УДК 517.95

ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНІЄЇ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ ОБЛАСТІ

Наталія ГУЗІЛЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Одержано деякі умови існування й єдиності розв'язку мішаної задачі для системи

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} B_i(x,y,t)u_{x_i} + C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t)$$

в області $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+ \times (0,T)$, де u, g, f – вектор-функції, A_i, B_{sj}, C, B_j – матриці порядку m.

Ключові слова: напівлінійна ультрапараболічна система, необмежена область.

Ультрапараболічні рівняння виникають при моделюванні марківських дифузійних процесів, у теорії ймовірностей, теорії бінарних електролітів, розсіюванні електронів, кінетичній теорії, в біології та інших галузях науки. Вперше таку модель запропонував А. М. Колмогоров [1]. Рівняння Колмогорова багаторазово узагальнювали та досліджували різні автори (див. бібліографію в [2]). Зазначимо, що найповніші результати для лінійних ультрапараболічних рівнянь одержали Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д. та їхні учні (див., наприклад, [2–5]). Окремі результати для нелінійних ультрапараболічних рівнянь в необмежених областях отримано в [6–9].

У цій статті пропонуємо певні умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі в класі функцій з довільним зростанням на нескінченності для напівлінійної ультрапараболічної системи в області, необмеженій за просторовими змінними.

Нехай $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$, $\mathbb{R}^l_+ = \{y \in \mathbb{R}^l : y > 0\}$. В області $Q_T = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+ \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$ розглянемо систему рівнянь

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} B_i(x,y,t)u_{x_i} + C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t), \tag{1}$$

де $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_m)$, $g = \mathrm{col}(g_1,\ldots,g_m)$, $f = \mathrm{col}(f_1,\ldots,f_m)$, A_i, B_{sj}, C, B_j – матриці порядку m, $i = 1,\ldots,l$, $\quad s,j = 1,\ldots,n$.

Позначимо $\Sigma_\tau = \partial\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+ \times [0,\tau]$, $\tau \in [0,T]$, $O = \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^l_+$, $D_T = \mathbb{R}^n_+ \times (0,T)$, також позначимо через $O^k = \Pi^k_n \times \Pi^k_l$ для будь-яких $k \in \mathbb{N}$, де $\Pi^k_n = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : x_i < k, \ i = 1,\ldots,n\}$, $\Pi^k_l = \{y \in \mathbb{R}^l_+ : y_i < k, \ i = 1,\ldots,l\}$.

Введемо простори

$$H^1_1(O^k) = \{u : u \in H^1(O^k), u|_{\Sigma_0} = 0\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$H^1_{1,loc}(\overline{O}) = \{u : u \in H^1(O^k), \forall k \in \mathbb{N}, u|_{\Sigma_0} = 0\},$$

$$L^r_{loc}(\overline{O}) = \{u : u \in L^r(O^k), \forall k \in \mathbb{N}\}, r \in (1,+\infty],$$

$$H^1_1(\overline{Q}_T) = \{u : u \in H^1(\overline{Q}_T), u|_{\Sigma_T} = 0\},$$

$$V(\overline{Q}_T) = \{v : v, v_{x_i} \in L^2((0,T); L^2_{loc}(\overline{O})), i = 1,\ldots,n, v|_{\Sigma_T} = 0\}.$$

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(G$_0$)**, **(G$_1$)**, якщо:

(A) : елементи матриць A_i неперервні й обмежені в $\overline{D}_T$; $\quad A_i(x,t) = A^*_i(x,t)$, $i = 1,\ldots,l$ для всіх $(x,t) \in D_T$;

(B) : елементи матриць B_{ijy_s}, B_{iy_s} належать до простору $L^\infty((0,T); L^\infty_{loc}(\overline{O}))$, а елементи матриць B_{ij}, B_i належать до простору $L^\infty(\overline{Q}_T)$ для всіх $i,j = 1,\ldots,n$, $s = 1,\ldots,l$; для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)\xi_i,\xi_j) \ge b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$, де $b_0 > 0, b_0 = \mathrm{const}$;

(C) : елементи матриць C, C_{y_i} належать до простору $L^\infty((0,T); L^\infty_{loc}(\overline{O}))$ для всіх $i = 1,\ldots,l$; для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$ виконується нерівність $(C(x,y,t)\xi,\xi) \ge c_0|\xi|^2$, $c_0 = \mathrm{const}$;

(G$_0$) : функції $(x,t) \to g(x,t,\xi)$ є вимірними на D_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$; функції $\xi \to g(x,t,\xi)$ неперервні в $\mathbb{R}^m$ майже для всіх $(x,t) \in D_T$ і існують такі додатні сталі g_0, g_1, що для всіх ξ, η з $\mathbb{R}^m$ і майже всіх $(x,t) \in D_T$ виконуються нерівності

$$|g_i(x,t,\xi)| \le g_1 \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^{p-1}, \quad i = 1,\ldots,m, \quad p > 2,$$

$$(g(x,t,\xi) - g(x,t,\eta), \xi - \eta) \geq g_0|\xi - \eta|^p;$$

$(\mathbf{G_1})$: функції $\xi \to g_{\xi_i}(x,t,\xi)$ є неперервними в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ майже для всіх $(x,t) \in D_T$ і для всіх $i = 1,\ldots,m$; $(G(x,t,\eta)\xi,\xi) \geq 0$ для майже всіх $(x,t) \in D_T$ і майже для всіх $\eta, \xi \subset \mathbb{R}^m$, де

$$G(x,t,\eta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x,t,\eta)}{\partial \eta_1} & \ldots & \frac{\partial g_1(x,t,\eta)}{\partial \eta_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial g_m(x,t,\eta)}{\partial \eta_1} & \ldots & \frac{\partial g_m(x,t,\eta)}{\partial \eta_m} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок $\sum\limits_{i=1}^{l} A_i(x,t) < 0$ на D_T. Задамо для системи (1) крайові

$$u(x,y,t) = 0 \text{ на } \Sigma_T \tag{2}$$

та початкові

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in O \tag{3}$$

умови.

Означення 1. *Функцію u, яка задовольняє включення*

$$u \in (C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{O})) \cap V(\overline{Q}_T) \cap L^p((0,T); L^p_{loc}(\overline{O})))^m,$$

називаємо слабким розв'язком задачі (1)–(3), якщо вона є границею у цьому просторі послідовності функцій $\{u^k\}$, кожна з яких задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[-(u^k, v_t) + \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t) u^k_{y_i}, v) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t) u^k_{x_i}, v_{x_j}) + \tag{4}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (B_i(x,y,t) u^k_{x_i}, v) + (C(x,y,t) u^k, v) + (g(x,t,u^k), v) - (f^k(x,y,t), v) \Big] dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{O_\tau} (u^k, v) dxdt - \int\limits_{O_0} (u^k_0, v) dxdy = 0,$$

де $f^k \in (L^{p'}_{loc}(\overline{Q}_T))^m, f^k_{y_i} \in (L^2_{loc}(\overline{Q}_T))^m$, $u^k_0 \in (H^1_{1,loc}(\overline{O}))^m$,

$$f^k \to f \quad \textit{в} \quad (L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{\Omega})))^m, \quad p' = p/(p-1),$$

$$u^k_0 \to u_0 \quad \textit{в} \quad (L^2_{loc}(\overline{\Omega}))^m \quad \textit{при} \quad k \to +\infty,$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ *і для всіх* $v \in (H^1_1(Q_T) \cap L^p(Q_T))^m$, *які мають обмежені носії.*

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, $(\mathbf{C})$, $(\mathbf{G_0})$, $(\mathbf{G_1})$, $u_0 \in (L^2_{loc}(\overline{O}))^m$, $f \in (L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{O})))^m$, $\sum\limits_{i=1}^{l} A_i(x,t) < 0$ *для всіх* $(x,t) \in D_T$, $2 < p \leq \frac{2(n+l)}{n+l-2}$, *якщо* $n + l > 2$ *і* $p > 2$, *якщо* $n + l = 2$. *Тоді існує единий слабкий розв'язок задачі (1)–(3) в області* Q_T.

Доведення. Позначимо через $S_T^{1,k} = Q_T \cap (\Pi_n^k \times \partial\Pi_l^k \times [0,T])$, $\Sigma_{T,k} = \partial\Pi_n^k \times \Pi_l^k \times [0,T]$. В області $Q_T^k = \Pi_n^k \times \Pi_l^k \times (0,T)$ розглянемо систему

$$A(u) = f^k \tag{5}$$

з крайовими умовами

$$u|_{S_T^{1,k}} = 0, \tag{6}$$

$$u|_{\Sigma_{T,k}} = 0 \tag{7}$$

і початковими умовами

$$u(x,y,0) = u_0^k(x,y), \tag{8}$$

де $u_0^k = \widetilde{u}_0^k \zeta_k(x)$, $\zeta_k(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \zeta_k(x) \le 1$, $\zeta_k(x) = 1$, якщо $x \in \Pi_n^{k-1}$, $\zeta_k(x) = 0$, якщо $x \in \mathbb{R}_+^n \backslash \Pi_n^k$, а $\widetilde{u}_0^k \in (H_{1,loc}^1(\overline{O}))^m$, $\widetilde{u}_0^k \to u_0$ в просторі $(L_{loc}^2(\overline{O}))^m$ при $k \to \infty$, функція $f^k(x,y,t) = \begin{cases} \widetilde{f}^k(x,y,t), & (x,y,t) \in Q_T^k, \\ 0, & (x,y,t) \in Q_T \backslash Q_T^k, \end{cases}$ і $\widetilde{f}_{y_i}^k \in (L_{loc}^2(\overline{Q}_T))^m$, $\widetilde{f}^k \to f$ у просторі $(L^{p'}((0,T); L_{loc}^{p'}(\overline{O}))^m$ при $k \to \infty$.

На підставі теореми 1 [10] існує узагальнений розв'язок u^k задачі (5)–(8)

$$u^k \in (C([0,T]; L^2(O^k)) \cap L^2((0,T); H_1^1(O^k)) \cap L^p(Q_T^k))^m.$$

Продовжимо функцію u^k нулем на область $Q_T \backslash Q_T^k$. Нехай $k = 2,3,4,\ldots$ Розглянемо послідовність функцій $\{u^k\}$, які задовольняють рівності

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[-(u^k, v_t) + \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t) u_{y_i}^k, v) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^k, v_{x_j}) + \tag{9}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (B_i(x,y,t) u_{x_i}^k, v) + (C(x,y,t) u^k, v) + (g(x,t,u^k), v) - (f^k(x,y,t), v) \Big] dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{O_\tau} (u^k, v) dxdt - \int\limits_{O_0} (u_0^k(x,y), v) dxdy = 0,$$

$\tau \in [0,T]$, для довільної функції $v \in (H_{1,loc}^1(\overline{Q}_T) \cap L^p((0,T); L_{loc}^p(\overline{O})))^m$.

Розглянемо рівності (9) для u^s й u^k, віднімемо їх і позначимо $u^{s,k} = u^s - u^k$. Приймемо, що $v = (u^s - u^k)\phi_R(y)\phi_R(x) e^{-\gamma t}$, $s,k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $\gamma > 0$, де $R \in \mathbb{N}$ – довільне фіксоване число, $\phi_R(z) = [h_R(z)]^\alpha$, $\alpha > 1$,

$$h_R(z) = \begin{cases} \frac{1}{R}(R^2 - |z|^2), & 0 \le |z| \le R, \\ 0, & |z| > R. \end{cases}$$

Тоді матимемо рівності

$$\frac{1}{2} \int\limits_{O_\tau} (u^{s,k}, u^{s,k}) \phi_R(y) \phi_R(x) e^{-\gamma\tau} dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\frac{\gamma}{2} (u^{s,k}, u^{s,k}) + \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t) u_{y_i}^{s,k}, u^{s,k}) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^{s,k}_{x_i},u^{s,k}_{x_j})+\sum_{i=1}^{n}(B_i(x,y,t)u^{s,k}_{x_i},u^{s,k})+(C(x,y,t)u^{s,k},u^{s,k})+$$

$$+(g(x,t,u^s)-g(x,t,u^k),u^{s,k})\Big]\phi_R(y)\phi_R(x)e^{-\gamma t}dxdydt= \tag{10}$$

$$=\int_{Q_\tau}(f^s(x,y,t)-f^k(x,y,t),u^{s,k})\phi_R(y)\phi_R(x)e^{-\gamma t}dxdydt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{O_0}|u_0^s(x,y)-u_0^k(x,y)|^2\phi_R(y)\phi_R(x)dxdy$$

$\tau\in[0,T]$, для s,k більших за R.

Перетворимо й оцінимо кожний доданок рівності (10). Одержимо

$$\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)u^{s,k}_{y_i},u^{s,k})\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\geq$$

$$\geq-\alpha a_2\int_{Q_\tau}|u^{s,k}|^2\phi_R(x)[h_R(y)]^{\alpha-1}e^{-\gamma t}dxdydt,$$

де стала a_2 залежить від матриць $A_i(x,t)$, $i=1,\ldots,l$;

$$\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^{s,k}_{x_i},u^{s,k}_{x_j})\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\geq$$

$$\geq b_0\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt,$$

$$\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,y,t)u^{s,k}_{x_i},u^{s,k}(\phi_R(x))_{x_j})\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\leq$$

$$\leq\int_{Q_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}||B_{ij}|||u^{s,k}_{x_i}||u^{s,k}||(\phi_R(x))_{x_j}||\phi_R(y)e^{-\gamma t}|dxdydt\leq$$

$$\leq b_1\left(\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}|^p\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{(\phi_R(x))_{x_i}}{\phi_R(x)}\right|^r\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\right)^{1/r}\leq$$

$$\leq\frac{b_1\delta_2}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt+\frac{n\delta_2}{p}\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^p\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt+$$

$$+\frac{\mu(\delta_2)}{r}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{(\phi_R(x))_{x_i}}{\phi_R(x)}\right|^r\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt,$$

де $\delta_2>0$, $r=\frac{2p}{p-2}$ і b_1– стала, яка залежить від матриць B_{ij};

$$\int\limits_{Q_\tau}(C(x,y,t)u^{s,k},u^{s,k})\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\geq c_0\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^2\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}(g(x,t,u^s)-g(x,t,u^k),u^{s,k})\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\geq$$

$$\geq g_0\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^p\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(B_i(x,y,t)u^{s,k}_{x_i},u^{s,k})\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\leq\frac{b_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left(\delta_1\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{n}{\delta_1}\left|u^{s,k}\right|^2\right)\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt,$$

де $b_3=\max\limits_i\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T}||B_i||$;

$$\int\limits_{Q_\tau}(f^s-f^k,u^{s,k})\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\leq\frac{g_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^{s,k}|^p\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt+$$

$$+\frac{\mu_1(p,g_0)}{2}\int\limits_{Q_\tau}|f^s-f^k|^{p'}\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt.$$

Враховуючи одержані оцінки, з (10) отримуємо нерівність

$$\int\limits_{O_\tau}|u^{s,k}|^2\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma\tau}dxdy+\int\limits_{Q_\tau}\left[(2b_0-b_3\delta_1-b_1\delta_2)\sum_{i=1}^{n}|u^{s,k}_{x_i}|^2+\right. \qquad (11)$$

$$\left.+\left(\gamma+2c_0-\frac{b_3n}{\delta_1}\right)|u^{s,k}|^2+\left(g_0-\frac{n\delta_2}{p}\right)|u^{s,k}|^p\right]\phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t}dxdydt\leq$$

$$\leq 2\alpha a_2 \int\limits_{Q_\tau} |u^{s,k}|^2 \phi_R(x)[h_R(y)]^{\alpha-1} e^{-\gamma t} dxdydt+$$

$$+\frac{p-2}{p} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{(\phi_R(x))_{x_i}}{\phi_R(x)} \right|^{\frac{2p}{p-2}} \phi_R(x)\phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt+$$

$$+c_1 \int\limits_{Q_\tau} |f^s - f^k|^{p'} \phi_R(x)\phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt + \int\limits_{O_0} |u_0^s(x,y) - u_0^k(x,y)|^2 \phi_R(x)\phi_R(y) dxdy,$$

$\tau \in [0, T]$.

Оцінимо інтеграли

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^{s,k}|^2 \phi_R(x)[h_R(y)]^{\alpha-1} e^{-\gamma t} dxdydt \leq \frac{2\delta_0}{q} \int\limits_{Q_\tau} |u^{s,k}|^q \phi_R(x)\phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt+$$

$$+\frac{q-2}{q\delta_0^{\frac{2}{q-2}}} \int\limits_{Q_\tau} \phi_R(x)[h_R(y)]^{\alpha-\frac{q}{q-2}} e^{-\gamma t} dxdydt,$$

де $2 < q < p$;

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{(\phi_R(x))_{x_i}}{\phi_R(x)} \right|^{\frac{2p}{p-2}} \phi_R(x)\phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt \leq$$

$$\leq (2\alpha)^{\frac{2p}{p-2}} \int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\alpha-\frac{2p}{p-2}} \phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt.$$

Оскільки для $q \in (2, p)$ правильна нерівність $|u^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^p \geq |u^{s,k}|^q$, тоді з (11) одержимо оцінку

$$\int\limits_{O_\tau} |u^{s,k}|^2 \phi_R(x)\phi_R(y) e^{-\gamma\tau} dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[(2b_0 - b_3\delta_1 - b_1\delta_2) \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{s,k}|^2 + \qquad (12)$$

$$+\left(\gamma + 2c_0 - \frac{b_3 n}{\delta_1}\right) |u^{s,k}|^2 + \left(g_0 - \frac{n\delta_2}{p}\right) |u^{s,k}|^p \Bigg] \phi_R(x)\phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{4\alpha a_2 \delta_0}{q} \int\limits_{Q_\tau} (|u^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^p) \phi_R(x)\phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt+$$

$$+\frac{p-2}{p} (2\alpha)^{\frac{2p}{p-2}} \int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\alpha-\frac{2p}{p-2}} \phi_R(y) e^{-\gamma t} dxdydt+$$

$$+\frac{(q-2)2\alpha a_2}{q\delta_0^{\frac{2}{q-2}}} \int\limits_{Q_\tau} [h_R(y)]^{\alpha-\frac{q}{q-2}} \phi_R(x) e^{-\gamma t} dxdydt+$$

$$+c_1 \int\limits_{Q_\tau} |f^s - f^k|^{p'} \phi_R(x)\phi_R(y)e^{-\gamma t} dxdydt + \int\limits_{O_0} |u_0^s(x,y) - u_0^k(x,y)|^2 \phi_R(x)\phi_R(y) dxdy.$$

Виберемо параметри $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ так, щоб $g_0 - \frac{n\delta_2}{p} - \frac{4\alpha a_2 \delta_0}{q} \geq 1, \quad 2b_0 - b_3\delta_1 - b_1\delta_2 \geq 1$ і виберемо $\gamma = \max\{b_3 n/\delta_1 - 2c_0 + 1, 1\}$. Тоді, враховуючи це, з (12) отримаємо оцінку

$$\int\limits_{O_\tau} |u^{s,k}|^2 \phi_R(x)\phi_R(y) dxdy + \int\limits_{Q_\tau} \left(\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^p \right) \phi_R(x)\phi_R(y) dxdydt \leq \quad (13)$$

$$\leq c_2 \int\limits_{Q_\tau} |f^s(x,y,t) - f^k(x,y,t)|^{p'} \phi_R(x)[h_R(y)]^\alpha dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{O_0} |u_0^s(x,y) - u_0^k(x,y)|^2 \phi_R(x)\phi_R(y) dxdy +$$

$$+c_2 \int\limits_{Q_\tau} [h_R(y)]^{\alpha - \frac{q}{q-2}} \phi_R(x) dxdydt + c_2 \int\limits_{Q_\tau} [h_R(x)]^{\alpha - \frac{2p}{p-2}} \phi_R(y) dxdydt,$$

$\tau \in [0,T]$, де стала c_2 не залежить від R, s, k.

Нехай k_0 – довільне фіксоване натуральне число. Позначимо через R_0 таке найменше дійсне число, що $\Pi_l^{k_0} \subset \{y \in \mathbb{R}^l : |y| < R_0\}$, $\Pi_n^{k_0} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_0\}$. Нехай $R > R_0$. Позначимо через k_1 таке найменше натуральне число, що $\{y \in \mathbb{R}^l : |y| < R\} \subset \Pi_l^{k_1}$, $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\} \subset \Pi_n^{k_1}$. Тоді, враховуючи, що $R - |z| \leq h_R(z) \leq R + |z|$, з (13) отримаємо

$$\int\limits_{O_\tau^{k_0}} |u^{s,k}|^2 dxdy + \int\limits_{Q_\tau^{k_0}} \left(\sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^2 + |u^{s,k}|^p \right) dxdydt \leq \quad (14)$$

$$\leq c_3 \left(\frac{2R}{R - R_0} \right)^{2\alpha} \left[\int\limits_{Q_\tau^{k_1}} |f^s(x,y,t) - f^k(x,y,t)|^{p'} dxdydt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{O_0^{k_1}} |u_0^s(x,y) - u_0^k(x,y)|^2 dxdy + R^{n+l-q/(q-2)} + R^{n+l-2p/(p-2)} \right],$$

де $\alpha = \max\left\{ \left[\frac{q}{q-2}\right]; \left[\frac{2p}{p-2}\right] \right\} + 1$, $\tau \in [0,T]$, а стала c_3 не залежить від R, s, k. Для кожного $n + l \geq 2$ можна вибрати таке $q \in (2,p)$, що $n + l < \frac{q}{q-2}$. Враховуючи ще й умову $p < \frac{2(n+l)}{n+l-2}$, легко бачити, що для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке R, що

$$c_3 \left(\frac{2R}{R - R_0} \right)^{2\alpha} \left(R^{n+l-q/(q-2)} + R^{n+l-2p/(p-2)} \right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Крім того, оскільки послідовності $\{f^k\}$ і $\{u_0^k\}$ фундаментальні відповідно у просторах $L^{p'}(Q_T^{k_1})$, $L^2(O^{k_1})$, то існує таке $s_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $s, k > s_0$

$$\int\limits_{Q_T^R} |f^s(x,y,t) - f^k(x,y,t)|^{p'} dxdydt + \int\limits_{O_0^R} |u_0^s(x,y) - u_0^k(x,y)|^2 dxdy < \frac{2\varepsilon}{3c_3}.$$

Отже, з (14) випливає, що послідовність $\{u^k\}$ фундаментальна в просторах $(L^p(Q_T^{k_0}))^m$, $(C([0,T]; L^2(O^{k_0})))^m$, а послідовності $\{u_{x_i}^k\}$ фундаментальні у просторі $(L^2(Q_T^{k_0}))^m$, $i = 1, \dots, n$ для $\forall k_0 \in \mathbb{N}$. Тоді функція u, яка є границею послідовності $\{u^k\}$ у просторі $(C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{O})) \cap V(Q_T) \cap L^p([0,T]; L^p_{loc}(\overline{O})))^m$ – слабкий розв'язок задачі (1)–(3).

Доведемо єдиність розв'язку. Нехай задача (1)–(3) має два слабких розв'язки u^1 і u^2. Тоді існують послідовності $\{u^{1,k}\}$ і $\{u^{2,s}\}$ узагальнених розв'язків задачі (1)–(3) з функціями $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$ і $\{f^s\}$, $\{u_0^s\}$ відповідно, причому

$$f^k \to f \text{ у просторі } (L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{O})))^m, \; u_0^k \to u_0 \text{ у просторі } (L^2_{loc}(\overline{O}))^m$$

при $k \to \infty$ і

$$f^s \to f \text{ у просторі } (L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{O})))^m, \; u_0^s \to u_0 \text{ у просторі } (L^2_{loc}(\overline{O}))^m$$

при $s \to \infty$. Приймемо, що $u^{s,k} = u^{2,s} - u^{1,k}$. Тоді для функцій $u^{s,k}$ знову матимемо рівність (10). Нехай k_0 – довільне фіксоване натуральне число. Далі аналогічно одержуємо оцінку (14). Оскільки

$$\|f^s - f^k\|_{(L^{p'}(Q_T^{k_1}))^m} \le \|f^s - f\|_{(L^{p'}(Q_T^{k_1}))^m} + \|f - f^k\|_{(L^{p'}(Q_T^{k_1}))^m},$$

$$\|u_0^s - u_0^k\|_{(L^2(O^{k_1}))^m} \le \|u_0^s - u_0\|_{(L^2(O^{k_1}))^m} + \|u_0 - u_0^k\|_{(L^2(O^{k_1}))^m},$$

то для досить великого R з (14) випливає оцінка

$$\|u^{2,s} - u^{1,k}\|_{(L^2(Q_T^{k_0}))^m} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15}$$

Тоді

$$\|u^2 - u^1\|_{(L^2(Q_T^{k_0}))^m} \le \|u^{2,s} - u^2\|_{(L^2(Q_T^{k_0}))^m} + \|u^{2,s} - u^{1,k}\|_{(L^2(Q_T^{k_0}))^m} + \|u^1 - u^{1,k}\|_{(L^2(Q_T^{k_0}))^m}.$$

Згідно з означенням узагальненого розв'язку існує таке $s_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $k, s > s_0$

$$\|u^{1,k} - u^1\|_{(L^2(Q_T^{k_0}))^m} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|u^{2,s} - u^2\|_{(L^2(Q_T^{k_0}))^m} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Враховуючи (15) і (16), а також довільність k_0 і ε, одержуємо, що $u^1(x,y,t) = u^2(x,y,t)$ майже всюди в Q_T. Теорему доведено.

---

1. *Kolmogorov A.N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)// Ann. Math. – 1934. – Vol. 35. – P. 116-117.

2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Birkhäuser Verlag. – 2004.
3. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. матем. вісник. – 2004. – № 1. – С. 61-68.
4. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11-16.
5. *Эйдельман С.Д., Малицкая А.П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 7. – С. 1316-1331.
6. *Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance// Nonlinear Analysis. – 2001. – Vol. 47. – P. 491-502.
7. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honour of Proff. O.A. Ladyzhenskaya. – New York, NY: Kluwer Academic Publishers. Int. Math. Ser., N.Y. 2. – 2002. – P. 243-265.
8. *Барабаш Г.М., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – № 4. – Т. 45 – С. 27-34.
9. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Diff. Equat. – 1998. – Vol. 23. – № 5,6. – P. 847-868.
10. *Гузіль Наталія.* Задача без початкових умов для системи ультрапараболічних рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 59-76.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SEMILINEAR ULTRAPARABOLIC SYSTEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN WITH RESPECT TO SPACE VARIABLES

Nataliya Huzil'

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

There is considered some conditions of the existence and uniqueness of a solution of the boundary value problem for the system $u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + + \sum_{i=1}^{n} B_i(x,y,t)u_{x_i} + C(x,y,t)u + g(x,t,u) = f(x,y,t)$ in the domain $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^l \times (0,T)$, where u, g, f are vector functions and A_i, B_{sj}, C, B_j are matrixes of the m-th order.

Key words: semilinear ultraparabolic system, unbounded domain.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.2005

Прийнята до друку 19.10.2005