ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.107–120 *Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.107–120*

УДК 517.925.51

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

В'ячеслав ЄВТУХОВ, Анжела СТЕХУН

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2 65026 Одеса, Україна

Визначено необхідні та достатні умови існування, асимптотичні зображення деяких типів необмежених розв'язків одного класу нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку.

Ключові слова: нелінійне неавтономне рівняння, неколивні розв'язки, асимптотичне поводження.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leqslant +\infty)$ – неперервна функція, $\varphi : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\lim_{y\to+\infty}\varphi(y) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } +\infty, \end{cases} \quad \varphi'(y) \neq 0, \quad \lim_{y\to+\infty}\frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma = \text{const} \neq 0. \tag{2}$$

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-розв'язком, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє такі три умови:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty \end{cases} \quad (k = 1, 2), \tag{3}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{[y''(t)]^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0. \tag{4}$$

Частинним випадком (1) є рівняння типу Емдена-Фаулера

$$y''' = \alpha_0 p(t) y^{\sigma+1} \quad (\sigma \neq 0).$$

Асимптотичне поводження його $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-розв'язків досліджено в [1 - 4] (див. також монографію [5] і працю [6]). Питання про поширення отриманих тут результатів на рівняння вигляду (1) було сформульовано в [7]. У [7] встановили необхідні та достатні умови існування, а також асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-розв'язків рівняння (1), для яких $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Мета нашої праці – розглянути особливі типи $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-розв'язків рівняння (1), які відповідають значенням $\lambda_0 = 1$ і $\lambda_0 = \frac{1}{2}$.

1. Приймемо

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad \Phi(y) = \int_B^y \frac{dz}{\varphi(z)},$$

$$I_1(t) = \int_{A_1}^t p(\tau)\, d\tau, \quad I_k(t) = \int_{A_k}^t I_{k-1}(\tau)\, d\tau \quad (k = 2, 3), \quad I_4(t) = \int_{A_1}^t \pi_\omega^2(\tau) p(\tau)\, d\tau,$$

де границі інтегрування B і A_k $(k = 1, \dots, 4)$ визначаються так:

$$B = \begin{cases} y_0, & \text{якщо } \sigma < 0, \\ +\infty, & \text{якщо } \sigma > 0, \end{cases} \qquad A_1 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega p(\tau)\, d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$A_k = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega |I_{k-1}(\tau)|\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega |I_{k-1}(\tau)|\, d\tau < +\infty \end{cases} \quad (k = 2, 3),$$

$$A_4 = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^\omega \pi_\omega^2(\tau) p(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо } \int_a^\omega \pi_\omega^2(\tau) p(\tau)\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Зазначимо також, що згідно з умовами (2)

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y \varphi'(y)}{\varphi(y)} = 1 + \sigma. \tag{5}$$

Тому, застосовуючи правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\Phi(y)}{\frac{y}{\varphi(y)}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{1}{\varphi(y)}}{\frac{1}{\varphi(y)} \left[1 - \frac{y \varphi'(y)}{\varphi(y)}\right]} = -\frac{1}{\sigma},$$

тобто

$$\Phi(y) = -\frac{1}{\sigma} \frac{y}{\varphi(y)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to +\infty. \tag{6}$$

Теорема 1. *Для існування у рівняння* (1) $P_{\omega 1}(1)$*-розв'язків необхідно, якщо* $\sigma \neq -9$, *то і достатньо, щоб*

$$\alpha_0 = 1, \quad \sigma I_1(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{p(t) I_2(t)}{I_1^2(t)} = 1. \tag{7}$$

Для кожного такого розв'язку правильні при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = -\sigma^3 I_3(t)[1 + o(1)], \tag{8}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{\sigma} \frac{I_2(t)}{I_3(t)}[1 + o(1)], \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\frac{1}{\sigma} \frac{I_1(t)}{I_2(t)}[1 + o(1)]. \tag{9}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow [y_0, +\infty[$, де $t_0 \in [a, \omega[$ – довільний $P_{\omega 1}(1)$-розв'язок рівняння (1). Тоді з урахуванням нерівностей $\varphi(y) > 0$ при $y \geq y_0$, $p(t) > 0$ при $t \in [a, \omega[$ з (1) випливає, що $\operatorname{sign} y'''(t) = \alpha_0$ при $t \in [t_0, \omega[$. Крім того, використовуючи умови означення $P_{\omega 1}(1)$ - розв'язку і тотожність

$$\left(\frac{[y'(t)]^2}{y''(t) y(t)} \right)' = \frac{y'(t)}{y(t)} \left[2 - \frac{y'(t) y'''(t)}{[y''(t)]^2} - \frac{[y'(t)]^2}{y''(t) y(t)} \right]$$

одержимо

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{y'(t)}{y(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{10}$$

Оскільки тут $y(t) > 0$ і $y'(t) > 0$ у деякому лівому околі ω, то виконуватиметься нерівність $y'''(t) > 0$ при $t \in [t_0, \omega[$, згідно з якою $\alpha_0 = 1$.

Враховуючи умову (5) і асимптотичні співвідношення (10), знаходимо

$$\left(\frac{y''(t)}{\varphi(y(t))} \right)' = \frac{y'''(t)}{\varphi(y(t))} \left[1 - \frac{y''(t) y'(t)}{y'''(t) y(t)} \cdot \frac{y(t) \varphi'(y(t))}{\varphi(y(t))} \right] \sim -\sigma \frac{y'''(t)}{\varphi(y(t))} \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

тому згідно з (1) матимемо

$$\left(\frac{y''(t)}{\varphi(y(t))} \right)' = -\sigma p(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Інтегруючи це співвідношеня на проміжку від t_0 до t, отримуємо

$$\frac{y''(t)}{\varphi(y(t))} = C - \sigma I_1(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{11}$$

де C – деяка стала.

Покажемо таке: якщо в I_1 границя інтегрування A_1 дорівнює ω, то $C = 0$. Припустимо супротивне, що у цьому випадку $C \neq 0$. Тоді з (11) одержимо

$$\varphi(y(t)) \sim \frac{1}{C} y''(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

тому, враховуючи (1), будемо мати

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} \sim \frac{1}{C}p(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

звідки отримуємо, що

$$\ln|y''(t)| = C_1 + \frac{1}{C}I_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де C_1 – деяка стала. Цього не може бути, оскільки вираз, який стоїть ліворуч, згідно з означенням $P_{\omega 1}(1)$-розв'язку прямує до $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, а праворуч – має скінчену границю.

Отож, у кожному з двох можливих випадків $A_1 = \omega$ або $A_1 = a$ співвідношення (11) можна записати у вигляді

$$\frac{y''(t)}{\varphi(y(t))} = -\sigma I_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{12}$$

Звідси з урахуванням нерівності $y''(t) > 0$, що виконується на підставі (10) у деякому лівому околі ω, одержуємо другу з умов (7).

З використанням умов (5) і (10) знаходимо, що

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))}\right)' = \frac{y''(t)}{\varphi(y(t))}\left[1 - \frac{[y'(t)]^2}{y''(t)y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi'(y(t))}{\varphi(y(t))}\right] \sim -\sigma\frac{y''(t)}{\varphi(y(t))} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Це співвідношення дає підстави (12) переписати у вигляді

$$\left(\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))}\right)' = \sigma^2 I_1(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

тому після інтегрування матимемо

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = C + \sigma^2 I_2(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

де C – деяка стала. Так само як і вище, доводимо, що стала C може набувати лише такі значення, за яких правильне асимптотичне зображення

$$\frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} = \sigma^2 I_2(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{13}$$

З (1), (12) і (13) згідно з умовою (4), де $\lambda_0 = 1$, випливає третя з умов (7).

Далі, повторюючи описаний підхід, одержуємо також асимптотичне зображення вигляду (8).

Правильність зображень (9) безпосередньо випливає з (8), (12) і (13).

Достатність. Нехай виконуються умови (7) і $\sigma \neq -9$. Покажемо, що у цьому випадку у рівнянні (1) існують $P_{\omega 1}(1)$-розв'язки, які допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (8) і (9).

Спочатку опишемо деякі властивості інтегралів I_k $(k = 1, 2, 3)$. Використовуючи очевидну рівність

$$\left(\frac{I_2^2(t)}{I_1(t)I_3(t)}\right)' = \frac{I_2(t)}{I_3(t)}\left[2 - \frac{p(t)I_2(t)}{I_1^2(t)} - \frac{I_2^2(t)}{I_1(t)I_3(t)}\right],$$

і третю з умов (7), неважко довести, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_2^2(t)}{I_1(t)I_3(t)} = 1. \tag{14}$$

Врахувавши другу і третю умови (7), а також правила вибору границь інтегрування A_k $(k = 1, 2, 3)$, маємо

$$A_k = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \sigma < 0, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \sigma > 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3)$$

і тому

$$\lim_{t\uparrow\omega} I_k(t) = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \sigma < 0, \\ 0 & \text{при} \quad \sigma > 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Далі зазначимо, що для функції $\Phi : [y_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ існує обернена функція Φ^{-1}, яка визначена на проміжку $[0, +\infty[$ при $\sigma < 0$ і на проміжку $[c_0, 0[$, де $c_0 = -\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi(z)}$, при $\sigma > 0$, причому обидві задовольняють умови

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to+\infty} \Phi(y) = +\infty, \qquad \lim_{z\to+\infty} \Phi^{-1}(z) = +\infty \qquad \text{при} \quad \sigma < 0, \\ &\lim_{y\to+\infty} \Phi(y) = 0, \qquad \lim_{z\uparrow 0} \Phi^{-1}(z) = +\infty \qquad \text{при} \quad \sigma > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Тепер рівняння (1) за допомогою перетворення

$$\begin{aligned} &\Phi(y(t)) = \sigma^2 I_3(t)[1 + v_1(x)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{\sigma}\frac{I_2(t)}{I_3(t)}[1 + v_2(x)], \\ &\frac{y''(t)}{y'(t)} = -\frac{1}{\sigma}\frac{I_1(t)}{I_2(t)}[1 + v_3(x)], \quad x = \beta \ln |I_3(t)|, \end{aligned} \tag{17}$$

де

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \sigma < 0, \\ -1, & \text{якщо} \quad \sigma > 0, \end{cases}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = \beta\left[-1 - v_1 - \frac{1}{\sigma^3} R(x, v_1, v_2)\right], \\ v_2' = \beta(1 + v_2)\left[1 - h_1(x) + \frac{1}{\sigma}(1 + v_2) - \frac{1}{\sigma} h_1(x)(1 + v_3)\right], \\ v_3' = \beta h_1(x)\left[(1 - h_2(x))(1 + v_3) + \frac{1}{\sigma}(1 + v_3)^2 + \sigma^2 \frac{h_2(x)}{R(x, v_1, v_2)}\right], \end{cases} \tag{18}$$

в якій

$$h_1(x) = \frac{I_1(t)I_3(t)}{I_2^2(t)}, \quad h_2(x) = \frac{p(t)I_2(t)}{I_1^2(t)}, \quad R(x,v_1,v_2) = \frac{Y(t,v_1)(1+v_2)}{\varphi(Y(t,v_1))I_3(t)},$$

$$Y(t,v_1) = \Phi^{-1}\left(\sigma^2 I_3(t)(1+v_1)\right)$$

і $t = t(x)$ - функція, обернена до $x = \beta \ln |I_3(t)|$.

Оскільки згідно з (15) і вибору β

$$x'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a,\omega[\quad i \quad \lim_{t\uparrow\omega} x(t) = +\infty,$$

то на підставі (14), третьої з умов (7) та (16) одержуємо

$$\lim_{x\to+\infty} h_1(x) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_1(t)I_3(t)}{I_2^2(t)} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} h_2(x) = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{p(t)I_2(t)}{I_1^2(t)} = 1, \tag{19}$$

$$\lim_{x\to+\infty} Y(t(x),v_1) = +\infty \quad \text{при будь-якому} \quad v_1 \in]-1,1[. \tag{20}$$

Враховуючи властивості функції Φ^{-1} і умову (20) підберемо число $t_0 \in]a,\omega[$ так, щоб на множині

$$\Omega = [t_0,\omega[\times D_1, \quad \text{де} \quad D_1 = \left\{v_1 \in \mathbb{R} : |v_1| \le \frac{1}{2}\right\}$$

функція Y була визначеною, додатною і задовольняла нерівність $Y(t,v_1) \ge y_0$. На цій множині функції $\frac{Y(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))}$ і $\frac{\varphi(Y(t,v_1))}{Y(t,v_1)}$ неперервні й мають неперервні частинні похідні за зміною v_1 до другого порядку включно. Розкладаючи кожну з них при фіксованому $t \in [t_0,\omega[$ за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа в околі точки $v_1 = 0$ до другого порядку включно і використовуючи розвинення у ряд Тейлора функції $(1+v_2)^{-1}$, перепишемо систему диференціальних рівнянь (18) у вигляді

$$\begin{cases} v_i' = \beta\left(f_i(x) + \sum_{k=1}^{3} c_{ik}(x)v_k + V_i(x,v_1,v_2,v_3)\right), \\ i = 1,2,3, \end{cases} \tag{21}$$

де

$$f_1(x) = -1 - \frac{1}{\sigma^3}\frac{Y(t,0)}{\varphi(Y(t,0))I_3(t)}, \quad f_2(x) = \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)[1 - h_1(x)],$$

$$f_3(x) = h_1(x)\left[1 + \frac{1}{\sigma} + \left(-1 + \sigma^2\frac{\varphi(Y(t,0))I_3(t)}{Y(t,0)}\right)h_2(x)\right],$$

$$c_{11}(x) = -1 - \frac{1}{\sigma}\left[1 - \frac{Y(t,0)\varphi'(Y(t,0))}{\varphi(Y(t,0)}\right], \quad c_{12}(x) = -\frac{1}{\sigma^3}\frac{Y(t,0)}{\varphi(Y(t,0))I_3(t)},$$

$$c_{13}(x) = c_{21}(x) = 0, \quad c_{22}(x) = 1 + \frac{2}{\sigma} - \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) h_1(x), \quad c_{23}(x) = -\frac{1}{\sigma} h_1(x),$$

$$c_{31}(x) = \sigma^4 \frac{\varphi^2(Y(t,0)) I_3^2(t)}{Y^2(t,0)} \left[\frac{Y(t,0)\varphi'(Y(t,0))}{\varphi(Y(t,0))} - 1\right] h_1(x) h_2(x),$$

$$c_{32}(x) = -\sigma^2 \frac{\varphi(Y(t,0)) I_3(t)}{Y(t,0)} h_1(x) h_2(x), \quad c_{33}(x) = \left(1 + \frac{2}{\sigma} - h_2(x)\right) h_1(x),$$

$$V_1(x, v_1, v_2, v_3) = -\frac{1}{\sigma}\left[1 - \frac{Y(t,0)\varphi'(Y(t,0))}{\varphi(Y(t,0))}\right] v_1 v_2 + \frac{\sigma}{2} \frac{\varphi(Y(t,\xi_1)) I_3(t)}{Y(t,\xi_1)} \times$$

$$\times \frac{Y(t,\xi_1)\varphi'(Y(t,\xi_1))}{\varphi(Y(t,\xi_1)} \left[1 + \frac{Y(t,\xi_1)\varphi''(Y(t,\xi_1))}{\varphi'(Y(t,\xi_1))} - \frac{Y(t,\xi_1)\varphi'(Y(t,\xi_1))}{\varphi(Y(t,\xi_1)}\right] (1 + v_2) v_1^2,$$

$$V_2(x, v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{\sigma}\left[v_2 - h_1(x) v_3\right] v_2, \qquad V_3(x, v_1, v_2, v_3) = h_1(x) h_2(x) \left[\frac{v_3^2}{\sigma h_2(x)} + \right.$$

$$+\sigma^2 \frac{\varphi(Y(t,v_1)) I_3(t)}{Y(t,v_1)} \frac{v_2^2}{1 + v_2} - \sigma^4 \frac{\varphi^2(Y(t,0)) I_3^2(t)}{Y^2(t,0)} \left(\frac{Y(t,0)\varphi'(Y(t,0))}{\varphi(Y(t,0))} - 1\right) v_1 v_2 +$$

$$+ \frac{\sigma^6}{2} \frac{\varphi^3(Y(t,\xi_2)) I_3^3(t)}{Y^3(t,\xi_2)} \left(\frac{Y^2(t,\xi_2)\varphi''(Y(t,\xi_2))}{\varphi(Y(t,\xi_2))} + \frac{Y^2(t,\xi_2)\varphi'^2(Y(t,\xi_2))}{\varphi^2(Y(t,\xi_2)} - \right.$$

$$\left.\left. -3\frac{Y(t,\xi_2)\varphi'(Y(t,\xi_2))}{\varphi(Y(t,\xi_2))} - 2\right)\right] (1 - v_2) v_1^2,$$

і $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$ $(k = 1, 2)$ такі, що $|\xi_k(t, v_1)| < |v_1| \le \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2)$ при $t \in [t_0, \omega[$.

Тут згідно з (6) і (20) при будь-якому $v_1 \in D_1$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\varphi(Y(t,v_1)) I_3(t)}{Y(t,v_1)} = \frac{1}{\sigma^2(1 + v_1)} \lim_{y\to+\infty} \frac{\varphi(y)\Phi(y)}{y} = -\frac{1}{\sigma^3(1 + v_1)}.$$

Використовуючи це граничне співвідношення, а також умови (2), (5), (19) і (20) з'ясовуємо, що

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0 \ \ (k = 1, 2, 3), \quad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{13}(x) = \lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = \frac{1}{\sigma}, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{23}(x) = -\frac{1}{\sigma},$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{31}(x) = \lim_{x\to+\infty} c_{32}(x) = \frac{1}{\sigma}, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{33}(x) = \frac{2}{\sigma},$$

$$\frac{V_k(x,v_1,v_2,v_3)}{|v_1|+|v_2|+|v_3|} \longrightarrow 0 \ \ (k=1,2,3) \quad \text{при} \quad |v_1|+|v_2|+|v_3| \longrightarrow 0$$

рівномірно за $x \in [x_0, +\infty[$, де $x_0 = \beta \ln |I_3(t_0)|$.

Характеристичне рівняння $\det[C - \lambda E] = 0$ граничної матриці $C = \lim\limits_{x\to+\infty} (c_{ik}(x))_{i,k=1}^3$ має вигляд

$$\lambda^3 - \frac{3}{\sigma}\lambda^2 + \frac{3}{\sigma^2}\lambda + \frac{1}{\sigma^2} = 0, \quad \text{або} \quad \left(\lambda - \frac{1}{\sigma}\right)^3 = -\frac{1+\sigma}{\sigma^3}.$$

Оскільки $\sigma \neq 0, -9$, то це рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною.

Отже, для системи диференціальних рівнянь (21) виконано всі умови теореми 2.1 праці [8]. Згідно з цією теоремою система (21) має хоча б один розв'язок $(v_k)_{k=1}^3 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$, де $x_1 \in [x_0, +\infty[$, який зникає у $+\infty$. Йому з урахуванням перетворення (17) і умови (6) відповідає розв'язок рівняння (1), який допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (8) і (9). Використовуючи ці зображення, (1) і умови (7) неважко перевірити, що цей розв'язок належить до класу $P_{\omega 1}(1)$-розв'язків. Теорему доведено.

Теорема 2. *Для існування у рівняння* (1) $P_{\omega 1}\left(\frac{1}{2}\right)$ *– розв'язків необхідно і достатньо, щоб*

$$\alpha_0 = 1, \quad \sigma I_3(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) p(t)}{I_1(t)} = -2. \tag{22}$$

Для кожного такого розв'язку правильні при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\frac{y(t)}{\varphi(y(t))} = -\frac{\sigma}{2} I_4(t)[1+o(1)], \tag{23}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\pi_\omega^2(t)p(t)}{I_4(t)}[1+o(1)], \quad \frac{y''(t)}{y'(t)} = -\frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \tag{24}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow [y_0, +\infty[$, де $t_0 \in [a, \omega[$ – довільний $P_{\omega 1}\left(\frac{1}{2}\right)$-розв'язок рівняння (1). Використовуючи умови означення $P_{\omega 1}\left(\frac{1}{2}\right)$-розв'язку, тотожність

$$\frac{y'''(t)y'(t)}{[y''(t)]^2} = \frac{\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)'}{\left(\frac{y''(t)}{y'(t)}\right)^2} + 1$$

і правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'''(t)}{y''(t)} = -2, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = -1, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 0. \tag{25}$$

Оскільки тут $y'(t) > 0$ у деякому лівому околі ω, то виконуватиметься нерівність $y'''(t) > 0$ при $t \in [t_0, \omega[$, згідно з якою та (1) матимемо, що $\alpha_0 = 1$.

Далі так само як і при доведенні необхідності теореми 1, отримуємо такі асимптотичні співвідношення:

$$\frac{y''(t)}{\varphi(y(t))} \sim I_1(t), \quad \frac{y'(t)}{\varphi(y(t))} \sim I_2(t), \quad \frac{y(t)}{\varphi(y(t))} \sim -\sigma I_3(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{26}$$

З третього з цих співвідношень на підставі того, що $y(t) > 0$ і $\varphi(y(t)) > 0$ у деякому лівому околі ω, випливає друга з умов (22). Крім того, з (26) і (1) одержуємо асимптотичні співвідношення

$$\frac{y'''(t)}{y''(t)} \sim \frac{p(t)}{I_1(t)}, \qquad \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{I_1(t)}{I_2(t)}, \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} \sim -\frac{1}{\sigma}\frac{I_2(t)}{I_3(t)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Використовуючи їх, а також (25) і (26), доходимо висновку, що справджується третя з умов (22) і правильні при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (23) і (24).

Достатність. Нехай виконуються умови (22). Згідно з третьою з цих умов будемо також мати

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_1(t)}{I_2(t)} = -1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_2(t)}{I_3(t)} = 0. \tag{27}$$

Крім того, з (22) і (27) випливає, що

$$\begin{array}{llll} I_3(t) \uparrow 0 & \text{при} & t \uparrow \omega, & \text{якщо} \quad \sigma > 0, \\ I_3(t) \to +\infty & \text{при} & t \uparrow \omega, & \text{якщо} \quad \sigma < 0. \end{array} \tag{28}$$

Рівняння (1) за допомогою перетворення

$$\begin{gathered} \Phi(y(t)) = I_3(t)[1 + v_1(x)], \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{1}{\sigma}\frac{I_2(t)}{I_3(t)}[1 + v_2(x)], \\ \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{I_1(t)}{I_2(t)}[1 + v_3(x)], \quad x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \end{gathered} \tag{29}$$

де

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = -\beta h_1(x) \left[1 + v_1 + \dfrac{1}{\sigma} \dfrac{Y(t, v_1)}{I_3(t)\varphi(Y(t, v_1))}(1 + v_2)\right], \\[2ex] v_2' = \beta(1 + v_2) \left[\dfrac{1+\sigma}{\sigma} h_1(x) + \dfrac{1}{\sigma} h_1(x) v_2 + h_2(x) v_3\right], \\[2ex] v_3' = -\beta \left\{[h_3(x) + h_2(x)v_3](1 + v_3) + \sigma \dfrac{h_1(x) I_3(t)\varphi(Y(t, v_1))}{Y(t, v_1)(1 + v_2)}\right\}, \end{cases} \tag{30}$$

в якій

$$h_1(x(t)) = \frac{\pi_\omega(t) I_2(t)}{I_3(t)}, \quad h_2(x(t)) = \frac{\pi_\omega(t) I_1(t)}{I_2(t)}, \quad h_3(x(t)) = \frac{\pi_\omega(t) p(t)}{I_1(t)},$$

$$Y(t, v_1) = \Phi^{-1}\left(I_3(t)(1 + v_1)\right),$$

$t = t(x)$ – функція, обернена до $x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|$, Φ^{-1} – функція, обернена до Φ.

Оскільки

$$x'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[\quad \text{і} \quad \lim_{t \uparrow \omega} x(t) = +\infty,$$

то згідно з умовами (27) і третьою з умов (22)

$$\lim_{x \to +\infty} h_1(x) = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_2(t)}{I_3(t)} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} h_2(x) = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_1(t)}{I_2(t)} = -1,$$
$$\lim_{x \to +\infty} h_3(x) = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) p(t)}{I_1(t)} = -2, \tag{31}$$

причому

$$\int_{x_0}^{+\infty} h_1(x)\, dx = \beta \int_a^\omega \frac{I_2(t)\, dt}{I_3(t)} = \beta \ln|I_3(t)|\Big|_a^\omega = \pm\infty, \tag{32}$$

де $x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(a)|$. Враховуючи (28) і (16), доходимо висновку, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} Y(t, v_1) = +\infty \quad \text{при будь-якому} \quad v_1 \in]-1, 1[. \tag{33}$$

Згідно з цією умовою знайдеться число $t_0 \in [a, \omega[$ таке, що при $t \in [t_0, \omega[$ і $|v_1| \le \frac{1}{2}$ виконується нерівність $\varphi(Y(t, v_1)) \ge y_0$. Крім того, з використанням (33) і (5), застосовуючи при кожному фіксованому $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ правило Лопіталя, одержуємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_3(t)\varphi(Y(t, v_1))}{Y(t, v_1)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_3'(t)}{\left(\frac{Y(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))}\right)_t'} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_2(t)}{\frac{Y_t'(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))}\left(1 - \frac{Y(t,v_1)\varphi'(Y(t,v_1))}{\varphi(Y(t,v_1))}\right)} =$$
$$= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_2(t)}{I_2(t)(1 + v_1)\left(1 - \frac{Y(t,v_1)\varphi'(Y(t,v_1))}{\varphi(Y(t,v_1))}\right)} = -\frac{1}{\sigma(1 + v_1)}. \tag{34}$$

Розкладаючи тепер функції $\frac{Y(t,v_1)}{\varphi(Y(t,v_1))}$ і $\frac{\varphi(Y(t,v_1))}{Y(t,v_1)}$ при фіксованому $t \in [t_0, \omega[$ за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа в околі точки $v_1 = 0$ до другого порядку включно і використовуючи рівність $(1+v_2)^{-1} = 1 - v_2 + v_2^2(1+v_2)^{-1}$, перепишемо систему диференціальних рівнянь (30) у вигляді

$$\begin{cases} v_1' = -\beta h_1(x)\left[f_1(x) + \sum_{k=1}^{3} c_{1k}(x) v_k + V_1(x, v_1, v_2, v_3)\right], \\ v_i' = \beta\left[f_i(x) + \sum_{k=1}^{3} c_{ik}(x) v_k + V_i(x, v_1, v_2, v_3)\right] \quad (i = 2, 3), \end{cases} \tag{35}$$

При $\omega = +\infty$ вважаємо, що $a > 0$.

де

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma}\frac{Y(t,0)}{I_3(t)\varphi(Y(t,0))} + 1, \quad f_2(x) = \frac{1+\sigma}{\sigma}h_1(x), \quad f_3(x) = \frac{f_1(x)h_3(x)}{1-f_1(x)},$$

$$c_{11}(x) = 1 + \frac{1}{\sigma}\left[1 - \frac{Y(t,0)\varphi'(Y(t,0))}{\varphi(Y(t,0))}\right], \quad c_{12}(x) = f_1(x) - 1, \quad c_{13}(x) \equiv 0,$$

$$c_{21}(x) \equiv 0, \quad c_{22}(x) = \frac{2}{\sigma}h_1(x), \quad c_{23}(x) = h_2(x),$$

$$c_{31}(x) = \frac{h_3(x)[c_{11}(x)-1]}{[1-f_1(x)]^2}, \quad c_{32}(x) = \frac{h_3(x)}{f_1(x)-1}, \quad c_{33}(x) = -h_2(x) - h_3(x),$$

$$V_1(x,v_1,v_2,v_3) = [c_{11}(x)-1]v_1v_2 - \frac{I_3(t)\varphi'(Y(t,\xi_1))}{2\sigma}\left[1 + \frac{Y(t,\xi_1)\varphi''(Y(t,\xi_1))}{\varphi'(Y(t,\xi_1))} - \right.$$

$$\left. - \frac{Y(t,\xi_1)\varphi'(Y(t,\xi_1))}{\varphi(Y(t,\xi_1))}\right](1+v_2)v_1^2, \quad V_2(x,v_1,v_2,v_3) = h_2(x)v_2v_3 + \frac{h_1(x)}{\sigma}v_2^2,$$

$$V_3(x,v_1,v_2,v_3) = \frac{\sigma h_3(x)}{1+v_2}\left\{\left(\frac{I_3(t)\varphi(Y(t,0))}{Y(t,0)}\right)^2\left(\frac{Y(t,0)\varphi'(Y(t,0))}{\varphi(Y(t,0))} - 1\right)v_1v_2 - \right.$$

$$- \frac{I_3(t)\varphi(Y(t,0))}{Y(t,0)}v_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{I_3(t)\varphi(Y(t,\xi_2))}{Y(t,\xi_2)}\right)^3\left[\frac{Y^2(t,\xi_2)\varphi''(Y(t,\xi_2))}{\varphi(Y(t,\xi_2))} + \right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{Y(t,\xi_2)\varphi'(Y(t,\xi_2))}{\varphi(Y(t,\xi_2))}\right)^2 - 3\frac{Y(t,\xi_2)\varphi'(Y(t,\xi_2))}{\varphi(Y(t,\xi_2))} + 2\right]v_1^2\right\} - h_2(x)v_3^2,$$

і $\xi_k = \xi_k(t,v_1)$ $(k=1,2)$ такі, що $|\xi_k| < |v_1|$ $(k=1,2)$ при будь-яких $t \in [t_0,\omega[$ і $|v_1| \le \frac{1}{2}$.

Тут згідно з умовами (33), (2), (5), (31) і (34)

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0 \ (k=1,2,3), \quad \lim_{x\to+\infty} c_{1k}(x) = 0 \ (k=1,3), \tag{36}$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} c_{2k}(x) = 0 \ (k=1,2), \quad \lim_{x\to+\infty} c_{23}(x) = -1, \tag{37}$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{3k}(x) = 2 \ (k=1,2), \quad \lim_{x\to+\infty} c_{33}(x) = 3, \tag{38}$$

$$\frac{V_k(x,v_1,v_2,v_3)}{|v_1|+|v_2|+|v_3|} \longrightarrow 0 \quad (k=1,2,3) \quad \text{при} \quad |v_1|+|v_2|+|v_3| \longrightarrow 0 \tag{39}$$

рівномірно за $x \in [x_1, +\infty[$, де $x_1 = \beta \ln |\pi_\omega(t_0)|$.

Далі, використовуючи послідовно два додаткових перетворення

$$v_1(x) = w_1(x) + \frac{h_1(x)}{2}[3w_2(x) + w_3(x)], \quad v_k(x) = w_k(x) \ \ (k = 2,3), \tag{40}$$

$$w_1 = \frac{z_1}{4}, \quad w_2 = z_2 + z_3, \quad w_3 = -2z_2 - z_3 \tag{41}$$

доведемо систему диференціальних рівнянь (35) до зручнішого для дослідження вигляду.

Суть першого з цих перетворень полягає у тому, щоб отримати в першому рівнянні коефіцієнти при w_2 і w_3 у лінійній частині прямуючими до нуля при $x \to +\infty$, а другого – щоб матрицю коефіцієнтів при w_2 і w_3 у лінійній частині другого і третього рівнянь довести до майже діагонального вигляду, отримавши в цих рівняннях коефіцієнти при z_1 малими порівняно з коефіцієнтами при діагональних елементах.

У результаті цих перетворень одержимо систему рівнянь вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1' = -\beta h_1(x) \left[F_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{3} C_{1k}(x) z_k + Z_1(x, z_1, z_2, z_3) \right], \\[2ex] z_i' = \beta \left[F_i(x) + \sum\limits_{k=1}^{3} C_{ik}(x) z_k + Z_i(x, z_1, z_2, z_3) \right] \ \ (i = 2,3), \end{array} \right. \tag{42}$$

в якій згідно з умовами (36) – (39) і (31)

$$\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 0 \ (i = 1,2,3), \quad \lim_{x\to+\infty} C_{11}(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} C_{1k}(x) = 0 \ (k = 2,3),$$

$$\lim_{x\to+\infty} C_{21}(x) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} C_{22}(x) = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} C_{23}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} C_{31}(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} C_{22}(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} C_{23}(x) = 1,$$

$$\frac{Z_k(x, z_1, z_2, z_3)}{|z_1| + |z_2| + |z_3|} \longrightarrow 0 \ \ (k = 1,2,3) \quad \text{при} \quad |z_1| + |z_2| + |z_3| \longrightarrow 0$$

рівномірно за $x \in [x_2, +\infty[$, де $x_2 \geq x_1$ – деяке достатньо велике число.

Якщо, крім того, врахувати умову (32), то доходимо висновку, що для системи диференціальних рівнянь (42) виконано всі умови теореми 1.3 (з урахуванням зауваження 1.4) праці [8]. Згідно з цією теоремою система рівнянь (42) має хоча б один розв'язок $(z_k)_{k=1}^3 : [x_3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(x_3 \geq x_2)$, який зникає при $x \to +\infty$. Цьому розв'язку на підставі перетворень (41), (40) і (29), а також умов (6) і (31) відповідає розв'язок y рівняння (1), який задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (23) і (24). Використовуючи ці зображення і (1) неважко перевірити, що він належить до класу $P_{\omega 1}\left(\frac{1}{2}\right)$-розв'язків. Теорему повністю доведено.

2. У праці для рівнянь вигляду (1) розроблено методику дослідження асимптотичного поводження $P_{\omega 1}(\lambda_0)$-розв'язків, які відповідають особливим випадкам, коли

$\lambda_0 = 1$ і $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Одержано необхідні та достатні умови існування таких розв'язків, а також асимптотичні зображення, яким задовольняють ці розв'язки і їхні похідні до другого порядку включно. Треба зазначити, що випадок, коли $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ суттєво відрізняється від тих, які виникали в [9] при дослідженні диференціальних рівнянь другого порядку. Цей факт свідчить про необхідність попереднього розгляду рівнянь не тільки другого, а й третього порядків для побудови методики дослідження асимптотичного поводження розв'язків нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь довільних порядків.

---

1. *Абдул Г. Б.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1988.

2. *Евтухов В.М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n- го порядка// Докл. расшир.заседаний Ин-та прикл. мат. им. И.Н. Векуа ТГУ. – 1988. –Т. 3. – № 3. – С. 62-65.

3. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера n-го порядка // Докл.АН России. – 1992.– Т. 234. – №2. – С.258-260.

4. *Евтухов В.М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n- го порядка типа Эмдена-Фаулера// Сообщ. АН. Грузии. – 1992. – Т. 145. – № 2. – С. 269-273.

5. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1991.

6. *Костин А.В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Дифференциальние уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 3. – С. 524-526.

7. *Евтухов В.М., Стехун А.А.* Асимптотические представления неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка// Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2004. – Т. 7. –№ 4. – С. 82-87.

8. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений// Дифференциальние уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 4. – С. 433-444.

9. *Wong P.K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations // Pacific.J.Math. – 1963. – Vol. 13. – P. 737-760.

10. *Marić V., Tomić M.* // Asymptotic Properties of Solutions of the Equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ // Mathematische Zeitschrift. – 1976. – Vol. 149. – P. 261-266.

11. *Talliaferro S. D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ // SIAM J.Math.Anal. – 1981. – Vol. 12. – № 6.

12. *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* Asymptotic representations for unbounded solutions of second order nonlinear differential equations close to equations of Emden-Fowler type // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2003. – Vol. 30. – P.153-158.

13. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.,1967.

14. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М., 1985.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF NON-LINEAR NONAUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

Wjacheslav Evtukhov, Anjela Stehun

I.I. Mechnikov National University of Odessa,
Dvorjanskaja Str., 2, 65026 Odessa, Ukraine

Necessary and sufficient conditions of existence and the asymptotic representations of same types of unbounded solutions of one class of the nonlinear nonautonomous differential equations of the third order are established.

Key words: nonlinear nonautonomous equations, nonoscillations solutions, asymptotic representations.

Стаття надійшла до редколегії 19.04.2005

Прийнята до друку 19.10.2005