ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.99–106

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.99–106

УДК 517.98

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ВЕКТОРІВ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ ДРОБОВИХ СТЕПЕНІВ ПОЗИТИВНИХ ОПЕРАТОРІВ

Мар'ян ДМИТРИШИН[1], Олег ЛОПУШАНСЬКИЙ[2]

[1] *Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, вул. Шевченка, 57 76025 Івано-Франківськ, Україна*
[2] *Інститут математики Жешівського університету, вул. Рейтана, 16 Жешів, Польща*

Описано проміжні простори, породжені дійсним і комплексним методами інтерполяції підпросторів векторів експоненціального типу дробових степенів позитивних операторів.

Ключові слова: інтерполяція позитивних операторів, дробові степені операторів, вектори експоненціального типу.

У праці введено нові класи просторів векторів експоненціального типу для дробових степенів позитивних операторів і досліджуються їхні інтерполяційні властивості. Доведено теорему про ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал введених просторів векторів експоненціального типу. Для доведення інтерполяційних рівностей будують ізометричні вкладення у простори послідовностей, для яких такі ізоморфізми відомі. Загалом інтерполяційні властивості не наслідуються підпросторами. Однак із властивості замкнености підпросторів векторів експоненціального типу, наявність якої доводимо, а також з їхнього спеціального вигляду випливає, що багато таких рівностей зберігається для підпросторів векторів експоненціального типу. Наводимо приклад застосування до регулярних еліптичних граничних задач, в якому вектори експоненціального типу збігаються з кореневими векторами, а для операторів із сталими коефіцієнтами є підкласом цілих функцій експоненціального типу.

1. Інтерполяційні простори. Нехай далі $0 < \theta < 1$ та $1 \le q \le \infty$. Для пари комплексних банахових просторів $\{X, Y\}$ розглядаємо алгебричну суму $X + Y =$

$\{a = x + y : x \in X,\ y \in Y\}$ з нормою $\|a\|_{X+Y} = \inf\limits_{a=x+y} \left(\|x\|_X + \|y\|_Y\right)$. З огляду на [1] визначаємо інтерполяційний простір

$$(X,Y)_{\theta,q} = \left\{a \in X + Y : \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}} < \infty\right\}$$

з нормою

$$\|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta}\mathcal{K}(t,a;X,Y)\right]^q \dfrac{dt}{t}\right)^{1/q} & : \ q < \infty, \\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{-\theta}\mathcal{K}(t,a;X,Y) & : \ q = \infty, \end{cases}$$

де $\mathcal{K}(t,a;X,Y) = \inf\limits_{a=x+y} \left(\|x\|_X + t\,\|y\|_Y\right)$. Зазначимо, що функціонал $\mathcal{K}(t,a;X,Y)$ задає норму в $X+Y$ еквівалентну нормі $\|\cdot\|_{X+Y}$. Побудовані інтерполяційні простори $(X,Y)_{\theta,q}$ є банаховими і перебувають між $X\bigcap Y$ і $X+Y$. Згаданий метод їх побудови прийнято називати дійсним методом інтерполяції.

Розглянемо комплексний метод інтерполяції. У комплексній смузі $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ розглянемо простір $\mathcal{F}(X,Y)$ $(X+Y)$-значних аналітичних функцій, неперервних в замиканню $\overline{S}$ таких, що $f(it) \in X$ та $f(1+it) \in Y$ для всіх $-\infty < t < \infty$ і які мають скінченну норму

$$\|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)} = \max\left(\sup_t \|f(it)\|_X, \sup_t \|f(1+it)\|_Y\right).$$

Числу $\theta \in (0,1)$ зіставляємо інтерполяційний простір

$$[X,Y]_\theta = \left\{a \in X + Y : \exists\ f(z) \in \mathcal{F}(X,Y),\ f(\theta) = a\right\}$$

з нормою $\|a\|_{[X,Y]_\theta} = \inf\limits_{f(\theta)=a} \|f(z)\|_{\mathcal{F}(X,Y)}$, де inf береться по всіх функціях $f\in \mathcal{F}(X,Y)$ таких, що $f(\theta) = a$. Простори $[X,Y]_\theta$ є банаховими і також перебувають між $X\bigcap Y$ і $X+Y$.

2. Інтерполяційні шкали векторів експоненціального типу. Нехай A – позитивний оператор зі щільною областю визначення $\mathcal{C}^1$ в деякому комплексному банаховому просторі X. Згідно з означенням це означає, що піввісь $(-\infty, 0]$ належить його резольвентній множині та існує таке число $c > 0$, що

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \le \frac{c}{1+|\lambda|}, \qquad \lambda \in (-\infty, 0].$$

Через $\mathcal{C}^k$, $(k \in \mathbb{Z}_+)$ позначаємо область визначення оператора A^k з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^k} = \|A^k x\|_X$, $(x \in \mathcal{C}^k)$. При цьому $A^0 = I$ – одиничний оператор і $\mathcal{C}^0 = X$. Далі $\mathcal{C}^\infty := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{C}^k$. Як відомо [1, § 1.15.1], для всіх елементів $x \in \left(X, \mathcal{C}^k\right)_{\alpha/k,1}$, де $0 < \alpha < k$, визначений оператор

$$A^\alpha x = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} A^k (A + tI)^{-k} x\, dt,$$

що припускає замикання в X, яке не залежить від вибору k. Замикання також позначаємо через A^α. Область визначення $\mathcal{C}^\alpha$ оператора A^α далі розглядаємо як банахів простір з нормою $\|x\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|A^\alpha x\|_X$, $x \in \mathcal{C}^\alpha$. Отже, оператор A^α і простір $\mathcal{C}^\alpha$ визначені для всіх чисел $\alpha \geq 0$. Оператор A^α ізоморфно відображає $\mathcal{C}^\alpha$ на X [1, теорема 1.15.2] і вкладення $\mathcal{C}^\alpha \subset X$ неперервне. Підпростір $\mathcal{C}^k$ щільний в X [1, лема 1.14.1], а щільність $\mathcal{C}^\alpha$ в X є наслідком вкладень $\mathcal{C}^k \subset \left(X, \mathcal{C}^k\right)_{\alpha/k,1} \subset \mathcal{C}^\alpha \subset X$. Для довільних $\alpha, \beta \geq 0$ правильні рівності $A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha = A^{\alpha+\beta}$ і оператор A^β ізоморфно відображає $\mathcal{C}^{\alpha+\beta}$ на $\mathcal{C}^\alpha$ [1, теорема 1.15.2]. Зокрема $\mathcal{C}^{\alpha+\beta} \subset \mathcal{C}^\alpha$, отже, $\mathcal{C}^\infty \subset \bigcap_{\beta\geq 0}\mathcal{C}^{\alpha+\beta} \subset \mathcal{C}^\infty$.

Далі для довільного $x \in \mathcal{C}^\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{C}^{\alpha+k}$ приймемо $x_k := A^k x \in \mathcal{C}^\alpha$. Нехай $\nu > 0$ і послідовність $(x^*_{k,\nu})_{k\in\mathbb{Z}_+}$ складається з елементів вигляду $\nu^{-k}x_k$ розташованих у порядку незростання норм $\|x^*_{0,\nu}\|_{\mathcal{C}^\alpha} \geq \|x^*_{1,\nu}\|_{\mathcal{C}^\alpha} \geq \|x^*_{2,\nu}\|_{\mathcal{C}^\alpha} \ldots$. Для чисел $1 \leq q \leq \infty$, $1 < p < \infty$ визначаємо простори

$$\mathcal{E}^\nu_1(\mathcal{C}^\alpha) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty : \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_1(\mathcal{C}^\alpha)} = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-k}\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha} < \infty\right\},$$
$$\mathcal{E}^\nu_{p,q}(\mathcal{C}^\alpha) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty : \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_{p,q}(\mathcal{C}^\alpha)} = \left(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}k^{\frac{q}{p}-1}\|x^*_{k,\nu}\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\right)^{1/q} < \infty\right\},$$
$$\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha) = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty : \|x\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha)} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-k}\|x_k\|_{\mathcal{C}^\alpha} < \infty\right\}$$

з нормами $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^\nu_1(\mathcal{C}^\alpha)}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^\nu_{p,q}(\mathcal{C}^\alpha)}$ та $\|\cdot\|_{\mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha)}$, відповідно. Далі приймемо $\mathcal{E}^\nu_{q,q}(\mathcal{C}^\alpha) := \mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$ для $1 < q < \infty$. Тоді $\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}\right)^{1/q}$.

Для чисел $\beta > \alpha \geq 0$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$ визначаємо інтерполяційні простори $(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ та $[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$. З [1, теорема 1.15.2] та властивостей таких просторів випливає, що для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ оператор A^k ізоморфно відображає $(\mathcal{C}^{k+\alpha}, \mathcal{C}^{k+\beta})_{\theta,q}$ на $(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ та $[\mathcal{C}^{k+\alpha}, \mathcal{C}^{k+\beta}]_\theta$ на $[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$. Зокрема, для будь-якого $x \in \mathcal{C}^\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}(\mathcal{C}^{k+\alpha}, \mathcal{C}^{k+\beta})_{\theta,q} = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}[\mathcal{C}^{k+\alpha}, \mathcal{C}^{k+\beta}]_\theta$ маємо $x_k = A^k x \in (\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}\bigcap[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$. Розглянемо простори

$$\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q} = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty : \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}} < \infty\right\},$$
$$\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta = \left\{x \in \mathcal{C}^\infty : \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta} < \infty\right\}$$

з нормами, відповідно, вигляду $\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}}\right)^{1/q}$ та $\|x\|_{\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nu^{-kq}\|x_k\|^q_{[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}\right)^{1/q}$.

При $\alpha = 0$ простір $\mathcal{E}^\nu_\infty(X)$ складається з так званих векторів експоненціального типу ν оператора A, введених у праці [2]. Тому елементи з $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha)$, $\mathcal{E}^\nu_{p,q}(\mathcal{C}^\alpha)$, $\mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$, $\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta$ розширюють клас векторів такого типу. Далі ми їх також називаємо векторами експоненціального типу ν оператора A.

Наступна теорема встановлює топологічні ізоморфізми для дійсної та комплексної інтерполяційних шкал введених просторів, рівність просторів розуміється з точністю до еквівалентності норм, що позначається символом $\sim$.

Теорема 1. *Нехай* $0 < \theta < 1$, $\beta > \alpha \geq 0$, $1 \leq q \leq \infty$. *Тоді*

$$\left(\mathcal{E}^\nu_1(\mathcal{C}^\alpha), \mathcal{E}^\nu_\infty(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,q} = \mathcal{E}^\nu_{\frac{1}{1-\theta},q}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{1}$$
$$\mathcal{E}^\nu_q[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta = \mathcal{E}^\nu_q(\mathcal{C}^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}). \tag{2}$$

Якщо $0 < \nu_0, \nu_1 < \infty$, $(\nu_0 \neq \nu_1)$ *і* $1 \le q_0, q_1 \le \infty$ *довільні, то при* $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$

$$\left(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right)_{\theta,q} = \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{3}$$

а при $1 \le q_0, q_1 < \infty$ *таких, що* $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$

$$\left(\mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\right)_{\theta,q} = \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}, \tag{4}$$

$$\left[\mathcal{E}_{q_0}^{\nu_0}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu_1}(\mathcal{C}^\alpha)\right]_{\theta} = \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha), \tag{5}$$

$$\left[\mathcal{E}_{q_0}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha),\, \mathcal{E}_{q_1}^{\nu}(\mathcal{C}^\beta)\right]_{\theta} = \mathcal{E}_q^{\nu}[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_{\theta}. \tag{6}$$

Простори $\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$, $\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$, $\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$, $\mathcal{E}_q^{\nu}[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_{\theta}$ *банахові.*

Доведення. Почнемо з доведення повноти $\mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$. Нехай y_n – послідовність Коші в $\mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$, тоді такими самими є послідовності y_n та $A^k y_n$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$ в $\mathcal{C}^\alpha$, внаслідок неперервності вкладення $\mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha) \hookrightarrow \mathcal{C}^\alpha$. Оператор A як додатний має непорожню резольвентну множину. Тому згідно з [3] $\mathcal{C}^\infty$ щільний в X і як наслідок щільний в $\mathcal{C}^\alpha$. Тому [4, теорема VII.9.7] оператори A^k замкнені над $\mathcal{C}^\alpha$. Із замкненості A^k та повноти $\mathcal{C}^\alpha$ випливає існування таких $x, y \in \mathcal{C}^\alpha$, що $y_n \to x$ і $A^k y_n \to y$ за нормою $\mathcal{C}^\alpha$ та $y = A^k x$ для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$. Тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ таке, що $\nu^{-k}\|A^k y_n\| \le \nu^{-k}\|A^k y_{n_\varepsilon}\| + \nu^{-k}\|A^k y_n - A^k y_{n_\varepsilon}\| \le \nu^{-k}\|A^k y_{n_\varepsilon}\| + \varepsilon/2^{k+1}$ для всіх $n \ge n_\varepsilon$ та $k \in \mathbb{Z}_+$. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо $\nu^{-k}\|A^k x\| \le \nu^{-k}\|A^k y_{n_\varepsilon}\| + \varepsilon/2^{k+1}$ при $n \ge n_\varepsilon$. Отже, $\|x\|_{\mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)} \le \|y_{n_\varepsilon}\|_{\mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)} + \varepsilon$ і тому $x \in \mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$ та $y_n \to x$ за нормою $\mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$. Повнота $\mathcal{E}_1^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$ встановлена. Повноту простору $\mathcal{E}_\infty^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$ доводимо аналогічно.

За побудовою простір $\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$, $(q = 1, \infty)$ ізометричний простору послідовностей $l_q^{\nu,\alpha} = \{x_\nu := (\nu^{-k}x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)\}$ з нормою $\|x_\nu\|_{l_q^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)}$. Як наслідок $l_q^{\nu,\alpha}$ банахів. Відповідно, простір $\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$, $(1 \le q \le \infty,\ 1 < p < \infty)$ ізометричний простору послідовностей $l_{p,q}^{\nu,\alpha} = \{x_\nu := (\nu^{-k}x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)\}$ з нормою $\|x_\nu\|_{l_{p,q}^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)}$. Далі використовуємо обчислення доведення [1, теорема 1, §1.18.3], з яких випливають рівності $\mathcal{K}(t, x_\nu, l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha}) = t\|x_{0,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ при $0 \le t \le 1$ та $\mathcal{K}(j, x_\nu, l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha}) = \sum_{k=0}^{j-1}\|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ при $j \in \mathbb{N}$. Підставляючи ці вирази для функціонала $\mathcal{K}$ у формули для норм при $q < \infty$, отримуємо $\|x_\nu\|^q_{(l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha})_{\theta,q}} \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-\theta q-1}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right)^q \ge \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{q(1-\theta)-1}\|x_{k-1,\nu}^*\|^q_{\mathcal{C}^\alpha} \sim \|x_\nu\|^q_{l_{p,q}^{\nu,\alpha}}$ та $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-\theta q-1}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\|x_{k,\nu}^*\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right)^q \le c\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{q(1-\theta)-1}\|x_{k-1,\nu}^*\|^q_{\mathcal{C}^\alpha}$ для деякої сталої $c > 0$, звідки випливає рівність $(l_1^{\nu,\alpha}, l_\infty^{\nu,\alpha})_{\theta,q} = l^{\nu,\alpha}_{\frac{1}{1-\theta},q}$ еквівалентна (1). Випадок $q = \infty$ розглядаємо аналогічно. Як наслідок, з цих ізоморфізмів випливає, що простори $\mathcal{E}_{p,q}^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha) = l_{p,q}^{\nu,\alpha}$ будучи інтерполяційними для пари банахових $l_1^{\nu,\alpha}$, $l_\infty^{\nu,\alpha}$ також банахові.

Згідно з теоремою [1, 1.15.3] при $0 \le \alpha < \beta$ виконується рівність $\left[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta\right]_\theta = \mathcal{C}^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}$, де $\mathcal{C}^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}$ – область визначення оператора $A^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}$. Звідси відразу отримуємо (2).

Простір $\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)$ ізометричний простору послідовностей вигляду $l_q^{\nu,\alpha} = \{\overline{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)\}$ з нормою $\|\overline{x}\|_{l_q^{\nu,\alpha}} = \|x\|_{\mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha)}$. Оскільки $l_q^{\nu,\alpha} = \mathcal{E}_q^{\nu}(\mathcal{C}^\alpha) =$

$\mathcal{E}^{\nu}_{q,q}(\mathcal{C}^{\alpha}) = l^{\nu,\alpha}_{q,q}$ та $\|\overline{x}\|_{l^{\nu,\alpha}_q} = \|x_\nu\|_{l^{\nu,\alpha}_{q,q}}$, зокрема $\|\overline{x}\|_{l^{\nu,\alpha}_q} = \|x_\nu\|_{l^{\nu,\alpha}_q}$ при $q = 1, \infty$, то можемо використати повноту просторів $l^{\nu,\alpha}_q$. Зробимо заміну $\nu = 2^{-\sigma}$, за якої умова $\nu = \nu_0^{1-\theta}\nu_1^{\theta}$ переходить у рівність $\sigma = (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1$. Використовуємо обчислення з доведення [1, теорема §1.18.2]. Звідки $\mathcal{K}(t, \overline{x}, l^{\nu_0,\alpha}_{\infty}, l^{\nu_1,\alpha}_{\infty}) \sim \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}$ при $q_0 = q_1 = \infty$ та $\mathcal{K}(t, \overline{x}, l^{\nu_0,\alpha}_1, l^{\nu_1,\alpha}_1) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}}\min(2^{k\sigma_0}, t2^{k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}$ при $q_0 = q_1 = 1$. Нехай $\overline{x} \in (l^{\nu_0,\alpha}_{\infty}, l^{\nu_1,\alpha}_{\infty})_{\theta,q}$ і без обмеження загальності $\sigma_0 > \sigma_1$. Підставляючи вирази для $\mathcal{K}$ у формули для норм з точністю до деякої сталої $c > 0$, одержуємо

$$\|\overline{x}\|^q_{(l^{\nu_0,\alpha}_{\infty}, l^{\nu_1,\alpha}_{\infty})_{\theta,q}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta q j(\sigma_0-\sigma_1)} \sup_k \left[\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}\right]^q \geq$$

$$\geq \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{qj[\sigma_0(1-\theta)+\sigma_1\theta]}\|x_j\|^q_{\mathcal{C}^{\alpha}} = c\|\overline{x}\|^q_{l^{\nu,\alpha}_q}.$$

Отже, правильне неперервне вкладення $(l^{\nu_0,\alpha}_{\infty}, l^{\nu_1,\alpha}_{\infty})_{\theta,q} \hookrightarrow l^{\nu,\alpha}_q$. Якщо $\overline{x} \in l^{\nu,\alpha}_q$, то з використанням нерівності Гельдера

$$\|\overline{x}\|^q_{(l^{\nu_0,\alpha}_1, l^{\nu_1,\alpha}_1)_{\theta,q}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\theta q j(\sigma_0-\sigma_1)}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\min(2^{k\sigma_0}, 2^{j(\sigma_0-\sigma_1)+k\sigma_1})\|x_k\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}\Big]^q \leq$$

$$\leq c\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k\sigma q}\|x_k\|^q_{\mathcal{C}^{\alpha}} = c\|\overline{x}\|^q_{l^{\nu,\alpha}_q}$$

для деякої $c > 0$. Тому правильне неперервне вкладення $l^{\nu,\alpha}_q \hookrightarrow (l^{\nu_0,\alpha}_1, l^{\nu_1,\alpha}_1)_{\theta,q}$. З рівності (1) при $1 < q = (1-\theta)^{-1} < \infty$ маємо $(l^{\nu,\alpha}_1, l^{\nu,\alpha}_{\infty})_{\theta,q} = l^{\nu,\alpha}_q$, тому $l^{\nu,\alpha}_1 \hookrightarrow l^{\nu,\alpha}_q \hookrightarrow l^{\nu,\alpha}_{\infty}$ при $1 \leq q \leq \infty$, де неперервність вкладень випливає з теореми про еквівалентність [5, теорема 3.3.1]. З властивостей інтерполяційних просторів отримуємо $(l^{\nu_0,\alpha}_1, l^{\nu_1,\alpha}_1)_{\theta,q} \hookrightarrow (l^{\nu_0,\alpha}_{q_0}, l^{\nu_1,\alpha}_{q_1})_{\theta,q} \hookrightarrow (l^{\nu_0,\alpha}_{\infty}, l^{\nu_1,\alpha}_{\infty})_{\theta,q}$ при $1 \leq q, q_0, q_1 \leq \infty$. У результаті маємо $l^{\nu,\alpha}_q \hookrightarrow (l^{\nu_0,\alpha}_{q_0}, l^{\nu_1,\alpha}_{q_1})_{\theta,q} \hookrightarrow l^{\nu,\alpha}_q$ і рівність (3) доведена.

Згідно з означенням простір $\mathcal{E}^{\nu}_q(\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}$ ізометричний простору послідовностей $l^{\nu,(\alpha,\beta)}_{q,\theta} = \{\overline{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}^{\nu}_q(\mathcal{C}^{\alpha}, \mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}\}$ з нормою $\|\overline{x}\|_{l^{\nu,(\alpha,\beta)}_{q,\theta}} = \|x\|_{\mathcal{E}^{\nu}_q(\mathcal{C}^{\alpha},\mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}}$. Далі $2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha}$ – простір $\mathcal{C}^{\alpha}$ з нормою $\|y^{\alpha}\|_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha}} = 2^{k\sigma}\|y^{\alpha}\|_{\mathcal{C}^{\alpha}}$, де $\nu = 2^{-\sigma}$, $y^{\alpha} \in \mathcal{C}^{\alpha}$. При $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ з [1, теорема 1.4.2] випливає, що на просторі $2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha} + 2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\beta}$ такі норми еквівалентні $\mathcal{K}(t, y, 2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha}, 2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\beta}) \sim \inf_{y=y^{\alpha}+y^{\beta}}\left(\|y^{\alpha}\|^{q_0}_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha}} + t\|y^{\beta}\|^{q_1}_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\beta}}\right)$, $0 < t < \infty$. Із зазначеної еквівалентності норм для фінітних послідовностей вигляду $\overline{x}_N = (x_k)$, де $x_k = 0$ при $k > N$, отримуємо

$$\|\overline{x}_N\|^q_{(l^{\nu,\alpha}_{q_0}, l^{\nu,\alpha}_{q_1})_{\theta,q}} \sim \int_0^{\infty} t^{-\eta-1} \inf_{x_k=x_k^{\alpha}+x_k^{\beta}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\|x_k^{\alpha}\|^{q_0}_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha}} + t\|x_k^{\beta}\|^{q_1}_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\beta}}\right)dt =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\int_0^{\infty} t^{-\eta-1} \inf_{x_k=x_k^{\alpha}+x_k^{\beta}}\left(\|x_k^{\alpha}\|^{q_0}_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha}} + t\|x_k^{\beta}\|^{q_1}_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\beta}}\right)dt \sim$$

$$\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\|x_k\|^q_{(2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\alpha}, 2^{k\sigma}\mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} 2^{k\sigma q}\|x_k\|^q_{(\mathcal{C}^{\alpha},\mathcal{C}^{\beta})_{\theta,q}} = \|\overline{x}_N\|^q_{l^{\nu,(\alpha,\beta)}_{q,\theta}}.$$

Враховуючи щільність множини фінітних послідовностей, маємо $\left(l_{q_0}^{\nu,\alpha}, l_{q_1}^{\nu,\alpha}\right)_{\theta,q} = l_{q,\theta}^{\nu,(\alpha,\beta)}$ і рівність (4) доведена, зокрема $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta)_{\theta,q}$ банахів.

Враховуючи доведення [1, теорема 1.18.1], для чисел $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ приймаємо

$$f(z) := \left(f_k(z) \left(\|\overline{x}_N\|^{-1}_{l_q^{\nu,\alpha}} \|x_k\|_{[2^{k\sigma_0}\mathcal{C}^\alpha, 2^{k\sigma_1}\mathcal{C}^\alpha]_\theta} \right)^{\left(\frac{q}{q_1}-\frac{q}{q_0}\right)(z-\theta)} \right)_{k\in\mathbb{Z}_+},$$

де функція $f_k(z) \in \mathcal{F}(2^{k\sigma_0}\mathcal{C}^\alpha, 2^{k\sigma_1}\mathcal{C}^\alpha)$ така, що $f_k(z) = 0$ при $k > N$, $f_k(\theta) = x_k$ при $k = 0,\dots,N$; $\|f_k(it)\|_{2^{k\sigma_0}\mathcal{C}^\alpha}, \|f_k(1+it)\|_{2^{k\sigma_1}\mathcal{C}^\alpha} \le \|x_k\|_{[2^{k\sigma_0}\mathcal{C}^\alpha, 2^{k\sigma_1}\mathcal{C}^\alpha]_\theta} + \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, $-\infty < t < \infty$. Звідси для $\kappa = 0, 1$ отримуємо

$$\|f(\kappa+it)\|_{l_{q_\kappa}^{\nu_\kappa,\alpha}} = \|\overline{x}_N\|_{l_q^{\nu,\alpha}}^{(\kappa-\theta)\left(\frac{q}{q_0}-\frac{q}{q_1}\right)} \times$$

$$\times \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|f_k(\kappa+it)\|^{q_\kappa}_{2^{k\sigma_\kappa}\mathcal{C}^\alpha} \|x_k\|^{q_\kappa(\kappa-\theta)\left(\frac{q}{q_1}-\frac{q}{q_0}\right)}_{[2^{k\sigma_0}\mathcal{C}^\alpha, 2^{k\sigma_1}\mathcal{C}^\alpha]_\theta} \Big)^{\frac{1}{q_\kappa}} \le \|\overline{x}_N\|_{l_q^{\nu,\alpha}} + \varepsilon$$

або беручи нижню грань $\|\overline{x}_N\|_{\left[l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\right]_\theta} \le \|\overline{x}_N\|_{l_q^{\nu,\alpha}}$. Доведення протилежної нерівності $\|\overline{x}_N\|_{l_q^{\nu,\alpha}} \le \|\overline{x}_N\|_{\left[l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\right]_\theta}$ опирається на нерівність Гельдера аналогічно до відповідних міркувань з [1, теорема 1.18.1]. Враховуючи щільність множини фінітних послідовностей, отримуємо ізометричну рівність $l_q^{\nu,\alpha} = \left[l_{q_0}^{\nu_0,\alpha}, l_{q_1}^{\nu_1,\alpha}\right]_\theta$ і (5) доведено.

За означенням простір $\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta$ ізометричний простору послідовностей $l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]} = \left\{\overline{x} := (x_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} : x \in \mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta\right\}$ з нормою $\|\overline{x}\|_{l_{q,\theta}^{\nu,[\alpha,\beta]}} = \|x\|_{\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta}$. Рівність (6) доводимо подібно. Замість $f(z)$ треба взяти функцію вигляду

$$f(z) = \left(f_k(z) \left(\|\overline{x}_N\|^{-1}_{l_q^{\nu,[\alpha,\beta]}} \|x_k\|_{[2^{k\sigma}\mathcal{C}^\alpha, 2^{k\sigma}\mathcal{C}^\beta]_\theta} \right)^{\left(\frac{q}{q_1}-\frac{q}{q_0}\right)(z-\theta)} \right)_{k\in\mathbb{Z}_+},$$

де функція $f_k(z) \in \mathcal{F}(2^{k\sigma}\mathcal{C}^\alpha, 2^{k\sigma}\mathcal{C}^\beta)$ така, що $f_k(z) = 0$ при $k > N$, $f_k(\theta) = x_k$ при $k = 0,\dots,N$; $\|f_k(it)\|_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^\alpha}, \|f_k(1+it)\|_{2^{k\sigma}\mathcal{C}^\beta} \le \|x_k\|_{[2^{k\sigma}\mathcal{C}^\alpha, 2^{k\sigma}\mathcal{C}^\beta]_\theta} + \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$, $-\infty < t < \infty$. З (6) випливає, що $\mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha,\mathcal{C}^\beta]_\theta$ банахів.

3. Вектори експоненціального типу еліптичних операторів. Як приклад опишемо вектори експоненціального типу регулярних еліптичних операторів в обмеженій області. Використаємо означення прийнятих в [1]. Розглянемо у просторі $X = L_r(\Omega)$, $(1 < r < \infty)$ над обмеженою областю $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ класу C^∞ з границею $\partial\Omega$ регулярно еліптичний оператор порядку $2m$

$$A : \mathcal{C}^1 \ni u \longmapsto \sum\nolimits_{|\gamma|\le 2m} a_\gamma D^\gamma u \in L_r(\Omega), \qquad a_\gamma \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$
$$\mathcal{C}^1 := \left\{u \in W_r^{2m}(\Omega) : B_j u(t)\,|_{\partial\Omega} = 0; \quad j = 1,\dots,m\right\},$$

де $W_r^{2m}(\Omega)$ – простір Соболєва, $B_j = \sum_{|\gamma|\le k_j} b_{j,\gamma} D^\gamma$, $b_{j,\gamma} \in C^\infty(\partial\Omega)$, $(0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_m)$ – набір граничних операторів, D^γ – оператор диференціювання порядку $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$. Відомо [1, § 5.4.3], що для достатньо великих додатних $\rho > 0$ оператор

$A+\rho$ позитивний і має дискретний спектр $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ і кореневі підпростори $\mathcal{R}(\lambda_n) \subset L_r(\Omega)$ власного числа $\lambda_n \in \mathbb{C}$ скінчено вимірні. Далі $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\mathcal{R}(\lambda_n)$ означає комплексну лінійну алгебричну оболонку векторів. Оскільки простори векторів експоненціального типу операторів A і $A+\rho$ збігаються [6], то без обмеження загальності надалі вважаємо, що A – позитивний оператор.

Теорема 2. *Для будь-яких чисел $\beta > \alpha \geq 0$, $1 \leq q < \infty$, $0 < \theta < 1$ виконуються рівності*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q} &= \mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta = \\ &= \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}_n : |\lambda_n| < \min\left(\nu^{\frac{1}{a+1}}, \nu^{\frac{1}{b+1}}, \nu^{\frac{1}{a'+1}}, \nu^{\frac{1}{b'+1}}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\mathcal{E}_q(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q} = \mathcal{E}_q[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta = \mathcal{R}(A) \tag{8}$$

де $\alpha = a(1-\theta)+b\theta$, $\beta = a'(1-\theta)+b'\theta$ для відповідних $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$. Якщо коефіцієнти рівняння сталі, то правильна рівність

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q(\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta)_{\theta,q} &= \mathcal{E}_q[\mathcal{C}^\alpha, \mathcal{C}^\beta]_\theta \\ &= \left\{u \in \exp(\mathbb{C}^n)\,|_\Omega\colon B_j A^k u\,|_{\partial\Omega} = 0;\ j = 1,\ldots,m;\ k \in \mathbb{Z}_+\right\}, \end{aligned}$$

де $\exp(\mathbb{C}^n)$ – простір всіх цілих аналітичних функцій експоненціального типу над $\mathbb{C}^n$.

Доведення. Згідно з [6, теорема 1] для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^k) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}(\lambda_n) : |\lambda_n|^{k+1} < \nu\right\}$ і остання рівність не залежить від числа $1 \leq q < \infty$. З цієї рівності, теореми 1 та скінчено вимірності кореневих підпросторів отримуємо $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\alpha) = \mathcal{E}_q^\nu[\mathcal{C}^a, \mathcal{C}^b]_\theta = \left[\mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^a), \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^b)\right]_\theta = \mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^a) \bigcap \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^b) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}(\lambda_n) : |\lambda_n| < \min\left(\nu^{\frac{1}{a+1}}, \nu^{\frac{1}{b+1}}\right)\right\}$ і аналогічно $\mathcal{E}_q^\nu(\mathcal{C}^\beta) = \mathcal{E}_{q_0}^\nu(\mathcal{C}^{a'}) \bigcap \mathcal{E}_{q_1}^\nu(\mathcal{C}^{b'}) = \operatorname{span}\left\{\mathcal{R}(\lambda_n) : |\lambda_n| < \min\left(\nu^{\frac{1}{a'+1}}, \nu^{\frac{1}{b'+1}}\right)\right\}$, де $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$. Використовуючи знову теорему 1, врахувавши попередні рівності, приходимо до (7). Об'єднуючи по всіх $\nu > 0$, отримуємо рівності (8).

Далі припустимо, що коефіцієнти рівняння a_γ – сталі. У [6] довели рівність $\mathcal{E}_q(\mathcal{C}^k) = \left\{u \in \exp(\mathbb{C}^n)\,|_\Omega\colon B_j A^l u\,|_{\partial\Omega} = 0;\quad j = 1,\ldots,m;\ l = 0,1,\ldots,k\right\}$, де $k \in \mathbb{N}$. Залишилось застосувати результати попередніх обчислень.

---

1. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Berlin: Springer, 1995.

2. *Радыно Я.В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, №9. – С. 1559–1569.

3. *Горбачук В.И., Князюк А.В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи матем. наук. – 1989. – Т. 44, №3. – С. 55–91.

4. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear operator. Part I: General theory. Intersci. Publishers, New York, London, 1958.

5. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

6. *Lopushansky O. V., Dmytryshyn M. I.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum // Математичні студії. Праці Львів. матем. т-ва. – 1998. – Т. 9, №1. – С. 70–77.

AN INTERPOLATION OF EXPONENTIAL TYPE VECTORS, THE COMPLEX METHOD

Maryan Dmytryshyn[1], Oleh Lopyshanskyi[2]

[1] *Vasyl' Stefanyk National Prykarpatskyi University,*
Shevchenko Str., 57, 76025 Ivano-Frankivsk, Ukraine,
[2] *Institute of Mathematics Rzeszow University,*
Rejtana str., 16 Rzeszow, Poland

The intermediate spaces, generated by complex method of interpolation of subspaces of exponential type vectors of linear operators are described.

Key words: interpolation of positive operators, fractional power of operators, exponential type vectors.

Стаття надійшла до редколегії 11.03.2004

Прийнята до друку 19.10.2005