ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.121–125

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.121–125

УДК 512.552.12

РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД ВСЮДИ АДЕКВАТНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Тетяна КИСІЛЬ, Богдан ЗАБАВСЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Доведено, що всюди адекватні кільця є кільцями елементарних дільників, причому редукція квадратних матриць здійснюється з однієї сторони зворотною матрицею, яка є скінченим добутком елементарних матриць, а з другого боку довільною зворотною матрицею.

Ключові слова: кільце Безу, кільце елементарних дільників, кільце стабільного рангу 2, всюди адекватне кільце.

Адекватні області вперше розглядав Хелмер в [1]. Капланський започаткував вивчення адекватних кілець з дільниками нуля [2]. Він показав, що адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі Джекобсона є кільцями елементарних дільників. У [3] доведено, що адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі Джекобсона є або кільцями без дільників нуля, або кільцями нормування. Крім того там показано, що ряд кілець задовольняють умові адекватності навіть для нуля, серед них кільця нормування та регулярні кільця. Це дало змогу ввести новий клас всюди адекватних кілець [4].

Нагадаємо необхідні означення та факти. Всі кільця, які розглядаємо, є комутативними з $1 \neq 0$. Кільце називається *кільцем Безу*, якщо довільний його скінченнопороджений ідеал є головним. Капланський [2] називає кільце R *кільцем елементарних дільників*, якщо довільна матриця над R еквівалентна діагональній матриці. Кільце R назвемо *Ермітовим*, якщо кожна 1×2 і 2×1 матриця над R еквівалентна діагональній матриці. Згідно з [2, 3] кільце R є *кільцем елементарних дільників* тоді і лише тоді, коли кожен скінченно зображуваний R-модуль є прямою сумою циклічних модулів [5]. Комутативне кільце Безу назвемо *всюди адекватним*, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такі $r, s \in R$, що $a = r \cdot s$, де $rR + bR = R$

і для довільного незворотного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ – власний. Зауважимо, що елемент a може бути зокрема і нулем. Як уже зазначалось в [3] всюди адекватними є кільця нормування та регулярні кільця. В [4] показано, що комутативна область Безу зі скінченною кількістю мінімальних простих ідеалів є всюди адекватною тоді і тільки тоді, коли вона скінченна пряма сума кілець нормування.

Скажемо, що кільце R є *кільцем стабільного рангу 2* (в позначеннях $ст.р.\ (R) = 2$), якщо для довільних елементів $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ виконується $(a + cx)R + (b + cy)R = R$ для деяких $x, y \in R$ [6, 7]. Нехай надалі $GL_n(R)$ – повна лінійна група над кільцем R, а $GE_n(R)$ – її підгрупа, породжена елементарними матрицями.

Теорема 1. *Всюди адекватне кільце є кільцем елементарних дільників тоді і лише тоді, коли його стабільний ранг не перевищує 2.*

Доведення. Оскільки кільце елементарних дільників є Ермітовим, то на підставі [7,8] необхідність очевидна. Згідно з [2,8] для завершення доведення теореми достатньо довести, що довільна матриця $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$, де $aR + bR + cR = R$ володіє діагональною редукцією.

Оскільки R – всюди адекватне кільце, то елемент c можна зобразити у вигляді $c = r \cdot s$, де $rR + aR = R$ і $s'R + aR \neq R$ для довільного незворотного дільника s' елемента s. Домножуючи перший рядок матриці A на r і додаючи до другого, одержимо матрицю $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ ra+b & c \end{smallmatrix}\right)$. Зауважимо, що матриця A_1 – еквівалентна матриці A. Оскільки $(ra + b)R + cR = R$, то $(ra + b)u + cv = 1$ для деяких $u, v \in R$ [1,3].

Тоді матриця

$$A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ ra + b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c & u \\ ra + b & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

еквівалентна матриці A_1, а, отже, й матриці A. Очевидно, що матрицю A_2 елементарними перетвореннями можна звести до діагонального вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \triangle \end{smallmatrix}\right)$. Ми довели, що матриця A еквівалентна діагональній матриці, тобто R є кільцем елементарних дільників. Зауважимо, що при зведенні матриці A до діагонального вигляду ми користувалися зліва лише елементарними перетвореннями рядків. Зауважимо таке: що згідно з [2,3] обмеження взаємної простоти всіх елементів матриці A несуттєве.

Наслідок 1. *Для довільної квадратної матриці A порядку 2 над всюди адекватним кільцем стабільного рангу 2 існують такі матриці $P \in GE_2(R)$ і $Q \in GL_2(R)$, що PAQ є діагональною матрицею.*

Згідно з наслідком можемо довести основний результат цієї праці.

Теорема 2. *Нехай R – всюди адекватне кільце стабільного рангу 2. Тоді для довільної квадратної матриці A порядку n можна знайти такі матриці $P \in GE_n(R)$, $Q \in GL_n(R)$, що*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_{i+1}R \subseteq \varepsilon_i R$.

Доведення. Згідно з теоремою 1 R є кільцем елементарних дільників. Тому для матриці A можна знайти таку матрицю $P_1 \in GL_n(R)$, що

$$P_1 A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & * & \\ \vdots & & & \end{pmatrix},$$

де $a'_{11}R + a'_{12}R + \cdots + a'_{1n}R = \varepsilon_1 R$ і ε_1 – спільний дільник всіх елементів матриці $P_1 A$.

Нехай $P_1 = (p_{ij}) \in GL_n(R)$. Зрозуміло, що $p_{11}R + \cdots + p_{1n}R = R$. Оскільки стабільний ранг R дорівнює 2, то унімодулярний рядок $(p_{11}, \dots, p_{1n})$ при $n > 2$ згідно з [10], можна доповнити до зворотної матриці $H_1 \in GE_n(R)$. Тоді

$$H_1 A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & * & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Оскільки $a'_{11}R + a'_{12}R + \cdots + a'_{1n}R = \varepsilon_1 R$, то згідно з накладеними на R обмеженнями та завдяки [8] існує така зворотна матриця $Q_1 \in GL_n(R)$, що

$$A' = H_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & * & & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Тепер за допомогою елементарних перетворень рядків матрицю A' можна звести до вигляду

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

де ε_1 – дільник всіх елементів матриці A_1. Продовжуючи цей процес, ми прийдемо до випадку блоку порядку 2, для якого наш результат випливає з наслідку теореми 1.

Теорему доведено.

Зазначимо, що в багатьох практичних задачах треба конкретно знати перетворюючі матриці (тобто зворотні матриці, які приводять задану матрицю до її канонічного діагонального вигляду). В [11] сформульовано задачу повного описання кілець з елементарною редукцією матриць, тобто кілець, над якими довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями. У працях [9,11] описано деякі класи таких кілець. З результатів цієї праці випливає існування кілець, над якими кожна квадратна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду з одного боку елементарними перетвореннями (у нашому випадку елементарними перетвореннями рядків), з іншого боку – не елементарними перетвореннями. Зазначимо та: коли для заданої матриці A ми вже знайшли такі зворотні матриці P і Q та канонічну діагональну матрицю D, то при відомих матрицях P, A, D матрицю Q легко знайти як розв'язок матричного рівняння $AX = P^{-1}D$.

---

1. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – Vol. 49. – P. 225-236.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules //, Trans. Amer. Math. Soc. – 1949 . – Vol. 66. – P. 464-491.
3. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules //, Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 187. – N 19. – P. 231-248.
4. *Забавський Б. В.* Про комутативні кільця елементарних дільників зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів // Алгебра і топологія. – Львів. – 1980. – С. 74-78.
5. *Warfield R. B.* Decomposibility of finitely presented modules // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – Vol. 25. – P. 167-172.
6. *Vaserstein L. N.* The stable range of rings and dimension of topological spaces // Funksional Anal. and Prilozh. – 1971. – N 5. – C. 17-27.
7. *Menal P., Moncasi J.* On regular rings with stable range 2 // J. Pure. Appl. Algebra. – 1982. – Vol. 24. – P. 25-40.
8. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр.мат.журн.. – 2003. – N. 55. – N 4. – С. 550-554.
9. *Zabavsky B. V., Romaniv O. M.* Noncommutative rings with elementary reduction of matrices // Вопр. алг.. – 1999. – Vol. 14. – P. 79-85.
10. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206-210.
11. *Zabavsky B. V.* Ring with elementary reduction of matrices // Ring Theory Conf. (Miskol, Hungary) – 1996. – N 2. – P. 14.

REDUCTION OF MATRICES ON EVERYWHERE ADEQUATE RINGS

Tetyana Kisil, Bohdan Zabavsky

Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

We prove that a zero-adequate ring is elementary divisor ring with special reduction of matrices. Moreover, a reduction of square matrices is realized from one side by an unimodular matrix, which is a finite product of the elementary matrices, and from another side by an arbitrary unimodular matrix.

Key words: Bezout ring, elementary divisor ring, ring with stable range 2, zero-adequate ring.

Стаття надійшла до редколегії 26.10.2004

Прийнята до друку 19.10.2005