4), (36) до задачі (6)-(9) з умовою

$$h^2(t)\int_0^1 y\,v(y,t)dy = \mu_4(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{37}$$

Ця задача еквівалентна системі інтегральних рівняннь (14) та

$$\begin{aligned} v(y,t) &= v_0(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau)}{h(\tau)}\,\omega(\eta,\tau) + \frac{p(\tau)}{h(\tau)}\,\eta\,\omega(\eta,\tau) + \right. \\ &\left. +c(\eta h(\tau),\tau)\,v(\eta,\tau)\right)d\eta\,d\tau, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \omega(y,t) &= v_{0y}(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\left(\frac{b(\tau)}{h(\tau)}\,\omega(\eta,\tau) + \frac{p(\tau)}{h(\tau)}\,\eta\,\omega(\eta,\tau) + \right. \\ &\left. +c(\eta h(\tau),\tau)\,v(\eta,\tau)\right)d\eta\,d\tau, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} p(t) + \frac{\mu_2(t)-\mu_1(t)}{\mu_2(t)}\,b(t) &= \frac{\mu_3'(t)}{\mu_2(t)} - \frac{\omega(1,t)-\omega(0,t)}{h(t)\,\mu_2(t)} - \\ &- \frac{h(t)}{\mu_2(t)}\int_0^1 (v(y,t)\,c(yh(t),t) + f(yh(t),t))dy, \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} b(t) = \frac{1}{h(t)\mu_1(t)-\mu_3(t)} & \left(\mu_4'(t) + \mu_2(t) - \mu_1(t) - h(t)\,\mu_3'(t) - \omega(0,t) + \right. \\ & \left. +h^2(t)\int_0^1 (1-y)(v(y,t)\,c(yh(t),t) + f(yh(t),t))dy\right), \end{aligned} \tag{41}$$

де $p(t)=h'(t)$, v_0 та v_{0y} визначаються відповідно з (12) і (18).
Зазначимо, що в (41) $\mu_1(t)h(t)-\mu_3(t)\neq 0$, коли $v_y(y,t)>0$, тому що

$$\mu_1(t) - \frac{\mu_3(t)}{h(t)} = \int_0^1 (y-1)\,v_y(y,t)\,dy.$$

Розглянемо такий інтеграл

$$\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta)\,d\eta \geqslant \min_{[0,1]}\varphi'(y)\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta \geqslant M_4 > 0.$$

У (39) решта доданків при $t = 0$ дорівнюють нулю, тоді робимо висновок про існування деякого числа $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, такого що

$$v_y(y,t) \geqslant \frac{M_4}{2} > 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

Досліджуючи систему (14), (38)-(41) аналогічно до (14)-(17), приходимо до такої теореми існування розв'язку задачі (6)-(9),(37).

Теорема 3. *При виконанні умови (A1) та умов* $\mu_4 \in C^1[0,T]$, $\mu_4(t) > 0, t \in [0,T], \varphi \in C^2[0,h(0)]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h(0)) = \mu_2(0)$,

$$\mu_1'(0) = \frac{1}{h^2(0)}\varphi''(0) + \frac{b(0)}{h(0)}\varphi'(0) + c(0,0)\varphi(0) + f(0,0),$$

$$\mu_2'(0) = \frac{1}{h^2(0)}\varphi''(h(0)) + \left(\frac{b(0)}{h(0)} + \frac{h'(0)}{h(0)}\right)\varphi'(h(0)) + c(h(0),0)\varphi(h(0)) + f(h(0),0),$$

де

$$b(0) = \frac{1}{h(0)\mu_1(0) - \mu_3(0)}(\mu_4'(0) + \mu_2(0) - \mu_1(0) - h(0)\,\mu_3'(0) - \varphi'(0) +$$

$$+ h^2(0)\int_0^1 (1-y)(\varphi(yh(0))\,c(yh(0),0) + f(yh(0),0))dy),$$

$$h'(0) + \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{\mu_2(0)}b(0) = \frac{\mu_3'(0)}{\mu_2(0)} - \frac{\varphi'(h(0)) - \varphi'(0)}{h(0)\,\mu_2(0)} -$$

$$-\frac{h(0)}{\mu_2(0)}\int_0^1 (\varphi(yh(0))\,c(yh(0),0) + f(yh(0),0))dy,$$

можна зазначити таке число $T_1 : 0 < T_1 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі (6)-(9), (37) існує при* $0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T_1$.

Умови єдиності задачі (6)-(9), (37) сформульовані в теоремі 4.

Теорема 4. *При виконанні умов (B1), (B2) та умови* $\mu_i(t) > 0$, $i = \overline{1,4}$, $t \in [0,T], \varphi \in C^1[0,h(0)]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, *задача (6)-(9), (37) не може мати більше одного розв'язку при* $0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant t_0$,
де $t_0 : 0 < t_0 \leqslant T$.

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 2.

---

1. *Cannon J. R., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – Vol. 10. – P. 521-531.

2. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55. – №7. – С. 901-910.

3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

4. *Иванчов Н. И.* Обратная задача теплопроводности со свободной границей // Обратные задачи и информ. технологии. – 2002. – Т. 1. – № 2. – С. 69-81.

5. *Ivanchov M.* Inverse problem for equations of parabolic type. – VNTL Publishers, 2003.

INVERSE PROBLEMS OF DETERMINATION OF THE COEFFICIENT AT THE FIRST DERIVATIVE IN A PARABOLIC EQUATION IN A FREE BOUNDARY DOMAIN

Nadiya Hryntsiv, Halyna Snitko

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

We establish conditions of existence and uniqueness of a solution of inverse problems for a one-dimensional parabolic equation with unknown time dependent coefficient at the first derivative in the case when a part of boundary is unknown.

Key words: inverse problem, free boundary, Green's function.

Стаття надійшла до редколегії 03.06.2005

Прийнята до друку 19.10.2005