ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2005. Вип.64. С.126–133

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.2005. Vol.64. P.126–133

УДК 539.3

# ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ВАРІАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОЇ РІВНОВАГИ ТРИВИМІРНИХ ТІЛ, ОБМЕЖЕНИХ НЕПЛОСКИМИ ПОВЕРХНЯМИ

**Ольга КУЗЬ**

*Львівский національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Виконано числову реалізацію методу розв'язування задач лінійної теорії пружності, незв'язаних задач термопружності та деформаційної теорії пластичності для тривимірних областей, обмежених неплоскими поверхнями. Суть цього методу полягає у розповсюдженні варіаційно-різницевого методу на тривимірні області, які обмежені неплоскими поверхнями, за допомогою взаємнооднозначного (зі збереженням орієнтації вузлів) відображення сітки у цій області на сітку в канонічній області (прямокутному паралелепіпеді або області, складеній з них). Розв'язано задачі про стискання прямокутного паралелепіпеда куполоподібним навантаженням, яке прикладене до двох протилежних граней, та про напружений стан гірської долини під дією сили гравітації. Виконані порівняння отриманих полів напружень із результатами інших авторів і тестовими задачами свідчать про достовірність числових результатів.

*Ключові слова:* варіаційно-різницевий метод, пружність, термопружність, термопружнопластичність.

Дослідження напружено-деформованого стану тривимірних тіл з концентраторами напружень, який виникає внаслідок дії різноманітних силових і температурних чинників, – необхідний етап розрахунку на міцність і надійність. Оскільки можливості аналітичного розв'язування таких задач дуже обмежені, то виникає проблема ефективного числового розв'язування тривимірних задач термопружнопластичності в областях, обмежених неплоскими поверхнями.

Варіаційно-різницевий метод розв'язування задач лінійної та нелінійної теорії пружності, деформаційної теорії пластичності за активного навантажування та незв'язаних задач термопружнопластичності у двовимірних областях з криволінійною межею розроблено в працях [1-4] відповідно. Мета нашої праці – реалізувати запропонований у [5] підхід розв'язування згаданих вище задач у більш загальному, тривимірному формулюванні.

Квазістатична задача теорії пружності в переміщеннях для неоднорідного анізотропного тіла полягає у розв'язанні рівнянь рівноваги у тривимірній однозв'язній області $V$, обмеженої неплоскими поверхнями (рис. 1) [6]

$$(C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l})_{,j} + X_i = 0, \qquad (i,j,k,l = 1,2,3), \tag{1}$$

при використанні мішаних крайових умов на поверхні $\Sigma = \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma$, яка обмежує область $V$,

$$u_i|_{\Sigma_u} = u_i^0, \qquad C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}n_j|_{\Sigma_\sigma} = S_i^0. \tag{2}$$

Тут $C_{ijkl}$ — компоненти тензора модулів пружності; $X_i$, $S_i^0$ – компоненти векторів об'ємних та поверхневих сил відповідно; $u_i$ — компоненти вектора переміщення; $u_{i,j} \equiv \partial u_i/\partial x_j$. За однаковими латинськими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від 1 до 3.

У випадку ізотропного однорідного лінійно-пружного тіла компоненти тензора модулів пружності матимуть вигляд

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{3}$$

де $\lambda$, $\mu$ – параметри Ляме; $\delta_{ij}$ – компоненти одиничного тензора.

У незв'язаних задачах термопружності для ізотропного матеріалу в (1) і (2) замість $X_i$ та $S_i^0$ потрібно підставити відповідно $X_i^*$ і $S_i^*$ [7]

$$\begin{aligned} X_i^* &= X_i - 3K\alpha\,\mathrm{grad}\,T, \\ S_i^* &= S_i^0 + 3K\alpha T n_i. \end{aligned} \tag{4}$$

Тут $X_i$, $S_i^0$ – компоненти векторів об'ємних і поверхневих сил відповідно для ізотермічної пружної задачі; $K$ – модуль об'ємного стиску; $T$ – перепад температур; $\alpha$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу, треба в (1), (2) прийняти

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda(\varepsilon_{in})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\varepsilon_{in})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ \lambda(\varepsilon_{in}) &= K - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_{in}), \\ \mu(\varepsilon_{in}) &= \mu(1 - \omega(\varepsilon_{in})), \end{aligned} \tag{5}$$

де $\omega(\varepsilon_{in})$ – функція пластичності Ілюшина [8], $\varepsilon_{in}$ – інтенсивність тензора деформацій.

У випадку задачі термопружнопластичності для термально однорідного тіла потрібно в (1),(2) одночасно підставити (4) і (5).

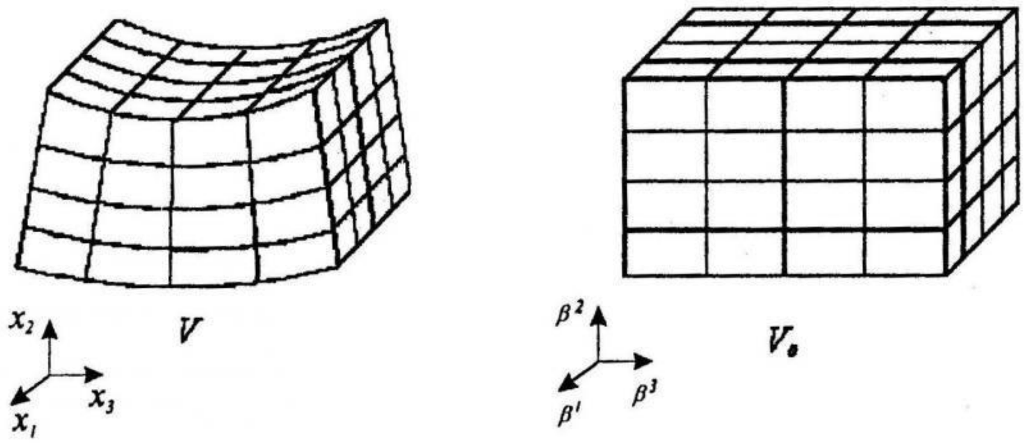


Рис. 1

Розглянемо варіаційне формулювання задачі (1),(2) [7]. Вона полягає у відшуканні стаціонарної точки лагранжіана

$$L = \int\limits_V W\, d\nu - \int\limits_V X_i u_i\, d\nu - \int\limits_{\Sigma_\sigma} S_i^0 u_i\, d\sigma, \tag{6}$$

в якому $W$ -- питома потенціальна енергія деформації.

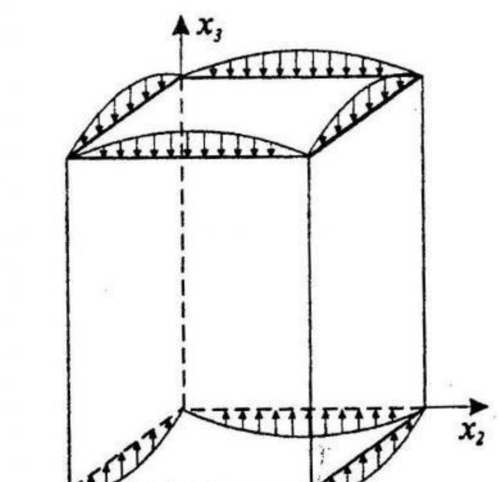


Рис. 2

Запишемо лагранжіан (6) у канонічній області $V_0$, якою може бути прямокутний паралепіпед або область, складена з них. Для того використаємо дискретне взаємнооднозначне відображення сітки в області $V$ на прямокутну рівномірну сітку області $V_0$ (рис.1)

$$x^i = x^i(\beta^1, \beta^2, \beta^3) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Тоді $J = \det(A^i_j)$, де $A^i_j = \partial x^i / \partial \beta^j$ – матриця Якобі цього відображення. За допомогою (7) запишемо питому енергію деформації $W$ у координатах $\vec{\beta}$

$$W = \frac{1}{2} C^{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \frac{1}{2} C^{ijkl}(\vec{\beta}) B^m_j B^n_l u_{i|m} u_{k|n} = \frac{1}{2} D^{imkn}(\vec{\beta}) u_{i|m} u_{k|n},$$

де $u_{i|m} = \partial u_i / \partial \beta^m$, $B^m_j = \partial \beta^m / \partial x^j$, $D^{imkn} = C^{ijkl} B^m_j B^n_l$.

Об'ємні та поверхневі інтеграли в (6) перетворюються за формулами

$$\int\limits_V X_i u_i \, d\nu = \int\limits_{V_0} J X_i u_i \, d\nu, \quad \int\limits_{\Sigma_\sigma} S^0_i u_i \, d\sigma = \sum_{\alpha=1}^{6} \int\limits_{\Sigma^\alpha_\sigma} S^0_i u_i \, d\sigma, \quad \bigcup_{\alpha=1}^{6} \Sigma^\alpha_\sigma = \Sigma_\sigma,$$

$$\int\limits_{\Sigma^\alpha_\sigma} S^0_i u_i \, d\sigma = \int\limits_{\Sigma^\alpha_0} q_\alpha S^0_i u_i \, d\sigma.$$

Тут $\Sigma^\alpha_\sigma$ – відповідна поверхня області $V$; $\Sigma^\alpha_0$ – відповідна грань прямокутного паралелепіпеда; $q_\alpha$ – якобіан переходу від $\Sigma^\alpha_\sigma$ до $\Sigma^\alpha_0$.

Таким чином, лагранжіан у прямокутному паралелепіпеді $V_0$ матиме вигляд

$$L_0 = \frac{1}{2} \int\limits_{V_0} J D^{imkn} u_{i|m} u_{k|n} \, d\nu - \int\limits_{V_0} J X_i u_i \, d\nu - \sum_{\alpha=1}^{6} \int\limits_{\Sigma^\alpha_0} q_\alpha S^0_i u_i \, d\sigma. \tag{8}$$

Замінивши у (8) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні — різницевими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана $L^h_0$. Для визначення стаціонарної точки $L^h_0$ у випадку лінійної теорії пружності та незв'язаної задачі термопружності одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$A\vec{u} + \vec{F} = 0, \tag{9}$$

а у випадку деформаційної теорії пластичності та нелінійної теорії пружності – систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{u}) + \vec{F} = 0, \tag{10}$$

які розв'язуються ітераційними методами [3].

Описаний варіаційно-різницевий метод в областях з криволінійною межею реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сіток на DELPHI.

Розглянемо задачу про стискання паралелепіпеда $l_1 = l_2 = 1$, $l_3 = 2$ з пружними сталими $\nu = 1/3$, $E = 1$ ($E$ – модуль пружності, $\nu$ – коефіцієнт Пуассона) куполоподібним навантаженням (рис.2) $S^0_1 = S^0_2 = 0$, $S^0_3 = (1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2))$ на

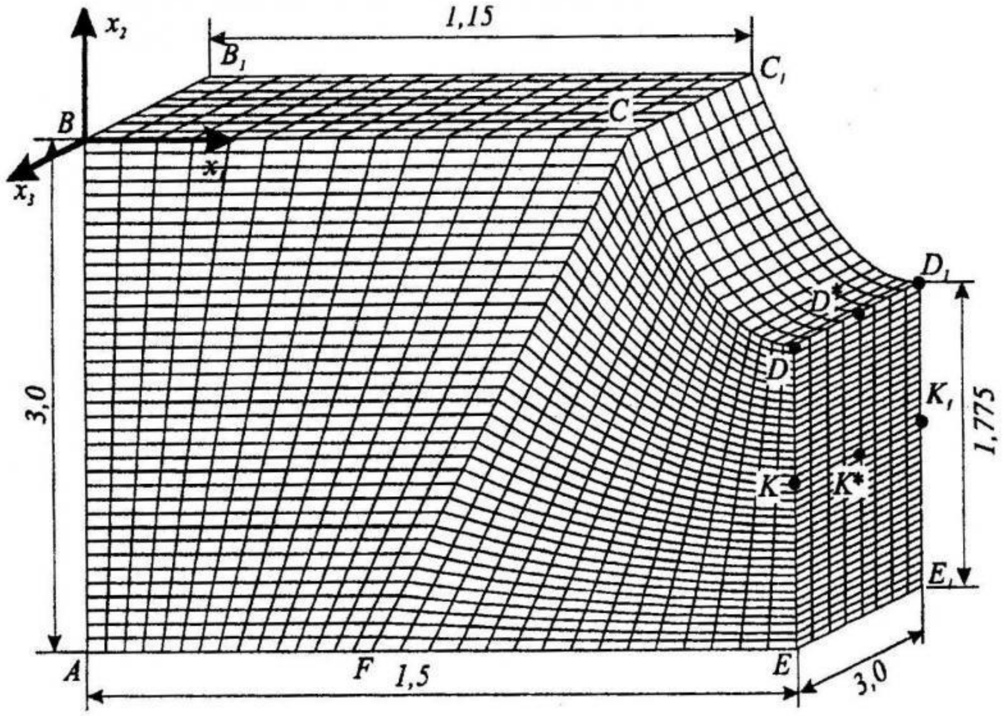


Рис. 3

межі $x_3 = 0$, та $S_1^0 = S_2^0 = 0$, $S_3^0 = -(1 - \cos(2\pi x_1))(1 - \cos(2\pi x_2))$ на межі $x_3 = 2$. Інші грані вільні від навантажень.

Порівняємо напруження $\sigma_{33}$ у різних точках перерізу $x_3 = 1$ з розв'язками цієї задачі, які одержали інші автори:

| $x_1 = 0$ | $x_1 = 0,25$ | $x_1 = 0,5$ | $x_1 = 0,25$ | $x_1 = 0,5$ | $x_1 = 0,5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2 = 0$ | $x_2 = 0$ | $x_2 = 0$ | $x_2 = 0,25$ | $x_2 = 0,25$ | $x_2 = 0,5$ |
| 0,85 | 1,12 | 0,97 | 1,07 | 1,100 | 1,47 |
| 0,90 | 0,94 | 0,89 | 1,03 | 1,036 | 1,10 |
| 0,95 | – | 1,00 | 0,97 | 1,030 | 1,06 |
| 0,93 | 0,97 | 1,00 | 1,01 | 1,028 | 1,07 |

Третій рядок відповідає розв'язку М. М. Філоненка-Бородича [9], четвертий — Л. Є. Мальцева, Н. П. Матвеєва, В. П. Нетребка [10], п'ятий — М. Мішонова [11], а останній — запропонованому розв'язку.

Розв'язок цієї задачі підтверджує принцип Сен-Венана: при $x_3 = 1$ розподіл напружень майже рівномірний. Зазначимо, що в розв'язку Філоненка–Бородича напруження $\sigma_{33}$ при $x_3 = 1$ відрізняються від середнього напруження, що дорівнює одиниці, на 47%. Для решти результатів ця відмінність не перевищує 10%. Треба зазначити, що поверхневі сили розподілені істотно нерівномірно: на гранях $x_3 = 0$, $x_3 = 2$ напруження $\sigma_{33}$ відрізняються від середнього на 300%.

Для аналізу напруженого стану у гірській долині розглянемо задачу теорії пру-

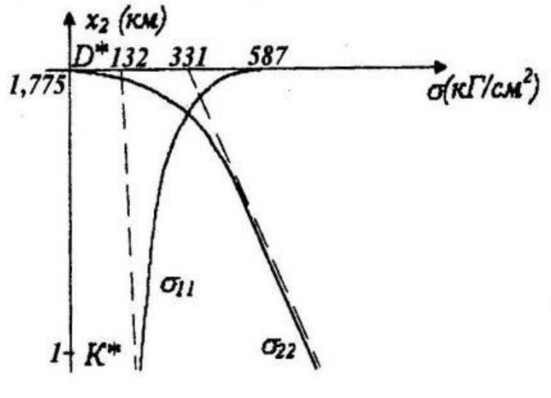


Рис. 4

жності в області з параболічним вирізом, координатна сітка половини якої зображена на рис.3. Навантаження складається з масових сил, зумовлених гравітаційною силою. На межі області $\Sigma$ задамо такі крайові умови:

$$
\begin{array}{lll}
\text{На } ABB_1A_1 \text{ і } EDD_1E_1 & - & u_1 = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0; \\
AA_1E_1E & - & u_2 = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0; \\
BCDD_1C_1B_1 & - & \sigma_{ij}n_j = 0, \quad i,j = 1,2,3; \\
AEDCB \text{ і } A_1E_1D_1C_1B_1 & - & u_3 = 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0.
\end{array}
$$

Матеріал ізотропний, пружні сталі $\nu = 0,2857$, $E = 10^5 кГ/см^2$, гравітаційна стала $\gamma = 2,7 кГ/см^3$. На вимогу замовника задачу розв'язували у розмірних величинах. На рисунку 4 відображені розподіли напружень $\sigma_{11}$ і $\sigma_{22}$ на відрізку $D^*K^*$, отримані числовим методом (суцільні лінії). Штрихованими лініями на рис. 4 зображені напруження $\sigma_{11}$ і $\sigma_{22}$ на цій самій ділянці в такому ж прямокутному паралелепіпеді, але без вирізу. Як видно з рисунка, в області біля концентратора напружень результати суттєво відрізняються, проте з глибиною за принципом Сен-Венана розбіжність зменшується.

Отже, розв'язані задачі засвідчують достовірність числової реалізації варіаційно-різницевого методу в тривимірних областях, обмежених неплоскими поверхнями. Розроблений пакет програм дає змогу отримати поля напружень в області біля концентратора напружень, якими можуть бути різноманітні виточки або вирізи (див. рис. 3). Цей пакет також дає змогу враховувати різні крайові умови, форму області та параметри середовища.

1. *Кузь И. С.* Численная реализация вариационно-разностного метода для областей с криволинейной границей // Численный анализ, математическое моделирование и их применение в механике. – М., 1988. – С. 59-63.

2. *Кузь І.* Числове розв'язування задач нелінійної теорії пружності // Праці НТШ. – 1997. – Т.1. – С. 553-559.

3. *Шешенин С. В., Кузь И. С.* О прикладных итерационных методах // Вычислительная механика деформируемого твердого тела.– М., 1990.– Вып. 1.– С. 63–75.

4. *Кузь О.* Пластична деформація гірських порід під дію гравітації та співнапрямних тектонічних сил // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.- мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 190-194.

5. *Кузь І., Бойко В.* Числовий метод розв'язування тривимірних задач теорії пружності та пластичності в областях з криволінійною межею // 6-й Міжнародний симпозіум українських інженерів - механіків у Львові. Тези доповідей.– Львів: Кінпатрі ЛТД.– 2003.— С. 70.

6. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994.

7. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. – М., 1981.

8. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М., 1963.

9. *Филоненко-Бородич М. М.* Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // Прикладная матем. и механика. – 1951. – Т. 15. – №2. – С. 137-145.

10. *Мальцев Л. Е., Матвеев Н. П., Нетребко В. П.* Об одном видоизменении вариационного метода Папковича–Филоненко–Бородича решения пространственных задач теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. – 1973. – №6. – С. 133-144.

11. *Мишонов М.* Общ метод за решение на пространственота задача на еластичноста за параллелепипеда. В кн.: Изв. Техн. ин-та Бълг. АН. – София, 1960. – Кн. 9–10. – С.15-23.

# NUMERICAL REALIZATION OF CURVILINEAR FINITE DIFFERENCE METHOD IN THE 3D DOMAINS

**Olha Kuz'**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

Numerical realization of curvilinear finite difference method for solving 3D elastic, thermoelastic and thermoelastoplastic problems has been worked out. Variational difference methods of building finite difference schemes are extended to curvilinear domains. The elaborated software ensures solving the problems with different boundary conditions and medium parameters.

*Key words:* variational difference method, elasticity, thermoelasticity, thermoelastoplasticity.

Стаття надійшла до редколегії 06.10.2004

Прийнята до друку 19.10.2005